88-235

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-235

В.И.Иноземцев

КОНЕЧНЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Направлено в журнал "Communications in Mathematical Physics"

1988

I. Введение

Изучение распространения волн в бесконечных одномерных цепочках привело к открытию точных аналитических решений бесконечной системы нелинейных разностных уравнений, соответствующей экспоненциальному взаимодействию между ближайшими соседними частицами [1]. После того как Хенон, Флашка [2] и Мозер [3] показали, что конечномерные гамильтоновы системы этого типа (непериодические и периодические цепочки Тоды) являются вполне интегрируемыми, исследованию их свойств было посвящено большое количество работ. Костант [6], Ольшанецкий и Переломов [7] нашли связь между непериодическими цепочками и классическими алгебрами Ли. Гамильтонианы этих цепочек могут быть построены по системам $\{\rho\}$ простых корней классических алгебр $\{\mathcal{G}\}$,

$$H=\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j^2}{2}+V_{\mathcal{G}}\,,\qquad V_{\mathcal{G}}=\sum_{\alpha\in\{\rho\}}\exp(\vec{\alpha}\vec{q})\,; \tag{I}$$

α - корневые векторы, p_j , q_j - импульсы и кординаты частиц. Для алгебр A_n , B_n, C_n, D_n потенциалы $V_{\mathcal{G}}$ имеют вид

$$V_{A_n}=\sum_{j=1}^{n-1}\exp(q_j-q_{j+1}),\quad V_{B_n}=V_{A_n}+e^{q_n},\quad V_{C_n}=V_{A_n}+e^{2q_n},$$

$$V_{D_n}=V_{A_n}+e^{q_n+q_{n-1}}\,. \tag{2}$$

Для исключительных алгебр системы типа (I) не имеют простой механической интерпретации и не будут рассматриваться здесь. Богоявленский [4] указал способ построения обобщенных периодических цепочек, который, как было впервые установлено в [9], соответствует использованию в (I) системы простых корней аффинных алгебр. Потенциалы V для алгебр петель $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ могут быть записаны в виде

$$V_{A_n^{(1)}}=V_{A_n}+e^{q_n-q_1},\quad V_{B_n^{(1)}}=V_{B_n}+e^{-(q_1+q_2)},\quad V_{C_n^{(1)}}=V_{C_n}+e^{-2q_1},$$

$$V_{D_n^{(1)}}=V_{D_n}+e^{-(q_1+q_2)}\,. \tag{3}$$

Скрученным алгебрам петель отвечают потенциалы [18]

$$V_{A_{2n}^{(2)}}=V_{A_n}+e^{q_n}+e^{-2q_1},\quad V_{A_{2n+1}^{(2)}}=V_{A_n}+e^{-(q_1+q_2)}+e^{2q_n},$$

$$V_{D_{n+1}^{(2)}}=V_{A_n}+e^{-q_1}+e^{q_n}\,. \tag{4}$$

Представления Лакса для обобщенных периодических цепочек (3,4) содержат зависимость от спектрального параметра, соответствующие гамильтоновы потоки линеаризуются на многообразиях Якоби алгебраических кривых, ассоциированных со спектром L - матрицы [7,8].

Список (2-4) исчерпывает потенциалы, соответствующие бесконечным сериям алгебр Каца – Муди. Вопрос о существовании других, отличных от (2-4), интегрируемых систем с экспоненциальным взаимодействием типа $V=\sum_{j=1}^{n+1} exp(\sum_{k=1}^{n} N_{jk} q_k)$, был рассмотрен Адлером и Мёрбеке /I0/. Они показали, что в том случае, когда ранг N равен n, свойством Ковалевской – Пенлеве обладают лишь траектории систем (3-4). Случай матриц меньшего ранга не был исследован.

Основная цель данной работы состоит в следующем. Известно /I3-I5/, что вполне интегрируемыми являются также многочастичные системы, в которых структура потенциала взаимодействия определяется системами всех положительных, а не только простых корней алгебр $\mathcal{G}$. Мы покажем, что все вышеперечисленные цепочки Тоды являются частными случаями этих систем, соответствующими некоторым предельным ситуациям. Более того, мы получим, пользуясь этим соответствием, новые интегрируемые цепочки. Это не противоречит результатам /I0/, так как они могут быть интерпретированы как системы с матрицами N_{jk} меньшего, чем число степеней свободы, ранга. Будут получены также цепочки, для которых взаимодействие частиц на концах не является экспоненциальным.

