сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-551

Р.Ф.Галеева, Е.П.Жидков

БИМОДАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОТРЕЗКА И СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

1988

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается одномерное отображение отрезка [-1, 1] в себя вида

$$x_{n+1} = f(x_n). \qquad /1/$$

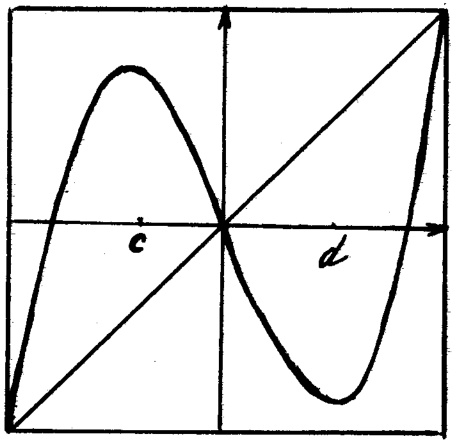
Такие отображения представляют собой простейшую модель нелинейной динамической системы. Относительно хорошо изучены так называемые унимодальные отображения, когда функция $f(x)$ в /1/ имеет один экстремум [1]. Многие результаты в этой области были получены с помощью оригинального метода - метода символической динамики, предложенного в работе [2]. Суть его заключается в том, что последовательным образам $x_1, x_2, \ldots x_n$ начальной точки x_0, получаемым с помощью /1/, сопоставляется последовательность букв, показывающих расположение этих образов относительно точки экстремума функции /т.е. влево от него или вправо/. Естественно, что этот метод можно применять не только для унимодальной, но и для случая кусочно-монотонной функции в /1/.

Минимальное усложнение унимодальной функции - функция с двумя экстремумами. Такие отображения по аналогии получили название бимодальных; они изучены хуже, хотя есть некоторое количество работ на эту тему /см. литературу в [3]/, носящих преимущественно численный характер. Бимодальные отображения возникают в некоторых экологических задачах [4], задачах оптики [5], к ним сводятся некоторые отображения окружности в себя [6]. В настоящей работе мы хотим описать символическую динамику бимодальных отображений, показать соотношение между множеством точек отрезка [-1, +1] и множеством символических последовательностей. Мы покажем, что не только каждой точке $x \in [-1,1]$ можно сопоставить последовательность букв, но и для каждой буквенной последовательности, принадлежащей определенному множеству, можно найти точку из [-1, +1], которая "реализует" эту последовательность.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сначала мы определим класс отображений, которые собственно и составляют предмет наших исследований.

Определение 1. Отображение $\mathfrak{F}$ отрезка [-1,+1] в себя принадлежит классу G, если:



1. $\mathcal{F}(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-1,+1]$.
2. $\mathcal{F}(1) = 1$, $\mathcal{F}(-1) = -1$, $\mathcal{F}(0) = 0$ и других неподвижных точек у $\mathcal{F}(x)$ нет.
3. $\mathcal{F}(x)$ строго возрастает на участке $[-1,c]$ и на участке $(d,1]$ и строго убывает на участке (c,d), где $c < 0$, $d > 0$.
4. Максимум $\mathcal{F}(c) > d$, а ее минимум $\mathcal{F}(d) < c$.

Таким образом, функция $\mathcal{F}(x)$ имеет вид, представленный на рисунке.

Замечание 1. Второе условие фиксирует количество неподвижных точек, причем концы интервала $(-1, +1)$ станут неустойчивыми неподвижными точками /т.е. точки из их сколь угодно малой окрестности через несколько итераций "убегут" от них/. Третья неподвижная точка $\mathcal{F}(0)$ фиксирована для удобства.

Замечание 2. Условие 4 наложено из тех соображений, что для отображения $\mathcal{F}(x)$ "активным" участком будет интервал $(\mathcal{F}(d), \mathcal{F}(c))$, поскольку любая точка из $(-1,+1)$ быстро притягивается к этому интервалу и после из него уже не выходит. Тогда, если не будет выполнено хотя бы одно из условий в 4, то мы будем иметь неинтересные случаи или монотонной функции $\mathcal{F}(x)$ на активном участке, или функции с одним экстремумом.

