сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-311

А.А.Боголюбская, И.Л.Боголюбский

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ $Q_t = 2$ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОГО МАГНЕТИКА

1988

I. Настоящая работа является продолжением исследований авторами топологических солитонов в трехмерных и двумерных моделях магнетиков гайзенберговского типа [I,2]. Рассматриваемые в этих моделях плотности гамильтониана содержат члены четвертого порядка по пространственным производным $\partial_i s^a$, $a=1,2,3$, $s^a s^a=1$. Наличие подобных членов оказывается принципиально важным для существования устойчивых стационарных солитонов. Солитоны малого размера в двумерной модели такого типа исследовались в статье [3]. В предыдущих работах [2] в модели двумерного гейзенберговского магнетика с анизотропией типа "легкая ось" с помощью ЭВМ найдены стационарные солитоны произвольного радиуса с топологическим зарядом $Q_t=1$. Обратимся теперь к изучению локализованных распределений с $Q_t=2$.

2. Плотность гамильтониана рассматриваемой модели в стационарном случае имеет вид (в безразмерных переменных) [2]:

$$\mathcal{H}=(\partial_i s^a)^2+\sin^2\theta+\rho[(\partial_i s^a\partial_i s^a)^2-(\partial_i s^a\partial_j s^a)^2], \qquad \text{(I)}$$
$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \quad a=1,2,3, \quad x_1=x, \quad x_2=y,$$

θ - угол между "легкой осью" и единичным вектором $\vec{s}=(s^1,s^2,s^3)$, $s^a s^a=1$, ρ - безразмерный параметр.

Будем рассматривать локализованные (в плоскости x,y) возмущения вакуумного состояния (из двух возможных вакуумов системы $\vec{s}_0(x,y)=\pm\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ есть единичный орт "легкой оси", выберем для определенности $\vec{s}_0=+\vec{e}_3$). Соответствующее граничное условие $\vec{s}(\infty)=+\vec{e}_3$ компактифицирует плоскость $R^2(x,y)$, поэтому всякое локализованное распределение $\vec{s}(\vec{x})$ можно рассматривать как отображение $R^2_{comp}\to S^2(s^1,s^2,s^3)$. Степень этого отображения (топологический заряд) определяется формулой [4]

$$Q_t=\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon_{\mu\nu}\,\varepsilon^{abc}s^a\frac{\partial s^b}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial s^c}{\partial x_\nu}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$, ε^{abc} - абсолютно антисимметричные единичные псевдотензоры, $\mu,\nu=1,2$, $a,b,c=1,2,3$.

Введем координаты r,φ на плоскости R^2: $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$ и углы θ,χ на сфере S^2, которые задают компоненты вектора $\vec{s}$:

$$s_x = \sin\theta \cdot \cos\chi, \quad s_y = \sin\theta \cdot \sin\chi, \quad s_z = \cos\theta. \qquad (3)$$

Рассмотрим отображения $\vec{s}(\vec{x})$ такие, что

$$\chi = m\varphi, \qquad (4)$$

$$\theta = \theta(r), \quad r = (x^2+y^2)^{1/2}. \qquad (5)$$

Нетрудно показать, что для таких отображений (см.[5])

$$Q_t = \frac{m}{2}\left[\cos\theta(\infty) - \cos\theta(0)\right]. \qquad (6)$$

3. Теперь обсудим вопрос о выборе подстановки при поиске локализованных решений (минимумов гамильтониана $H=\int \mathcal{H} d^2x$) при различных Q_t . Заметим, что гамильтониан модели (I) инвариантен относительно группы $G = SO(2)_S \otimes SO(2)_I$ (индексы S и I отмечают координатное и изотопическое пространство). Выделим подгруппу $G_0 \in G$, $G_0 = diag[SO(2)_S \otimes SO(2)_I]$, для которой параметры преобразований групп $SO(2)_S$ и $SO(2)_I$ совпадают. Иначе говоря, G_0 можно определить как группу преобразований[6]

$$\vec{s}(\vec{x}) \to R^3(\alpha)\, \vec{s}\left[\rho^{-1}(\alpha)\vec{x}\right], \qquad (7)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2) = (r, \varphi)$, $\rho(\alpha)x = (r, \varphi+\alpha)$, а $R^3(\alpha)$ – оператор вращения вокруг третьей изотопической оси на угол α .
Нетрудно видеть[6], что поля вида

$$\vec{s}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \sin\theta(r)\cos\varphi \\ \sin\theta(r)\sin\varphi \\ \cos\theta(r) \end{pmatrix}, \qquad \theta(0) = n\pi, \qquad (8)$$

образуют множество S_h полей, инвариантных относительно подгруппы G_0 . Условие $\theta(0)=n\pi$ обеспечивает однозначность $\vec{s}(\vec{x})$ и конечность $\mathcal{H}(\vec{x})$ при $r=0$. Заряд Q_t для всех полей из множества S_h , определяемых непрерывными функциями $\theta(r)$ с условием $\theta(\infty)=0$, равен $Q_t = \frac{1}{2}[1-(-1)^n]$ (см. (6)).