В разделе II мы опишем системы /I3-I5/ и укажем предельные переходы, посредством которых из них получаются цепочки (2-4). В разделе III приведены явные выражения для матриц Лакса новых цепочек, а также неабелевых обобщений некоторых из них. Эти матрицы зависят от спектрального параметра, причем по сравнению с ранее известными цепочками (3-4) матрица L обладает вдвое большим числом полюсов. Указаны также некоторые нерешенные проблемы.

2. Цепочки Тоды – предельные случаи интегрируемых систем с неэкспоненциальным взаимодействием

Мозер /I3/, Ольшанецкий и Переломов /I4/ указали класс интегрируемых гамильтоновых систем типа (I) с потенциалом $\mathcal{U}(q)$, построенным по системам положительных корней $\{\Delta_+\}$ классических алгебр,

$$\mathcal{U}(q)=\sum_{\alpha\in\Delta_+} g_\alpha^2 U(\alpha q). \tag{5}$$

Постоянные g_α могут зависеть от длины корневого вектора, но не от его направления. Системы типа (5) в общем случае описывают движение $2n$ частиц единичной массы, взаимодействующих между собой посредством потенциала $u(\xi)$, и с некоторым внешним полем при симметричных начальных условиях $p_{j+n}=-p_j$, $q_{j+n}=-q_j$, $1\le j\le n$. Дальнейшее обобщение (5) было предложено нами в /I5/, /I9/, где предполагалось,

что вид функции $u(\alpha q)$ может изменяться с изменением длины вектора α.

Таким образом, достаточно рассматривать корневые системы A_n, BC_n, которым соответствуют потенциалы

$$\mathcal{U}(q)=u_1(q)+\varepsilon[u_2(q)+u_3(q)],\quad \varepsilon=0,1, \tag{6}$$

$$u_1(q)=g^2\sum_{j>k}^{n}\mathcal{P}(q_j-q_k),\quad u_2(q)=g^2\sum_{j>k}^{n}\mathcal{P}(q_j+q_k), \tag{7}$$

$$u_3(q)=\sum_{j=1}^{n}\left[g_1^2\mathcal{P}(q_j)+g_2^2\mathcal{P}\left(q_j+\frac{\omega_1}{2}\right)+g_3^2\mathcal{P}\left(q_j+\frac{\omega_2}{2}\right)+g_4^2\mathcal{P}\left(q_j+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right]. \tag{8}$$

Здесь $\mathcal{P}(\xi)$ – двоякопериодическая функция Вейерштрасса,

$$\mathcal{P}(\xi)=\frac{1}{\xi^2}+\sum_{\substack{m_1,m_2\in\mathbb{Z}\\ m_1^2+m_2^2>0}}\left[\frac{1}{(\xi+m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}-\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right].$$

Представление Лакса для систем (6) при $\varepsilon=0$ было найдено Мозером /I3/, в работе /I4/ интегрируемость была установлена в двух случаях: $g_1=g_2=g_3=g_4$ и $g_2=g_3=g_4$, $g_1^2=g_2^2+2g^2\pm 2\sqrt{2}gg_2$, т.е. когда сумма в квадратных скобках в (8) может быть записана в виде $g_1^2\mathcal{P}(q_j)+g_2^2\mathcal{P}(2q_j)$. В /I5/ мы нашли матрицы Лакса для (6-8) для констант $\{g_\gamma\}$, удовлетворяющих одному условию $(\sum_{\gamma=1}^{4} g_\gamma^4-\sum_{\beta\neq\gamma}^{4} g_\beta^2 g_\gamma^2)^2=64\prod_{\gamma=1}^{4} g_\gamma^2$. Наконец, в /I9/ было снято и это ограничение, найденное там представление Лакса справедливо для произвольных значений g, $\{g_\gamma\}$ и содержит спектральный параметр, определенный на комплексном торе – факторе $\mathbb{C}$ по решетке периодов некоторых эллиптических функций Якоби.