Рассмотрим орбиту начальной точки x_0, полученной отображением $\mathcal{F} \in G$, т.е. последовательность $\{x_0, \mathcal{F}(x_0), \dots, \mathcal{F}^n(x_0), \dots\}$. Поставим ей в соответствие последовательность букв $\{I_0(x_0), I_1(x_0), \dots, I_n(x_0), \dots\}$ по следующему правилу:

Определение 2

$$I_j(x_0) = \begin{cases} L, \text{если } \mathcal{F}^j(x_0) < c \\ C, \text{если } \mathcal{F}^j(x_0) = c \\ M, \text{если } c < \mathcal{F}^j(x_0) < d \\ D, \text{если } \mathcal{F}^j(x_0) = d \\ R, \text{если } \mathcal{F}^j(x_0) > d. \end{cases} \qquad /2/$$

Назовем последовательность, состоящую из букв L, C, M, D, R допустимой, если она или 1/ бесконечна и составлена из букв L, M, R, или 2/ конечна и состоит из букв L, M, R и оканчивается на C или на D.

Замечание 3. Наше условие "остановки", когда образ точки попадает в точку экстремума C или D, аналогично условию остановки в [1]. Иногда мы будем снимать это правило, т.е. при попадании в экстремум мы не останавливаемся, а продолжаем итерации /такие последовательности называют расширенными/.

Символические /буквенные/ последовательности мы будем обозначать большими буквами и подчеркивать снизу. Если $\underline{B} = B_0, \dots, B_m$, то запись $\underline{B}^n$ означает последовательность $\underbrace{B_0, \dots, B_m, \dots, B_0, \dots, B_m}_{n \text{ раз}}$.

Соответственно под $\underline{B}^\infty$ мы понимаем бесконечное число раз повторение $\underline{B}$. Если $\underline{A} = A_0, \dots, A_k$ и $\underline{B} = B_0, \dots, B_m$, то $\underline{A}\,\underline{B} = A_0, \dots, A_k B_0, \dots, B_m$. Последовательность, отвечающую орбите $\{x, \mathcal{F}(x), \dots, \mathcal{F}^n(x) \dots\}$, обозначим как $\underline{I}_{\mathcal{F}}(x)$. Но поскольку мы будем иметь дело с фиксированным отображением $\mathcal{F} \in G$, то индекс $\mathcal{F}$ мы будем обычно опускать. Если последовательность конечна и $\underline{A} = A_0, \dots, A_{m-2}E$, где $E = C$ или $E = D$, то число ее элементов m мы назовем кардинальным числом и обозначим как $|\underline{A}|$. Вообще, мы максимально придерживаемся обозначений, введенных в [1].

3. СВОЙСТВА СИМВОЛИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Введем согласно [2] правило сравнения двух допустимых последовательностей $\underline{A}$ и $\underline{B}$. Сначала определим соотношение между буквами $L < C < M < D < R$. Скажем, что $\underline{A} = \underline{B}$, если $A_i = B_i \ \forall i = 0, 1, \dots$ в случае бесконечных $\underline{A}$ и $\underline{B}$, а в случае конечных - $\underline{A} = \underline{B}$, если $|\underline{A}| = |\underline{B}| = n$ и $A_i = B_i$, $i = 0, 1, \dots n-1$.

Определение 3. Пусть $\underline{A} \neq \underline{B}$ - две допустимые последовательности. Пусть m - наименьший индекс, при котором $A_m \neq B_m$ /такое m всегда существует/. Тогда мы определим, что $\underline{A} > \underline{B}$, если 1/ последовательность $A_0 \dots A_{m-1}$ содержит четное количество букв M /такие последовательности мы назовем четными/ и $A_m > B_m$, или 2/ последовательность $A_0 \dots A_{m-1}$ нечетна /содержит нечетное количество букв M/ и $A_m < B_m$. Если неверно ни первое, ни второе, то $\underline{A} < \underline{B}$, $\underline{A} \geq \underline{B}$ мы понимаем в обычном смысле.

Несложно показать справедливость следующих утверждений:

Утверждение 1. Если $\mathcal{F} \in G$, то из $\underline{I}(x) < \underline{I}(y)$ следует $x < y$.

Утверждение 2. Если $\mathcal{F} \in G$ и $x < y$, то $\underline{I}(x) \leq \underline{I}(y)$.