Согласно теореме Коулмена-Пале[6,7,8], экстремаль функционала H на множестве инвариантных полей S_h является экстремалью H и на всем множестве полей $S^2(Q_t=1)$ с зарядом $Q_t=1$, $S_h \in S^2(Q_t=1)$. В соответствии с этим, подстановка (8) с $n=1$, $\theta(\infty)=0$ позволяет искать минимум функционала H в классе полей с зарядом $Q_t=1$.

К сожалению, пока не удается найти хорошо обоснованной подстановки для поиска солитонов с $Q_t=2$, т.к. не удается указать

подмножества $S^2_{inv}(Q_t=2) \in S^2(Q_t=2)$ полей, инвариантных относительно какой-либо нетривиальной подгруппы $G_2 \in G$. На первом этапе мы рассмотрим два класса отображений $R^2_{comp} \to S^2$, при которых каждая точка на S^2 "проходится" при отображении дважды. Они даются формулами (4),(5), где $\theta(0)=n\pi$, $\theta(\infty)=0$, при

A) $m=1, \quad n=2,$ (9)

B) $m=2, \quad n=1.$ (I0)

Однако сразу отметим, что в случае A заряд $Q_t=0$, а в случае B $Q_t=2$.

Подставляя соотношения (3),(4),(5) в выражение (I), получаем зависящую только от r плотность гамильтониана $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(r) = \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \frac{m^2}{r^2}\sin^2\theta + \sin^2\theta + \frac{2pm^2}{r^2}\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2. \qquad (II)$$

Варьированием находим уравнение для радиальной функции $\theta(r)$:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2}+1\right)\sin\theta\cos\theta + 2pm^2\left[\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{r^3}\frac{d\theta}{dr}\right] = 0. \qquad (I2)$$

4. Рассмотрим случай A. Подставляя в уравнение (I2) с $m=1$ разложение $\theta(r)$ в ряд при малых r , находим

$$\theta(r) = 2\pi - Cr + O(r^2). \qquad (I3)$$

Краевую задачу (I2), $\theta(0)=2\pi$, $\theta(\infty)=0$, будем исследовать методом "стрельбы": задавая различные значения C и решая при них уравнение (I2) на ЭВМ с учетом (I3), будем добиваться выполнения условия $\theta(\infty)=0$. Найденные радиальные функции $\theta_0(r)$ при различных p представлены на рис.I.

Значения энергии соответствующих локализованных распределений $H_{12} = 2\pi\int \mathcal{H}(r)\, dr$ приведены в таблице вместе со значениями H_{11} для солитонов с $Q_t=1$, найденных в[2]. Видно, что $h_1(p) = H_{12}(p)/H_{11}(p) > 2$ и $h_1(p)$ монотонно уменьшается при увеличении p , причем $h_1 \to 2+0$ при $p \to \infty$. Итак, при рассмотрении конфигураций (9) не обнаружено тенденции к образованию связанных состояний солитон-антисолитон. Вопрос об устойчивости найденных локализованных распределений с $Q_t=0$ может быть решен двумерными расчетами исходной модели (I).

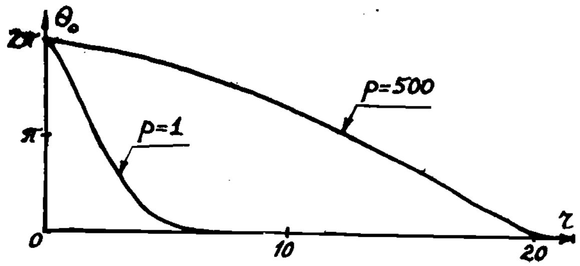

Рис. I.