Покажем теперь, как из (6-8) могут быть получены потенциалы цепочек Тоды (2-4). Во-первых, отметим, что функция Вейерштрасса вещественна тогда и только тогда, когда один из периодов, например ω_1, является чисто мнимым (в дальнейшем будем полагать $\omega_1=2\pi i$, $i^2=-1$), а другой – вещественным. В вырожденном случае $\omega_2=\infty$ $\mathcal{P}(\xi)$ является тригонометрической функцией, $\mathcal{P}(\xi)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{sh^2\xi/2}\right)$, и потенциалы (7-8) приобретают вид

$$u_1(q)=g^2\sum_{j>k}^{n}\frac{1}{sh^2\left(\frac{q_j-q_k}{2}\right)},\quad u_2(q)=g^2\sum_{j>k}^{n}\frac{1}{sh^2\left(\frac{q_j+q_k}{2}\right)}, \tag{7a}$$

$$u_3(q)=\sum_{j=1}^{n}\left[g_1^2/sh^2\frac{q_j}{2}+g_2^2/sh^2 q_j+g_3^2 ch\, q_j+g_4^2 ch\, 2q_j\right]. \tag{8a}$$

Все постоянные здесь также совершенно произвольны, соответствующее представление Лакса со спектральным параметром было получено уже в /15/. Введем теперь переменные x_j посредством соотношений

$$q_j = x_j + (j-1)\Delta, \quad \Delta>0. \tag{9}$$

Пользуясь произволом в выборе g, $\{g_r\}$, положим $g = g_0\exp(\Delta/2)$ и перейдем в (7а) к пределу $\Delta\to\infty$, подставив в качестве q_j (9). Так как при больших Δ можно произвести разложение $sh^{-2}\left(\frac{q_j-q_k}{2}\right)$,

$$\frac{1}{sh^2\frac{x_j-x_k+\Delta(j-k)}{2}} = e^{-\Delta(j-k)}e^{x_k-x_j} + O\left(e^{-\Delta(j-k)}\right), \; j>k, \tag{10}$$

в потенциале $U_1(q)$ при $\Delta\to\infty$ остаются лишь слагаемые, отвечающие взаимодействию ближайших соседних частиц:

$$\tilde U_1(x) = \lim_{\Delta\to\infty} U_1(q) = g_0 V_{A_n}(x). \tag{11}$$

Таким образом, при $\Delta\to\infty$ мы получили потенциал непериодической цепочки Тоды (2) из потенциала Мозера. Выясним теперь ситуацию с остальными слагаемыми в (7-8а). Легко видеть, что в $U_2(q)$ остается лишь одно слагаемое,

$$\tilde U_2(x) = \lim_{\Delta\to\infty} U_2(q) = g_0 e^{-x_1-x_2}. \tag{12}$$

Подставляя (9) в (8а), заметим, используя (10), что предел при $\Delta\to\infty$ конечен лишь в том случае, когда g_1 и g_2 не зависят от Δ, а g_3 и g_4 экспоненциально убывают, $g_3^2\sim C\exp(-\Delta(n-1))$, $g_4^2\sim D\exp(-2\Delta(n-1))$:

$$\tilde U_3(x) = \lim_{\Delta\to\infty} U_3(q) = g_0\left[\frac{\tilde A}{sh^2\frac{x_1}{2}} + \frac{\tilde B}{sh^2 x_1} + Ce^{x_n} + De^{2x_n}\right].$$

Здесь, как и в (8а), постоянные $\tilde A$, $\tilde B$, C, D произвольны. Мы получили систему с потенциалом

$$V_1(x) = \tilde U_1(x) + \varepsilon[U_2(x)+U_3(x)] = g_0 V_{A_n}(x) + \varepsilon g_0\left[e^{-x_1-x_2} + \frac{\tilde A}{sh^2\frac{x_1}{2}} + \frac{\tilde B}{sh^2 x_1} + Ce^{x_n} + De^{2x_n}\right]. \tag{13}$$

При $\tilde A=\tilde B=0$, $\varepsilon=1$ (13) превращается в потенциал цепочки с экспоненциальными взаимодействиями

$$V_2(x) = g_0\left[V_{A_n}(x) + e^{-x_1-x_2} + Ce^{x_n} + De^{2x_n}\right]. \tag{14}$$

Случаи D_n, $B_n^{(1)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$ в (24) получаются при выборе постоянных в (14) в виде $C=D=0$, $D=0$, $C=0$ соответственно. Конечным сдвигом всех координат всегда можно сделать равной 1 любую из ненулевых постоянных в (14).