Доказательство утверждения 1. Докажем по индукции по индексу i, при котором впервые $I_i(x) \neq I_i(y)$.

Утверждение очевидно при $i = 0$. Предположим, что оно верно при $i-1$. Пусть $I_0(x) = I_0(y)$ и равно или L или R, а $I_i(x) \neq I_i(y)$; $I_i(x) = I_{i-1}(\mathcal{F}(x))$, $I_i(y) = I_{i-1}(\mathcal{F}(y))$. Из $\underline{I}(x) < \underline{I}(y)$ следует, что $\underline{I}(\mathcal{F}(x)) < \underline{I}(\mathcal{F}(y))$, поскольку последовательности $I_0(x) \dots I_{i-1}(x)$ и $I_1(x) \dots I_{i-1}(x)$ имеют одинаковую четность. По гипотезе индукции $\mathcal{F}(x) < \mathcal{F}(y)$, но поскольку x, y принадлежат участкам возрастания $\mathcal{F}$, то отсюда следует, что $x < y$.

Если $I_0(x) = I_0(y) = M$, то из $\underline{I}(x) < \underline{I}(y)$ следует, что $I(\mathcal{F}(x)) > I(\mathcal{F}(y))$, поскольку последовательность $I_0(x) \ldots I_{i-1}(x)$ содержит на одну букву M больше, чем последовательность $I_1(x) \ldots I_{i-1}(x)$. Тогда $\mathcal{F}(x) > \mathcal{F}(y)$. Но x, y принадлежат участку убывания $\mathcal{F}(x)$, т.е. $x < y$.

Доказательство утверждения 2 легко получается от противного. Если $x < y$, а $\underline{I}(x) > \underline{I}(y)$, то из утверждения 1 мы получаем противоречие.

Определение 4. Определим на последовательностях операцию сдвига, именно

$$J^k \underline{A} = A_k A_{k+1} \ldots .$$

Назовем последовательность $\underline{A}$ максимальной, если

$$J^k \underline{A} \leq \underline{A}, \quad k = 1, 2, \ldots, |\underline{A}| - 1, \qquad /3/$$

если $\underline{A}$ конечна и $k = 1, 2 \ldots$, если $\underline{A}$ бесконечна.

Нам потребуется также последовательность, удовлетворяющая противоположному неравенству:

$$J^k \underline{B} \geq \underline{B}, \quad k = 1, 2, \ldots |\underline{B}| - 1 \quad \text{или} \quad k = 1, 2, \ldots \qquad /4/$$

Такие последовательности мы назовем минимальными.

Замечание. Выбор названий этих последовательностей объясняется следующими причинами.

Рассмотрим орбиту максимума $\{\mathcal{F}(c) \ldots \mathcal{F}^n(c) \ldots\}$ и орбиту минимума $\{\mathcal{F}(d) \ldots \mathcal{F}^n(d) \ldots\}$.

Поскольку $\forall j, k \quad \mathcal{F}^{j+1}(c) \leq \mathcal{F}(c)$ и $\mathcal{F}^{k+1}(d) \geq \mathcal{F}(d)$, то

$$\underline{I}(\mathcal{F}^{j+1}(c)) \leq \underline{I}(\mathcal{F}(c)),$$

$$\underline{I}(\mathcal{F}^{k+1}(d)) \geq \underline{I}(\mathcal{F}(d)),$$

но

$$\underline{I}(\mathcal{F}^{j+1}(c)) = J^j \underline{I}(\mathcal{F}(c)),$$

$$\underline{I}(\mathcal{F}^{k+1}(d)) = J^k \underline{I}(\mathcal{F}(d)).$$

Тогда, согласно определениям /3/, /4/, последовательность максимума будет максимальной, а последовательность минимума - минимальной.

Понятие максимальной последовательности возникло в уникальных отображениях [1]; наличие второго экстремума приводит к появлению и минимальной последовательности.

