объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-256

В.И.Иноземцев

МАТРИЧНЫЕ АНАЛОГИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Направлено в журнал
"Функциональный анализ и его приложения"

1988

Матричное уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$\ddot{Q}+a_0Q^3+a_1Q^2+a_2Q+a_3=0, \qquad a_j\in\mathbf{C}, \quad Q\in gl(n,\mathbf{C}) \qquad /1/$$

возникает при исследовании решений уравнений движения одномерных систем взаимодействующих частиц во внешнем поле, гамильтониан которых имеет вид /1/

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}p_j^2+\sum_{j>k}^{n}(x_j-x_k)^{-2}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_0}{4}x_j^4+\frac{a_1}{3}x_j^3+\frac{a_2}{2}x_j^2+a_3x_j\right). \qquad /2/$$

Целью данной работы является построение решений /1/ для матриц произвольной размерности и начальных условий общего положения, которые естественно считать матричными аналогами эллиптических функций, удовлетворяющих /1/ при $n = 1$, то есть $Q\in\mathbf{C}$.

1. Без ограничения общности можно положить в /1/ $a_0 = 2$, $a_1 = 0$. Уравнение /1/ может быть записано в виде гамильтоновой системы со скобкой Пуассона $\{Q_{jk}, \dot{Q}_{j'k'}\} = \delta_{jj'}\delta_{kk'}$ и допускает представление Лакса со спектральным параметром $h\in\mathbf{C}$:

$$\frac{dL}{dt}=[L,M], \quad L=\begin{pmatrix} \dot{Q} & \psi_+(Q) \\ \psi_-(Q) & -\dot{Q} \end{pmatrix}, \quad M=\begin{pmatrix} 0 & \chi_+(0) \\ -\chi_-(0) & 0 \end{pmatrix}, \qquad /3/$$

$$\psi_\pm(Q)=Q^2\pm ih\sqrt{2}Q+\left(\frac{a_2}{2}-h^2\pm\frac{ia_3}{h\sqrt{2}}\right)I, \qquad \chi_\pm(Q)=Q\pm\frac{ih}{\sqrt{2}}I,$$

где I - единичная матрица, $i^2 = -1$. По начальным данным однозначно определяются интегралы движения

$$J_j=\mathrm{tr}\,L^{2j}, \quad T_{jk}=[Q,\dot{Q}]_{jk}, \quad 1\le j,k\le n. \qquad /4/$$

Пусть $\tilde{\ell}$, $\tilde{M}$ - матрицы, полученные из /3/ путем преобразования подобия с матрицей $\Omega_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}$. Элементы с наибольшей степенью h находятся на их главных диагоналях, что позволяет проинтегрировать /1/ с помощью алгебро-геометрических методов, развитых в[2].

2. Спектральная кривая $z(h)$ определяется соотношением

$$S(z,h) = \det(\tilde{L}(h) - Iz) = 0, \qquad /5/$$

она осуществляет $2n$-листное накрытие Γ плоскости $\mathbf{C}$. Размерность якобиана кривой /5/ задается начальными условиями. Из-за недостатка места рассмотрим далее лишь случай всех отличных друг от друга собственных значений $\{r_j\}$ коммутатора /4/.

Лемма 1. Род g кривой $z(h)$ равен $n^2 - n + 1$ для $a_3 = 0$ и $n^2 + 1$ для остальных значений a_3.

Доказательство. В окрестности $h = 0$ ветви z обладают асимптотиками $z_j = a_3/h\sqrt{2} + \nu_j h + 0(h)$, $z_{j+n} = -a_3/h\sqrt{2} - \nu_j h + 0(h)$, ν_j -собственные значения изоспектральной матрицы $i[\dot{Q}, Q^2] + \dot{Q}^2 + Q^4 + a_2 Q^2 + 2a_3 Q + a_2^2 I/4$, $S' = \partial S/\partial z$ имеет на Γ при $a_3 \neq 0$ простые полюса в образах $h = 0$. Вблизи точек $P_{j1}^{(0)}$, $P_{j2}^{(0)}$, $1 \leq j \leq n$, расположенных над $h^{-1} = 0$, для ветвей z справедливы разложения $z_{j\alpha} = (-1)^{\alpha+1}(h^2 - a_2/2) + ir_j/h\sqrt{2} + 0(h^{-1})$, $\alpha = 1,2$; S' имеет на каждом листе в этих точках полюса кратности $n + 1$. Общее число полюсов S' на Γ есть число точек ветвления Γ, и утверждение леммы следует из формулы Римана - Гурвица.

Пусть ω- матрица преобразования, диагонализующего коммутатор /4/, $(\omega T \omega^{-1})_{jk} = r_j \delta_{jk}$; $\tilde{L}_1$, $\tilde{M}_1$ - матрицы, полученные из $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ преобразованием подобия, задаваемым $\Omega_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$; $P \in \Gamma$.

Собственные векторы r_1, удовлетворяющие уравнению $(d/dt + \tilde{M}_1) \times \lambda(t,P) = 0$, имеют существенные особенности в точках $P_{j\alpha}^{(0)}$ вида $\exp(\pm iht/\sqrt{2})$. Будем нумеровать листы Γ и координаты $\lambda(t,P)$ двумя индексами так, чтобы $P_{j\alpha}^{(0)}$ находились на листах $(j\alpha)$, и $(\lambda(t,P))_{k1} = (\lambda(t,P))_k$, $(\lambda(t,P))_{k2} = (\lambda(t,P))_{k+n}$, $1 \leq k \leq n$.