Сдвигая всю систему вправо, $x_j\to x_j+\Delta_1$, $\Delta_1>0$, $1\le j\le n$, и производя "перенормировку" постоянных $\tilde A\to Ae^{\Delta_1}$, $\tilde B\to Be^{2\Delta_1}$, $C\to Ce^{-\Delta_1}$, $D\to De^{-2\Delta_1}$, получим из (13) в пределе $\Delta_1\to\infty$ потенциал

$$V_3(x) = g_0\left[V_{A_n}(x) + Ae^{-x_1} + Be^{-2x_1} + Ce^{x_n} + De^{2x_n}\right]. \tag{15}$$

Он описывает движение системы Тоды, крайние частицы которой взаимодействуют с внешним полем, причем потенциалы взаимодействия различны для первой и последней частицы. При обращении в нуль части постоянных в (15) получаем известные цепочки типа (2-4):

$$\begin{array}{llll} V_{B_n}, & C=1,\ A=B=D=0, & V_{A_{2n}^{(2)}}, & C=B=1,\ A=D=0, \\ V_{C_n}, & D=1,\ A=B=C=0, & & \\ V_{C_n^{(1)}}, & B=D=1,\ A=C=0, & V_{D_{n+1}^{(2)}}, & A=C=1,\ B=D=0. \end{array} \tag{16}$$

С помощью конечных сдвигов вида $x_j\to x_j+\delta_1+j\delta_2$ и изменения масштаба времени можно добиться обращения в 1 одной из ненулевых констант в каждой из пар (А,В), (С,Д), так что потенциал (15) фактически содержит лишь две произвольные постоянные.

Таким образом, из тригонометрических вырождений (7-8) мы получили большую часть известных цепочек с экспоненциальным взаимодействием (2-4), а также некоторые новые (13-15). Имеются, однако, два случая: $A_n^{(1)}$ (периодическая цепочка) и $D_n^{(1)}$, которые не могут быть получены из (7а)-8а) никакими предельными переходами. Тем не менее, они также могут быть включены в общий потенциал (7-8). Чтобы показать это, заметим, что предельные переходы от (7-8) к (13-15) проходили в два этапа: сначала мы устремляли к бесконечности вещественный период ω_2 функции Вейерштрасса, а затем производили сдвиги координат частиц без корреляции с ω_2. Положим теперь

$$q_j = x_j + (j-1)\omega_2\tau, \quad 0<\tau<\frac{1}{n-1} \tag{17}$$

и используем для $\wp(\xi)$ представление $(\omega_1=2\pi i)$

$$\wp(\xi) = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{sh^2\left(\frac{\xi-n\omega_2}{2}\right)} + c, \quad c = \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{sh^2\frac{n\omega_2}{2}}. \tag{18}$$

В пределе больших значений аргумента и вещественного периода получим из (18) разложение

$$\mathcal{P}(\xi+\omega_2\delta)=c+\exp\{+\xi(\delta-\tfrac12)|\delta-\tfrac12|^{-1}\}e^{-\omega_2\left(\frac12-|\delta-\frac12|\right)}+O\left(e^{-\omega_2\left(\frac12-|\delta-\frac12|\right)}\right) \tag{19}$$

где $0<\delta<1$, $\delta\neq 1/2$.

Положим в (7) $g^2=e^{\omega_2\tau}$ и вычислим пределы потенциалов $U_1(q)$, $U_2(q)$ с координатами (I7) при $\omega_2\to\infty$. Из (I9) следует, что предел $U_1(q)$ может содержать дополнительное к (II) слагаемое лишь при выборе $\tau=\frac{1}{n}$, когда имеют место разложения

$$\mathcal{P}(q_{j+1}-q_j)\sim c+\exp(x_j-x_{j+1})e^{-\frac{\omega_2}{n}},\ \mathcal{P}(q_n-q_1)\sim c+\exp(x_n-x_1)e^{-\frac{\omega_2}{n}}:$$

$$\lim_{\omega_2\to\infty} U_1(q)=V_{A_n}(x)+e^{x_n-x_1}=V_{A_n^{(1)}}(x). \tag{20}$$

Здесь и в дальнейшем при вычислении пределов мы опускаем постоянную c , которую можно обратить в нуль посредством вычитания несущественной для уравнений движения постоянной $n(n+3)c$ из потенциала (6). Потенциал $U_2(q)$ при $\omega_2\to\infty$ и данном выборе q , τ при $n>2$ расходится, так как среди чисел $k<j\le n$ всегда найдутся такие, для которых $j+k=n+2$, $q_j+q_k=x_j+x_k+\omega_2$ и $\mathcal{P}(q_j+q_k)-c$ остаётся конечной, в то время как g^2 неограниченно возрастает. Следовательно, при $n>2$ следует положить в (6) $\mathcal{E}=0$, и мы получаем периодическую цепочку Тоды. Для $n=2$, $\tau=1/2$ разложение (I9) не имеет места $(\delta=1/2)$, и вместо него следует использовать асимптотические представления

$$\mathcal{P}(\xi)\sim\frac{1}{4\,\mathrm{sh}^2\frac{\xi}{2}},\ \mathcal{P}\left(\xi+\frac{\omega_2}{2}\right)\sim e^{-\frac{\omega_2}{2}}(e^{\xi}+e^{-\xi}),\ \mathcal{P}\left(\xi+\frac{\omega_1}{2}\right)\sim-\frac{1}{4\,\mathrm{ch}^2\frac{\xi}{2}},\ \mathcal{P}\left(\xi+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\sim-e^{-\frac{\omega_2}{2}}\mathrm{ch}\,\xi .$$