Теперь для простоты рассуждений рассмотрим не весь отрезок $[-1, +1]$, а наш "активный" участок $[\mathcal{F}(d), \mathcal{F}(c)]$. Каждой точке

этого отрезка соответствует допустимая последовательность, причем если

$$\mathcal{F}(d) \leq y \leq \mathcal{F}(c), \quad \text{то}$$

$$\underline{I}(\mathcal{F}(d)) \leq \underline{I}(y) \leq \underline{I}(\mathcal{F}(c)). \qquad /5/$$

Образ точки y также не выходит из рассматриваемого отрезка, т.е.

$$\mathcal{F}(d) \leq \mathcal{F}^k(y) \leq \mathcal{F}(c).$$

Итак, если $A = I(y)$, то

$$\underline{I}(\mathcal{F}(d)) \leq J^k \underline{A} \leq \underline{I}(\mathcal{F}(c)). \qquad /6/$$

А теперь поставим обратный вопрос: а все ли последовательности, удовлетворяющие условию /6/, реализуются? Ответ на этот вопрос положительный, однако одного условия /6/ недостаточно. Все зависит от того, какими будут последовательности $\underline{I}(\mathcal{F}(c))$ и $\underline{I}(\mathcal{F}(d))$ - бесконечными, конечными, периодическими. Сейчас мы снимаем правило остановки, т.е. рассматриваем расширенные последовательности. Если итерации максимума $\mathcal{F}(c)$ не попадают ни в C, ни в D, то $\underline{I}(\mathcal{F}(c))$ будет бесконечной. Если через несколько итераций попадает в C, то $\underline{I}(\mathcal{F}(c))$ будет периодической, $\underline{I}(\mathcal{F}(c)) = (\underline{\mathcal{P}}C)^\infty$. Если $|\underline{\mathcal{P}}C| = n$ и x достаточно близко к c, то в силу непрерывности функции $\mathcal{F}(x)$, $\underline{I}(\mathcal{F}(x)) = \underline{\mathcal{P}}\ldots$, а на n-м шаге мы попадем на участок L, если $\underline{\mathcal{P}}$ - четная, и на M, если $\underline{\mathcal{P}}$ - нечетная последовательность. Если $\mathcal{F}(c)$ попадает в точку минимума d, то все уже зависит от того, какова последовательность $\underline{I}(\mathcal{F}(d))$. Если $\underline{I}(\mathcal{F}(d)) = \underline{Q}D$, т.е. $\underline{I}(\mathcal{F}(c)) = \underline{\mathcal{P}}D(\underline{Q}D)^\infty$, то для x, достаточно близких к c, $\underline{I}(\mathcal{F}(x)) = \underline{\mathcal{P}}TQ\mathcal{F}\ldots$, где T, $\mathcal{F}$ определяются четностями последовательностей $\underline{\mathcal{P}}$ и $\underline{Q}$. Возможен так называемый двойной сверхустойчивый цикл, когда $\underline{I}(\mathcal{F}(c)) = (\underline{\mathcal{P}}D\underline{Q}C)^\infty$/и, соответственно, $\underline{I}(\mathcal{F}(d)) = (\underline{Q}C\underline{\mathcal{P}}D)^\infty$/. Здесь мы не случайно говорим о последовательностях точек, близких к точкам экстремума, поскольку такие последовательности будут участвовать в формулировке теоремы, дающей ответ на поставленный ранее вопрос.

4. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Определение 5. Последовательность $\underline{I}(x')$ назовем возмущением последовательности $\underline{I}(x)$ и обозначим через $\underline{I}^\delta(x)$, если $|x - x'| < \delta$.

Нас будут интересовать возмущения последовательностей экстремумов $\underline{I}(\mathcal{F}(c))$ и $\underline{I}(\mathcal{F}(d))$. Обозначим для удобства $e = c, d$, и $E = C, D$, а формальная запись $E-1$ и $E+1$ будет обозначать L и M соответственно, если $E = C$, и, соответственно, M и R, если $E = D$.

Если $\underline{I}(\mathcal{F}(c)) = \underline{\mathcal{P}}E\ldots$, то при достаточно малых δ

$$\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(c)) = \underline{\mathcal{P}}T\ldots, \text{ где } \underline{\mathcal{P}}T < \mathcal{P}E \text{ и } T = E-1, E+1, \qquad /7/$$

если $e = c$; а если $e = d$, то $\underline{\mathcal{P}}T > \underline{\mathcal{P}}E$, где $T = E-1, E+1$. Обозначим такую последовательность через $\underline{\mathcal{P}}\tilde{E} \equiv \underline{\mathcal{P}}T$.