Таблица

Зависимость энергии $H_{11}\,(Q_t=1)$, $H_{12}\,(Q_t=0)$ и H_{21} ($Q_t=2$) от параметра p .

p	H_{11}	H_{12}	H_{21}
500	676,6	I453,4	I3I7,8
I00	327,4	746,5	624,9
20	I68,7	4I7,35	3I3,4
I	63,83	I84,4	II3,6
0,4	5I,50	I53,0	9I,465
0,0I	30,94		57,5I
0,00I	27,36		52,655
$I0^{-4}$	25,96		5I,036
$I0^{-5}$	25,42		50,5I
$I0^{-6}$	25,20		50,34

5. Исследуем теперь случай B , $Q_t=2$. Решаем уравнение (II) при $m=2$ со следующими граничными условиями: $\theta(0)=\pi$, $\theta(\infty)=0$. Разлагаем $\theta(r)$ при $r\to 0$:

$$\theta(r)=\pi-Cr^2+o(r^2). \qquad (I4)$$

где значения C также подбираются "пристрелкой". Графики функций $\theta_2(r)$, полученных на ЭВМ при различных p , представлены на рис.2.

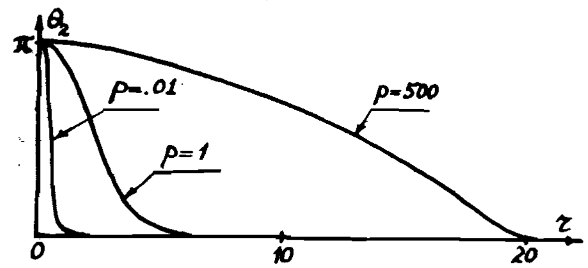

Рис. 2.

Характерный размер распределений $\theta_2(r)$ монотонно растет с увеличением p . При малых p полуширина ΔR_s пропорциональна p^{δ} , где $\delta\approx 1/4$, $\Delta R_s=6{,}4\cdot I0^{-2}$ при $p=I0^{-6}$, $\Delta R_s=0{,}675$ при $p=I0^{-2}$, (ср. с результатами работ /3,2/). Значения энергии H_{21} найденных локализованных распределений представлены в таблице. Подчеркнем, что при всех p справедливо неравенство $H_{21}<2H_{11}$, причем (H_{21}/H_{11}) $\to 2-0$ при $p\to\infty$. Таким образом, расчетами на ЭВМ показано существование при всех $p>0$ связанных состояний двух солитонов с $Q_t=1$. Дальнейшие исследования должны показать, соответствуют ли полученные распределения минимумам функционала (I) в секторе $Q_t=2$.

Типичный вид распределений $\mathcal{H}(r)$ (см.(I0)), соответствующих функциям $\theta_{Q_t}(r)$, $Q_t=0,I,2$, полученным в /2/ и настоящей работе, изображен на рис.3, $p=1$.

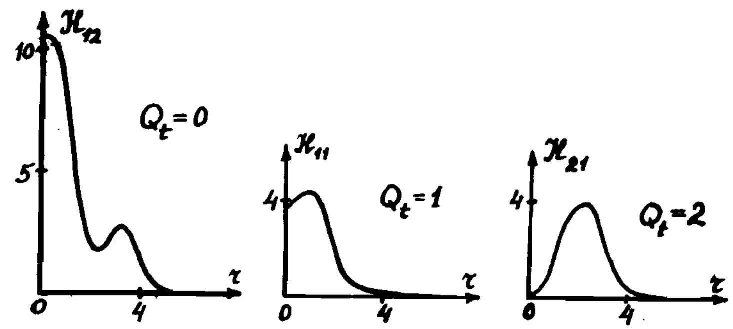

Рис. 3.

Авторы признательны проф. Е.П.Жидкову, Б.А.Иванову, А.М.Косевичу, В.Г.Маханькову, М.Мюллер-Пройсскеру, Ю.П.Рыбакову, А.С.Шварцу за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-482, Дубна, 1985.
   Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-588, Дубна, 1985.
   Bogolubsky I.L. Phys. Lett., 1988, A126 , 511.
2. Боголюбская А.А., Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р5-87-761, Дубна, 1987.
   Bogolubskaya A.A.,Bogolubsky I.L. JINR, E5-87-867, Dubna, 1987.
3. Иванов Б.А., Стефанович В.А. ЖЭТФ, 1986, 91, 638.
4. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. "Мир", Москва, 1985.
5. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", Киев, 1983.
6. Фаддеев Л.Д. В поисках многомерных солитонов. В сборнике материалов IV Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1976, Д2-9788, Дубна, ОИЯИ, с.207-223.
7. Coleman S. Classical lumps and their quantum descendants, 1975 Erice Lectures, published in: New Phenomena in Sub-Nuclear Physics, Ed.A.Zichichi, New York, Plenum Press, 1977.
8. Palais R. Comm. Math. Phys., 1979, 69 , 19.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 мая 1988 года.