При этом получим цепочку с потенциалом

$$V^{(2)}(x)=e^{x_1-x_2}+e^{x_2-x_1}+e^{x_1+x_2}+e^{-(x_1+x_2)}+\frac{A}{\mathrm{sh}^2\frac{x_1}{2}}+\frac{B}{\mathrm{sh}^2x_1}+\frac{C}{\mathrm{sh}^2\frac{x_2}{2}}+\frac{D}{\mathrm{sh}^2x_2}. \tag{21}$$

В случае $n>2$ имеется ещё одна возможность выбора в (I7), не приводящего к расходимостям в $U_2(q)$. Она реализуется при выполнении условия

$$\tau\cdot\min(j+k-2)=1-\tau\cdot\max(j+k-2),\quad n\ge j>k\ge 1. \tag{22}$$

Из (22) следует $\tau=\frac{1}{2(n-1)}$, и при $g^2=e^{\omega_2\tau}$ пределы всех слагаемых в (6), согласно (I9), конечны:

$$\lim_{\omega_2\to\infty} U_3(q)=\frac{\tilde A}{\mathrm{sh}^2\frac{x_1}{2}}+\frac{\tilde B}{\mathrm{sh}^2\frac{x_1}{2}}+\frac{\tilde C}{\mathrm{sh}^2\frac{x_n}{2}}+\frac{\tilde D}{\mathrm{sh}^2\frac{x_n}{2}}, \tag{23}$$

$$\lim_{\omega_2\to\infty} U_1(q)=V_{A_n}(x),\quad \lim_{\omega_2\to\infty} U_2(q)=e^{-(x_1+x_2)}+e^{x_n+x_{n-1}}.$$

Это соответствует цепочке с потенциалом

$$V(x)=V_{A_n}(x)+e^{-x_1-x_2}+e^{x_n+x_{n-1}}+\frac{A}{\mathrm{sh}^2\frac{x_1}{2}}+\frac{B}{\mathrm{sh}^2x_1}+\frac{C}{\mathrm{sh}^2\frac{x_n}{2}}+\frac{D}{\mathrm{sh}^2x_n}. \tag{24}$$

Постоянные A, B, C, D произвольны и связаны линейными соотношениями с постоянными в (23). Легко заметить, что (2I) лишь слагаемым $e^{x_2-x_1}$ отличается от потенциала (24), если формально положить в нём $n=2$. Случай $D_n^{(1)}$ в (3) соответствует обращению в нуль всех четырех произвольных констант в (24) при слагаемых, описывающих неэкспоненциальное взаимодействие первой и последней частицы цепочки с внешними полями.

3. Представления Лакса. Неабелевы цепочки

Выше были рассмотрены предельные переходы, позволяющие получать гамильтонианы цепочек Тоды из (6). Для доказательства интегрируемости новых цепочек необходимо, чтобы существовали соответствующие пределы матриц Лакса, т.е. отсутствовали расходимости в интегралах движения более высоких порядков по импульсам. В случае цепочек (I3-I5) это легко доказывается при использовании представления Лакса /I5/ для тригонометрического вырождения (7-8а) потенциалов (7-8). Для цепочки (24), получаемой непосредственно из (7,8), матрицы Лакса проще построить заново, так как в найденном в /I9/ представлении используются матрицы более высокой размерности, чем в /I4,I5/. Приведем результаты для цепочек (I4,I5,24). Во всех этих случаях матрицы L , M , удовлетворяющие уравнению Лакса $\frac{dL}{dt}=[L,M]$, имеют размерность $2n\times 2n$ и структуру

$$L=\begin{pmatrix} \ell & \psi\\ \psi^* & -\ell\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} m & \chi\\ -\chi^* & m\end{pmatrix}, \tag{25}$$