Утверждение 3. Если $\underline{I}(\mathcal{F}(e)) = (\underline{\mathcal{P}}E)^{\infty}$, то при достаточно малом δ $\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(e)) = (\underline{\mathcal{P}}\tilde{E})^{\infty}$.

Доказательство. Пусть для определенности $e = c$, $E = C$ и $\underline{\mathcal{P}}$ – четная, $|\mathcal{P}C| = n$. Тогда для достаточно малых δ $\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(c)) = \underline{\mathcal{P}}L\ldots$

Поскольку $\frac{d\mathcal{F}^n}{dx}\Big|_{x=c} = 0$, $\mathcal{F}(x)$ – непрерывно дифференцируема, то

$\left|\frac{d\mathcal{F}^k}{dt}\Big|_{t=x^*\in(x,c)}\right| < \epsilon$ при $|x-c| < \delta$ и $k \geq n$. Тогда разность

$|\mathcal{F}^n(x) - \mathcal{F}^n(c)|$ можно сделать сколь угодно малой, и мы находимся в "первоначальных" условиях. Тогда $I^{\delta}(\mathcal{F}(c)) = \mathcal{P}L\mathcal{P}L\ldots$ при достаточно малых δ и т.д. $\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(c)) = \mathcal{P}L\mathcal{P}L\ldots\mathcal{P}L\ldots$, т.е. $\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(c)) = (\underline{\mathcal{P}}L)^{\infty}$. Обозначим в этом случае $\underline{I}^{s}(\mathcal{F}(e)) = (\underline{\mathcal{P}}\tilde{E})^{\infty}$.
Аналогичным образом доказывается

Утверждение 4. При достаточно малых δ справедливо:

Если $\underline{I}(\mathcal{F}(e)) = \underline{\mathcal{P}}E\underline{A}$, то $\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(e)) = \underline{\mathcal{P}}\tilde{E}\underline{A} \equiv \underline{I}^{s}(\mathcal{F}(e))$. /8/

Если $\underline{I}(\mathcal{F}(e)) = \underline{\mathcal{P}}E_1(\underline{A}E_2)^{\infty}$, $E_1, E_2 = C, D$, то
$\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(e) = \underline{\mathcal{P}}\tilde{E}_1(\underline{A}\tilde{E}_2)^{\infty} \equiv \underline{I}^{s}(\mathcal{F}(e))$. /9/

Если $\underline{I}(\mathcal{F}(e)) = (\underline{\mathcal{P}}E_1\underline{A}E_2)^{\infty}$, $E_1, E_2 = C, D$, то
$\underline{I}^{\delta}(\mathcal{F}(e)) = (\underline{\mathcal{P}}\tilde{E}_1\underline{A}\tilde{E}_2)^{\infty} \equiv \underline{I}^{s}(\mathcal{F}(e))$. /10/

Доопределим $I^{s}(\mathcal{F}(e))$ в случае, когда $\underline{I}(\mathcal{F}(e))$ бесконечно, т.е. не содержит C или D. В этом случае

$\underline{I}^{s}(\mathcal{F}(e)) = \underline{I}(\mathcal{F}(e))$. /11/

Определение 6. Скажем, что

$\underline{I}(\mathcal{F}(d)) \ll \underline{A} \ll \underline{I}(\mathcal{F}(c))$, /12/

если

$\underline{I}^{s}(\mathcal{F}(d)) < J^{k}\underline{A} < \underline{I}^{s}(\mathcal{F}(c))$.

Теперь можно совсем коротко сформулировать теорему 1.

Теорема 1. Если $\underline{A}$ – допустимая последовательность, удовлетворяющая условию /12/, то существует точка $x \in [\mathcal{F}(c), \mathcal{F}(d)]$ такая, что $\underline{I}(x) = \underline{A}$.

Доказательство. Идея доказательства теоремы 1 заключается в доказательстве непрерывности отображения множества точек из $[\mathcal{F}(d), \mathcal{F}(c)]$ на множество последовательностей, удовлетворяющих условиям теоремы. Заметим, что множество символических последовательностей можно рассматривать как линейно упорядоченное множество[7], а вводя в нем интервальную топологию, т.е. беря в качестве открытых множеств интервал $(\underline{A}, \underline{B})$, именно все $\underline{C}$ такие, что $\underline{A} < \underline{C} < \underline{B}$, это множество можно рассматривать как топологическое пространство. /Более того, можно показать, что множество последовательностей, удовлетворяющих условию $L^{\infty} < J^{k}A < R^{\infty}$, связно и метризуемо/.