Пусть Λ- матрица, столбцы которой - векторы $\lambda(t,P_{j\alpha})$; $\mu(t,P_{j\alpha})$ - строки Λ^{-1}; $D^{j\alpha}(t)$, $D_{j\alpha}(t)$ - дивизоры нулей $(\lambda(t,P))_{j\alpha}$, $(\mu(t,P))_{j\alpha}$.

Лемма 2. Степени дивизоров $D(t)$ равны g. Доказательство состоит в построении асимптотик проектора $g_{j\alpha,k\beta}(t,P) = (\lambda(t,P))_{j\alpha}(\mu(t,P))_{k\beta}$ при $P \to P_{\ell\gamma}^{(0)}$ с использованием диагональности T в выбранном представлении для $\tilde{L}_1$, $\tilde{M}_1$ и применении результатов лемм 5,6 из[2].

Для функций $f(t,P)$, заданных на Γ, определим $\tilde{f}(t,P)$ соотношением $\tilde{f}(t,P) = f(t,P)(f(0,P))^{-1}$. Зависимость Q от времени определяется значениями $\tilde{g}_{j1,k2}(t,P)$ в точках $P_{j1}^{(0)}$.

Предложение. Функции $(\tilde{\lambda}(t,P))_{j\alpha}$, $(\tilde{\mu}(t,P))_{j\alpha}$ мероморфны на $\Gamma \setminus \{P_{\ell\gamma}^{(0)}\}$, дивизоры их полюсов имеют степень g и определяются по начальным условиям для /1/. В окрестностях $P_{\ell\gamma}^{(0)}$ эти функции имеют вид $\chi(t,j\alpha,\ell\gamma)\exp\{\pm(-1)^{\gamma+1} iht/\sqrt{2}\}$, то есть являются $2n$-точечными функциями Бейкера - Ахиезера и могут быть выражены через θ-функции поверхности Γ.

Пусть $\{a_p, b_q\}$, $1 \leq p$, $q \leq g$ - канонический базис циклов на Γ; $\{\omega_p\}$ - нормированный базис дифференциалов первого рода; Ω - нормированный дифференциал второго рода с главными частями вида $i(-1)^{\gamma+1} dh/\sqrt{2}$ в точках $P_{\ell\gamma}^{(0)}$; K - вектор римановых констант,

$$K_p = \pi i + \oint_{b_p} \omega_p - \frac{1}{2\pi i} \sum_{q \neq p} \oint_{a_q} \left(\omega_q(P) \int_{P_0}^{P} \omega_p\right),$$

$A(P)$ - преобразование Абеля. Вектор $W = K + A(D_{j2}(0)) - A(P_{j2}^{(0)})$ на якобиане $J(\Gamma)$ не зависит от j. Решение /1/ имеет вид $Q_{jk} = (\omega^{-1}\tilde{Q}\omega)_{jk}$, где

$$\tilde{Q}_{jk}(t) = (\omega Q(0)\, \omega^{-1})_{jk} \exp(t(\xi_j - \tilde{\xi}_k)) \times$$
$$\times \frac{\theta(A(P_{k2}^{(0)}) - A(P_{j1}^{(0)}) + tU + W)\, \theta(W)}{\theta(A(P_{k2}^{(0)}) - A(P_{j1}^{(0)}) + W)\, \theta(tU + W)},$$

$$\xi_j = \lim_{P \to P_{j1}^{(0)}} \left(\int_{P_0}^{P} \Omega - \frac{ih}{\sqrt{2}}\right), \quad \tilde{\xi}_k = \lim_{P \to P_{k2}^{(0)}} \left(\int_{P_0}^{P} \Omega + \frac{ih}{\sqrt{2}}\right), \quad (U)_p = \oint_{b_p} \Omega.$$

3. Для систем частиц /2/ коммутатор /4/ имеет вид $T_{jk} = i(1 - \delta_{jk})$, его собственное значение $-i$ $(n-1)$-кратно вырождено. Род кривой /5/ понижается до $2n-1$ при $a_3 = 0$ и до $3n - 1$ при остальных a_3. Явные выражения для зависимости координат частиц от времени будут опубликованы в другой работе. Для симплектических матриц вполне интегрируемым является также уравнение типа /1/ с нелинейностью пятого порядка $Q^5 + aQ^3 + bQ$ и дополнительным условием на $[Q, \dot{Q}]$, соответствующее несколько более общим, чем /2/, гамильтонианам, описывающим движение симметричных конфигураций $2n$ частиц[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Inozemtsev V.I. - Phys.Lett., 1983, v.98A, p.316.
2. Дубровин Б.А. - Функциональный анализ,1977, т.11, вып.4, с.28.
3. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. - Lett.Math.Phys., 1985, v.9, p.13.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 апреля 1988 года.

Иноземцев В.И. P5-88-256

Матричные аналоги эллиптических функций

Эллиптические функции можно определить как решения обыкновенного уравнения второго порядка с кубической нелинейностью. Показано, что матричное уравнение $\ddot{Q}+P_3(Q)=0$, P_3 - полином третьего порядка с произвольными комплексными коэффициентами, может быть проинтегрировано в θ-функциях Римана для начальных условий общего положения. Его решения естественно считать матричными аналогами эллиптических функций.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Inozemtsev V.I. P5-88-256

Matrix Analogs of Elliptic Functions

The elliptic functions can be treated as solutions of ordinary equations of the second order with the cubic nonlinearity. In this paper it is shown that the matrix equation $\ddot{Q}+P_3(Q)=0$ (P_3 is the third-order polynomial with arbitrary complex coefficients) can be integrated in terms of Riemann theta functions under general initial conditions. It is natural to consider the solutions of this equation as matrix analogs of elliptic functions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988