где ℓ, m, ψ, χ -матрицы $n\times n$, причем ℓ и m одинаковы для почти всех цепочек:

$$\ell_{jk}=\delta_{jk}p_j+i\left[\delta_{j,k-1}e^{\frac{q_j-q_{j+1}}{2}}+\delta_{j-1,k}e^{\frac{q_k-q_{k+1}}{2}}\right],$$

$$m_{jk}=i\left[\delta_{j,k-1}e^{\frac{q_j-q_{j+1}}{2}}-\delta_{j-1,k}e^{\frac{q_k-q_{k+1}}{2}}\right]+\delta_{jk}\mu_j .$$

Матрицы $\psi, \psi^*, \chi, \chi^*$ являются мероморфными функциями спектрального параметра h и имеют следующий вид для цепочек (I4,I5,24) (для простоты полагаем в (I4) $D=1$, в (I5) $B=D=1$):

$$\psi_{jk}=\lambda_{jk}+\sqrt{2}\left(\frac{C h}{h^2-1}+h\delta_{jn}e^{q_n}\right)\delta_{jk}\ ;\ \mu_j=0,$$

$$\psi^*_{jk} = -\lambda_{jk} + \sqrt{2}\left(\frac{-Ch}{h^2-1} + \delta_{jk}\frac{e^{q_n}}{h}\right)\delta_{jk},$$

$$\chi_{jk} = -\frac{1}{2}\lambda_{jk} + \frac{\sqrt{2}}{2} h\,\delta_{jk}\delta_{jn}e^{q_n},\quad \chi^*_{jk} = \frac{\lambda_{jk}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_{jk}\delta_{jn}\frac{e^{q_n}}{h},$$

$$\lambda_{jk} = ie^{-\frac{q_1+q_2}{2}}(\delta_{j1}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{k1}), \qquad \text{(I4a)}$$

$$\psi_{jk} = \sqrt{2}\,\delta_{jk}\left(\frac{h(Ah-C)}{h^2-1} + \delta_{j1}e^{-q_1} + h\delta_{jn}e^{q_n}\right),$$

$$\psi^*_{jk} = \sqrt{2}\,\delta_{jk}\left(\frac{Ch-A}{h^2-1} + \delta_{j1}e^{-q_1} + \frac{\delta_{jn}}{h}e^{q_n}\right),$$

$$\chi_{jk} = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_{jk}\left(-\delta_{j1}e^{-q_1} + h\delta_{jn}e^{q_n}\right),\quad \chi^*_{jk} = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_{jk}\left(-\delta_{j1}e^{-q_1} + \frac{\delta_{jn}}{h}e^{q_n}\right), \qquad \text{(I5a)}$$

$$\mu_j = 0.$$

Для цепочки (24) с четырьмя произвольными константами введем сначала обозначения

$$a = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{4A+B}}{\sqrt{2}},\quad \lambda = \frac{-\sqrt{B} + \sqrt{4A+B}}{\sqrt{2}},$$

$$b = \frac{\sqrt{D} + \sqrt{4C+D}}{2},\quad \tau = \frac{-\sqrt{D} + \sqrt{4C+D}}{\sqrt{2}},$$

$$\rho_{jk} = e^{-\frac{q_1+q_2}{2}}(\delta_{j1}\delta_{k2} + \delta_{j2}\delta_{k1}),\quad \nu_{jk} = e^{\frac{q_{n-1}+q_n}{2}}(\delta_{j,n-1}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{k,n-1}).$$

Матрицы $\psi, \psi^*, \chi, \chi^*, \mu$ с помощью этих обозначений записываются в сравнительно простой форме

$$\psi_{jk} = i\left\{\delta_{jk}\left[\frac{2h(\lambda h-\mu)}{h^2-1} + \left(\lambda(\operatorname{cth} q_1 - 1) + \frac{a}{\operatorname{sh} q_1}\right)\delta_{j1} - \left(\tau(\operatorname{cth} q_n - 1) + \frac{b}{\operatorname{sh} q_n}\right)h\delta_{jn}\right] + \rho_{jk} + h\nu_{jk}\right\},$$

$$\psi^*_{jk} = -i\left\{\delta_{jk}\left[\frac{2(\mu h-\lambda)}{h^2-1} + \left(\lambda(\operatorname{cth} q_1 - 1) + \frac{a}{\operatorname{sh} q_1}\right)\delta_{j1} - \left(\tau(\operatorname{cth} q_n - 1) + \frac{b}{\operatorname{sh} q_n}\right)\frac{\delta_{jn}}{h}\right] + \rho_{jk} + \frac{\nu_{jk}}{h}\right\},$$

$$\chi_{jk} = \frac{i}{2}\left\{\delta_{jk}\left[-\frac{\lambda + a\operatorname{ch} q_1}{\operatorname{sh}^2 q_1}\delta_{j1} + \frac{\tau + b\operatorname{ch} q_n}{\operatorname{sh}^2 q_n}\delta_{jn}h\right] - \rho_{jk} + h\nu_{jk}\right\}, \qquad \text{/24a/}$$

$$\chi^*_{jk} = -\frac{i}{2}\left\{\delta_{jk}\left[-\frac{\lambda + a\operatorname{ch} q_1}{\operatorname{sh}^2 q_1}\delta_{j1} + \frac{\tau + b\operatorname{ch} q_n}{\operatorname{sh}^2 q_n}\delta_{jn}h^{-1}\right] - \rho_{jk} + \frac{\nu_{jk}}{h}\right\},$$

$$\mu_j = -i\left[(\lambda\operatorname{ch} q_1 + a)\operatorname{sh}^{-2} q_1\,\delta_{j1} + (\tau\operatorname{ch} q_n + b)\operatorname{sh}^{-2} q_n\,\delta_{jn}\right].$$

Таким образом, L вида (25) как функция h имеет дополнительные полюса в точках $h = \pm$ I. Это явление характерно для почти всех тригонометрических вырождений потенциала (7,8), в том числе и тех, которые описывают движение систем взаимодействующих частиц типа Сазерленда во внешнем поле с потенциалом $W(\xi) = A\operatorname{ch}(2\xi) + B\operatorname{ch}(\xi+\gamma)$ при $AB \neq 0$ [I6]. Для рациональных вырождений потенциала (7а-8а) L имеет один полюс в точке $h = 0$ и общий с M полюс в бесконечно

удаленной точке. На каждом из $2n$ листов спектральных кривых $\det(L(h) - I\mathfrak{z}) = 0$ собственные векторы L обладают существенными особенностями в полюсах матрицы M, что позволяет построить векторные функции Бейкера – Ахиезера и найти выражения для траекторий частиц в системах (I4,I5,24) в виде комбинаций многомерных тэта-функций. Результаты этих вычислений для гамильтонианов с потенциалами (7а,8а) и всех их вырождений, как тригонометрических, так и рациональных, перечисленных в [I5,I6], будут рассмотрены отдельно.

Всё проведенное выше рассмотрение может быть применено также и к релятивистским аналогам потенциалов (6-8), интегрируемость которых при ε = 0 была установлена Рузенаарсом [20] и при ε = I, n = 2 автором [2I].

Укажем также, что цепочки (I5) имеют неабелевы обобщения: системы нелинейных матричных уравнений для матриц $g_j \in gl(s,\mathbb{R})$, $1 \leq j \leq n$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dg_j}{dt}g_j^{-1}\right) = g_{j-1}g_j^{-1} - g_j g_{j+1}^{-1} + \delta_{j1}(g_1^{-2} + \alpha g_1^{-1}) - \delta_{jn}(g_1^2 + \beta g_n) \qquad (26)$$

допускают представление Лакса со структурой L и M (25), где χ, ℓ, m, ψ – блочные $(ns \times ns)$ -матрицы:

$$\ell_{jk} = \delta_{jk}\frac{dg_j}{dt}g_j^{-1} + \delta_{j,k-1}g_j g_k^{-1} + \delta_{j-1,k},$$

$$m_{jk} = \frac{1}{2}\left(-\delta_{jk}\frac{dg_j}{dt}g_j^{-1} + \delta_{j,k-1}g_j g_k^{-1} - \delta_{j-1,k}\right),$$

$$\psi_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{\sqrt{2}}\left[\frac{2(\alpha h-\beta)h}{h^2-1} + g_1^{-1}\delta_{j1} + hg_n\delta_{jn}\right],$$

$$\psi^*_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{\sqrt{2}}\left[\frac{2(\beta h-\alpha)}{h^2-1} + g_1^{-1}\delta_{j1} + h^{-1}g_n\delta_{jn}\right],$$

$$\chi_{jk} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\delta_{jk}\left[-g_1^{-1}\delta_{j1} + hg_n\delta_{jn}\right],\quad \chi^*_{jk} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\delta_{jk}\left[-g_1^{-1}\delta_{j1} + \frac{g_n}{h}\delta_{jn}\right].$$

Системы (26) являются обобщениями указанных в [I7] неабелевых цепочек, аналогичных абелевым системам типа $C_n^{(1)}$, $D_{n+1}^{(2)}$. Двумерные аналоги, существующие для всех ранее известных цепочек (2-4), отсутствуют для найденных здесь систем (I4,I5), которые не могут быть включены в схему Захарова – Шабата построения двумерных нелинейных эволюционных уравнений.

В заключение следует отметить, что крайне интересной проблемой является теоретико-групповая интерпретация систем (I4,I5,24). Для цепочек (2-4) она была найдена в [6,9,II,I2,I7], где была детально изучена связь матриц Лакса с орбитами коприсоединенного представления алгебр Каца – Муди, и решение уравнений движения сведено к задаче факторизации в соответствующих бесконечномерных группах. Для систем (I4),(I5) с экспоненциальным взаимодействием матрицы Лакса в калибровке $\tilde{L}=\Omega L \Omega^{-1}$, $\tilde{M}=\Omega M \Omega^{-1}$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad E_{jk} = \delta_{jk}, \quad J_{jk} = \delta_{j,n-k+1}$$

также могут быть реализованы в виде орбит алгебр Каца - Муди. В случае (24), однако, необходимо сначала найти алгебраическую интерпретацию потенциалов (7,8), содержащих функцию Вейерштрасса. В данное время такая интерпретация отсутствует даже для простейшего случая $\varepsilon=0$. Решение этой проблемы, возможно, позволило бы найти способы исследования квантовых систем с потенциалами (6-8) и их нетривиальных тригонометрических и рациональных вырождений /I5,I6/.

Литература

I. Toda M. Wave propagation in anharmonic lattices. J. Phys. Soc. Japan, 23, 50I-506 (I967).

2. Flaschka H. On the Toda Lattice. I. Phys. Rev., B9, I924-5 (I974). II. Progr. Theor. Phys. 5I, 703-7I6 (I974).

3. Moser J. Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential - an integrable system. Batelle Recontres - Lecture Notes in Physics, New York : Springer - Verlag 38, 468- 97 (I974).

4. Bogoyavlensky O.I. On perturbation of the periodic Toda lattices. Comm. Math. Phys. 5I, 20I-209 (I976).

5. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Explicit solutions of classical generalized Toda Models. Invent. Math., 54, 26I-9 (I979).

6. Kostant B. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. Adv. Math. 34, I95-338 (I978).

7. Adler M., van Moerbeke P. Completely Integrable systems, euclidean Lie algebras, and curves. Adv. Math. 38, 267-3I7 (I980).

8. Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. Adv. Math. 38, 3I8-79 (I980).

9. Reyman A.G., Semenov - Tian - Schansky M.A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I. Inv. Math. 54, 8I-I00 (I979), II. Inv. Math. 63, 423-32 (I98I).

I0. Adler M., van Moerbeke P. Kowalewski's Asymptotic method, Kac - - Moody Lie algebras and regularization. Comm. Math. Phys. 83, 83-I06 (I982).

II. Goodman R., Wallach N.R. Classical and quantum mechanical systems of Toda lattice type. I. Comm. Math. Phys., 85, 355-86 (I982), II. Solutions of the classical flows. Comm. Math. Phys., 94, I77-2I7 (I984).

I2. Symes W.W. Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory. Invent. Math., 59, I3-52 (I980).

I3. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. Adv. Math. I6, I97-220 (I75).

I4. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Completely integrable systems connected with semisimple Lie algebras. Invent. Math. 37, 93-I08 (I976).

I5. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. Extention of the Class of integrable dynamical systems connect'ed with semisimple Lie algebras. Lett Math. Phys. 9, I3-I8 (I985).

I6. Inozemtsev V.I. On a motion of classical integrable systems of interacting particles in the external field. Phys. Lett., 98A, 3I6-8 (I983); New Completely integrable multiparticle systems. Physica Seripta 29, 5I8-2I (I984).

I7. Reyman A.G. Integrable Hamiltonian systems related to affine Lie algebras. Zapiski LOMI, v. 95, 3-54 (I980) (in Russian).

I8. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M., Reyman A.G., Semenov - Tian - Schansky M.A. Integrable systems II, in Contemporary problems of mathematics, v. I6, 86-226 (I987) (in Russian).

I9. Inozemtsev V.I. Lax Representation with the spectral parameter on a torus for integrable particle systems. JINR preprint P2-88- 219, 1988.

20. Ruijsenaars S.N.M. Complete integrablity of relativistic Calogero - Moser systems and elliptic function identities. Comm. Math. Phys., II0, I9I-2I3 (I987).

2I. Inozemtsev V.I. On relativistic two- particle Ruijsenaars - Schneider systems in an external field, JINR preprint E2-88-218, Dubna, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
I2 апреля I988 года.