Обозначим $N = (\mathcal{F}(c), \mathcal{F}(d))$, а через Ω – множество символических последовательностей, удовлетворяющих условию теоремы. Пусть $A \in \Omega$. Рассмотрим, как и[1], множества

$L_A = \{x : x \in N,\ \underline{I}(x) < \underline{A}\}$,

$R_A = \{x : x \in N,\ \underline{I}(x) > \underline{A}\}$.

Покажем, что они открыты /таким образом, будет показана непрерывность отображения $N \to \Omega$ /.

Покажем открытость R_A /для L_A все аналогично/. Пусть $y \in R_A$, т.е. $\underline{I}(y) > \underline{A}$. Покажем, что существует такая окрестность U точки y, что $\forall x \in U$, $x \in R_A$.

I. Если $\underline{I}(y)$ – бесконечная последовательность и n – наименьший индекс, при котором $I_n(y) \neq A_n$, то I_n принимает значения L, M, R. Тогда, в силу непрерывности $\mathcal{F}$, а следовательно, и $\mathcal{F}^n$, мы можем обеспечить равенство $\underline{I}_j(x) = I_j(y)$ при всех $j \leq n$ и всех x, достаточно близких к y.

II. Если $\underline{I}(y)$ – конечная последовательность и $I_n(y) \neq A_n$, но $I_n \neq C, D$, то рассуждения останутся теми же.

III.1. Теперь рассмотрим случай, когда $I_n(y) = C$ или $I_n(y) = D$, а последовательности $\underline{I}(\mathcal{F}(c))$ и $\underline{I}(\mathcal{F}(d))$ бесконечны.

III.1.1. $I_n(y) = C$, т.е. $\underline{I}(y) = \underline{B}C$, $\underline{A} = \underline{B}\mathcal{F}\hat{\underline{A}}$. Поскольку $y \in R_A$, то $\underline{B}C > \underline{B}\mathcal{F}\hat{\underline{A}}$. Тогда возможны варианты:

III.1.1.a. $\underline{B}$ – четная последовательность, $C > \mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F} = L$, $\underline{A} = \underline{B}L\hat{\underline{A}}$. Расширенная последовательность $\underline{I}(y) = \underline{B}C\underline{I}(\mathcal{F}(c))$. Поскольку $J^{k}\underline{A} < \underline{I}(\mathcal{F}(c))$, то $\hat{\underline{A}} < \underline{I}(\mathcal{F}(c))$. Пусть m – первый индекс, при котором $\hat{A}_m \neq I_m(\mathcal{F}(c))$, $I_m \neq E$. Последовательности $\underline{I}^{\delta}(y)$ при достаточно малых δ будут иметь вид:

$\underline{I}^{\delta}(y) = \underline{B}TI_0(\mathcal{F}(c))$, где $T = L, M$.

Итак,

$$\underline{I}^{\delta}(y) = \underline{B}LI_0(\mathcal{F}(c)) \ldots I_m(\mathcal{F}(c)),$$

$$\underline{I}^{\delta}(y) = \underline{B}MI_0(\mathcal{F}(c)) \ldots I_m(\mathcal{F}(c)),$$

$$\underline{A} \quad = \underline{B}LI_0(c) \ldots \hat{A}_m.$$

Легко проверяем, что и в двух случаях $\underline{I}^{\delta}(y) > \underline{A}$.

III.1.1.б. Если $\underline{B}$ - нечетная последовательность, то $\underline{C} < \mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F} = M, R, D$. Если $\mathcal{F} = M$, $T = L$, $\underline{A} = \underline{B}MI_0(\mathcal{F}(c)) \ldots \hat{A}_m$, $\hat{A}_m = I_m(\mathcal{F}(c))$, $\underline{I}^{\delta}(y) = \underline{B}LI_0(\mathcal{F}(c)) \ldots I_m(\mathcal{F}(c))$, то $I^{\delta}(y) > \underline{A}$.

Если $\mathcal{F} = M$, $T = M$, $\underline{B}M$- четная и $\underline{I}^{\delta}(y) > \underline{A}$. Если $\mathcal{F} = R$ или $\mathcal{F} = D$, то справедливость нужного неравенства очевидна.

III.1.2. $\underline{I}_n(y) = D$, т.е. $\underline{I}(y) = \underline{B}D\underline{I}(\mathcal{F}(d))$, где $\underline{A} = \underline{B}\mathcal{F}\hat{\underline{A}}$.

III.1.2.а. $\mathcal{F} = L, C, M$, если $\underline{B}$ - четная.

III.1.2.б. $\mathcal{F} = R$, если $\underline{B}$ - нечетная. Для достаточно малых δ

$$\underline{I}^{\delta}(y) = \underline{B}MI_0(\mathcal{F}(d)) \ldots$$

$$\underline{I}^{\delta}(y) = \underline{B}RI_0(\mathcal{F}(d)).$$

Тогда, пользуясь условием $J^k\underline{A} > \underline{I}(\mathcal{F}(d))$, легко показывается, что при всех возможных комбинациях $\underline{I}^{\delta}(y) > \underline{A}$.

III.2. Если $I_n(y) = E$. а одна из последовательностей $\underline{I}(\mathcal{F}(c))$, $\underline{I}(\mathcal{F}(d))$ /или обе/ периодичны или конечны, то открытость R_A доказывается аналогичным образом с использованием утверждений 3 и 4 /и, естественно, условием теоремы/.

Поскольку непрерывный образ связного множества связен, то существует $x \in [\mathcal{F}(c), \mathcal{F}(d)]$, такое, что $\underline{I}(x) = \underline{A}$.

Теорема доказана.

Последнее замечание. Хотелось бы получить все возможные последовательности $\underline{I}(x)$, $x \in [-1, 1]$. Все точки $x \in [-1, 1]$ попадают после конечного числа шагов в $[\mathcal{F}(c), \mathcal{F}(d)]$. Если, например, $x = 1 - \delta$, то через k шагов, где $k = \log_a\left(\frac{1 - \mathcal{F}(c)}{\delta}\right)$, $a = \left|\frac{d\mathcal{F}}{dx}\right|_{x=1}$ попадает в $[\mathcal{F}(c), \mathcal{F}(d)]$. При уменьшении δ k увеличивается. Итак, если $\underline{A} = R^n\hat{\underline{A}}$ или $\underline{A} = L^n\underline{A}$, $\hat{\underline{A}}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то существует точка $x \in (-1, 1)$, такая, что $\underline{I}(x) = \underline{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Collet P., Eckmann J.-P. Iterated Maps of the Interval as Dynamical System. Birkhäuser, Boston, 1980.

2. Milnor J., Thurston W. On Interval Maps of the Interval. I and II preprints, Princeton, 1977.
3. Mackay R.S., Tresser C. - Physica, 1987, 27D, p.412.
4. May R.M. - Ann. N.Y.Acad.Sci. 1979, 316, 7, p.517.
5. Glass L., Perez R. - Phys.Rev.Lett., 1982, 48, p.1772.
6. Mackay R.S., Tresser C. - Physica, 1986, 19D, p.206.
7. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июля 1988 года.

Галеева Р.Ф., Жидков Е.П.

Р5-88-551

Бимодальные отображения отрезка и символическая динамика

Описана символическая динамика так называемых бимодальных отображений. Для определенного класса бимодальных отображений получены условия реализуемости символической последовательности, т.е. условия существования точки отрезка, такой, что ее орбите соответствует заданная символическая последовательность. Оказывается, что множество реализуемых последовательностей определяется последовательностями экстремумов данного отображения. При доказательстве используются методы классического математического анализа, комбинаторные методы и свойства символических последовательностей.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Galeeva R.F., Zhidkov E.P.

P5-88-551

Bimodal Maps and Symbolic Dynamics

Symbolic dynamics of the so-called bimodal maps is described. For a certain class of bimodal maps the conditions for realization of symbolic sequence, i.e. conditions for existence of such a point that its orbit is described by a given symbolic sequence are shown. A set of realizable sequences turned out to depend on sequences of the turning points. Methods of classical mathematical analysis, combinatorial methods and the properties of symbolic sequences are used.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика