объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-219

В.И.Иноземцев

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ НА ТОРЕ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ЧАСТИЦ

Направлено в журнал "Lett.Math.Phys."

1988

В предыдущей работе [1] мы исследовали условия интегрируемости многочастичных динамических систем со структурой гамильтониана, определяемой системами корней классических алгебр Ли:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} + \sum_{\vec{\alpha}\in R_+} V_\alpha(\vec{q}\vec{\alpha}), \tag{I}$$

где $\vec{q}$ - N - мерный вектор, составленный из величин q_j, канонически сопряженных $\{p_j\}$, $\vec{\alpha}\in R_+$ - положительные корневые векторы одной из классических систем $(A_N - D_N)$, V_α - функции, вид которых зависит от длины вектора $\vec{\alpha}$, но не его направления. Впервые системы вида (I) с $V_\alpha \equiv V$ были рассмотрены Ольшанецким и Переломовым [2]. Для систем, содержащих корни различной длины (B_N, C_N), гамильтониан (I) имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2} + \sum_{j>k}^{N}\left[V(q_j - q_k) + V(q_j + q_k)\right] + \sum_{j=1}^{N} W(q_j) \tag{2}$$

и описывает движение $2N$ частиц, взаимодействующих между собой с потенциалом $V(\xi)$, находящихся во внешнем поле $W(\xi)$ при начальных условиях $q_{j+N} = -q_j$, $p_{j+N} = -p_j$ (симметричные конфигурации). Мы нашли представления Лакса для уравнений движения, соответствующих (2), в следующих случаях:

$$W(\xi) = \frac{g^2}{sh^2\xi}, \quad W(\xi) = g_1^2\left(sh^{-2}a\xi\right) + g_2^2\, sh^{-2}2a\xi + g_3^2\, ch\,2a\xi + g_4^2\, ch\,4a\xi, \tag{3}$$

где g_α, $1 \le \alpha \le 4$, совершенно произвольны, и

$$V(\xi) = g^2\wp(\xi), \quad W(\xi) = g_1^2\wp(\xi) + g_2^2\wp\left(\xi + \frac{\omega_1}{2}\right) + g_3^2\wp\left(\xi + \frac{\omega_2}{2}\right) + g_4^2\wp\left(\xi + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \tag{4}$$

$\wp(\xi)$ - функция Вейерштрасса с периодами ω_1, ω_2, константы g_α удовлетворяют одному или двум нелинейным уравнениям, определяющим трехмерную либо двумерные гиперповерхности в 4-мерном пространстве $\{g_\alpha\}$. В этом случае найденные в (I) матрицы Лакса не содержат зависимости от спектрального параметра, который легко вводится для (3).

В данной работе мы предъявим (L, M) -пару для гамильтониана (2,4), которая позволяет снять указанные выше ограничения на постоянные $\{g_\alpha\}$ и, более того, зависит от спектрального параметра. Гамильтониан с потенциалами (4), зависящий от 7 произвольных постоянных, является наиболее общим среди семейства со структурой (I).

Отправной точкой нашего рассмотрения послужит выбор $(3N\times 3N)$ матриц L, M в форме, напоминающей использованную в /I/:

$$L=\begin{pmatrix} \ell & \lambda & \psi \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ -\psi & -\lambda & -\ell \end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} m & \omega & s \\ -\omega & \mu & -\omega \\ s & \omega & m \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$\ell,\psi,s,m,\lambda,\omega,\mu$ – матрицы размером $N\times N$.

Ранг L равен $2N$, так как её собственные векторы, соответствующие нулевому собственному значению, образуют линейное пространство размерности N. Первые и последние N координат этих векторов совпадают и произвольны, $y_j=y_{2N+j}$, остальные вычисляются по формуле $y_{j+N}=-\{\lambda^{-1}(\ell+\psi)\}_{jk}y_k$, $1\le j,k\le N$.

Матрицы ℓ, ψ, s, m имеют почти ту же структуру, что и в /I/:

$$\ell_{jk}=p_j\delta_{jk}+i(1-\delta_{jk})g\,x(q_j-q_k),\quad \psi_{jk}=i[\delta_{jk}v(q_j)+(1-\delta_{jk})g\,x(q_j+q_k)],$$
$$m_{jk}=i\{\delta_{jk}(\tau(q_j)-\sum_{n\ne j}(z(q_j-q_n)+z(q_j+q_n)))+(1-\delta_{jk})g\,x'(q_j-q_k)\}, \tag{6}$$
$$s_{jk}=i[\delta_{jk}\frac{v'(q_j)}{2}+(1-\delta_{jk})g\,x'(q_j+q_k)].$$

Главное отличие от использованного в (I) анзаца состоит в структуре матриц λ, ω, μ, которые здесь имеют размеры $N\times N$. Первые две из них выберем диагональными:

$$\lambda_{jk}=\lambda(q_j)\delta_{jk},\quad \omega_{jk}=\lambda'(q_j)\delta_{jk}. \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает дифференцирование функции по её аргументу. Уравнение Лакса $\frac{dL}{dt}=[L,M]$ при подстановке в него (5-7) распадается на четыре уравнения для производных ℓ, λ, ψ:

$$\frac{d\ell}{dt}=[\ell,m]+\{s,\psi\}-\{\lambda,\omega\},$$
$$\frac{d\psi}{dt}=[\psi,m]+\{\ell,s\}, \tag{8}$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=(\ell+\psi)\omega+\lambda\mu-(m-s)\lambda=\lambda(m-s)-\mu\lambda+\omega(\ell-\psi). \tag{9}$$

Поскольку гамильтониан (2) связан с L соотношением $H=\frac{1}{4}Tr\,L^2$, для функций $V(\xi)$, $W(\xi)$ получим равенства

$$V(\xi)=x^2(\xi),\quad W(\xi)=\frac{v^2}{2}(\xi)+\lambda^2(\xi). \tag{10}$$

При этом уравнения (8) имеют те же решения, что были найдены нами в /I/:

$$x(\xi)=\frac{a}{sn\,a\xi},\quad z(\xi)=-\frac{ga^2}{sn^2a\xi},\quad \tau(\xi)=\frac{a\,v(\xi)}{sn\,2a\xi},$$
$$v(\xi)=a(\alpha+\beta\,sn^2a\xi+\gamma\,sn^4a\xi)(sn\,a\xi\,cn\,a\xi\,dn\,a\xi)^{-1}, \tag{11}$$

постоянные a, α, β, γ и модуль эллиптических функций в (11) совершенно произвольны. Рассмотрим теперь уравнения (9). Равенство диагональных компонент матриц в (9) позволяет выразить μ_{jj} через x, z, v, τ, λ:

$$\mu_{jj}=i\{\tau(q_j)-\sum_{n\ne j}(z(q_j-q_n)+z(q_j+q_n))-\frac{v'(q_j)}{2}-v(q_j)\frac{\lambda'(q_j)}{\lambda(q_j)}\}. \tag{12}$$

Недиагональные компоненты (9) дают два уравнения для μ_{jk}:

$$\mu_{jk}=[(m_{jk}-s_{jk})\lambda(q_k)-(\ell_{jk}+\psi_{jk})\lambda'(q_k)][\lambda(q_j)]^{-1}=$$
$$=[(m_{jk}-s_{jk})\lambda(q_j)-(\ell_{jk}-\psi_{jk})\lambda'(q_j)][\lambda(q_k)]^{-1}. \tag{13}$$

Условие совместности представляет собой функциональное уравнение для определения λ. Обозначив $\lambda^2(\xi)=\chi(\xi)$, запишем его в виде

$$x(\xi-\eta)[\chi'(\xi)+\chi'(\eta)]+x(\xi+\eta)[\chi'(\eta)-\chi'(\xi)]+2[x'(\xi-\eta)-x'(\xi+\eta)][\chi(\xi)-\chi(\eta)]=0$$

или, после подстановки $x(\xi\pm\eta)$ из (11),

$$\chi'(\xi)[sn\,a(\xi+\eta)-sn\,a(\xi-\eta)]+\chi'(\eta)[sn\,a(\xi+\eta)+sn\,a(\xi-\eta)]=2a[\chi(\xi)-\chi(\eta)]\times$$

$$\times[sn\,a(\xi+\eta)\,sn\,a(\xi-\eta)]^{-1}[cn\,a(\xi-\eta)dn\,a(\xi-\eta)sn^2a(\xi+\eta)-cn\,a(\xi+\eta)dn\,a(\xi+\eta)sn^2a(\xi-\eta)]. \tag{14}$$

При использовании формулы сложения для функций Якоби после несложных, но очень длинных вычислений (14) приводится к форме

$$\mathcal{X}'(\xi)\frac{\mathrm{cn}\,a\xi\,\mathrm{dn}\,a\xi}{\mathrm{sn}\,a\xi}+\mathcal{X}'(\eta)\frac{\mathrm{cn}\,a\eta\,\mathrm{dn}\,a\eta}{\mathrm{sn}\,a\eta}=\frac{2a(\mathcal{X}(\xi)-\mathcal{X}(\eta))}{\mathrm{sn}^2 a\xi-\mathrm{sn}^2 a\eta}(\mathrm{cn}^2 a\xi\,\mathrm{dn}^2 a\eta+\mathrm{cn}^2 a\eta\,\mathrm{dn}^2 a\xi). \qquad (15)$$

Найдем общее решение (I5). Правая часть этого уравнения не может иметь полюса для всех ξ при $\eta\to 0$. Следовательно, $\mathcal{X}(\eta)\sim\delta_0+\frac{\delta a^2}{2}\eta^2$ для малых η, и в пределе $\eta\to 0$ получим из (I5)

$$\mathcal{X}'(\xi)\frac{\mathrm{cn}\,a\xi\,\mathrm{dn}\,a\xi}{\mathrm{sn}\,a\xi}+a\delta=\frac{2a(\mathcal{X}(\xi)-\delta_0)}{\mathrm{sn}^2 a\xi}(\mathrm{cn}^2 a\xi+\mathrm{dn}^2 a\xi),$$

т.е. линейное уравнение первого порядка с решением

$$\mathcal{X}(\xi)=\delta_0+\frac{\delta}{2}\frac{\mathrm{sn}^2 a\xi}{\mathrm{cn}^2 a\xi\,\mathrm{dn}^2 a\xi}+\delta_1\frac{\mathrm{sn}^4 a\xi}{\mathrm{cn}^2 a\xi\,\mathrm{dn}^2 a\xi}, \qquad (16)$$

δ_1 – постоянная интегрирования. Непосредственной подстановкой в (I5) можно убедиться, что никаких дополнительных ограничений на постоянные δ_0, δ_1, δ не возникает и (I6) является искомым общим решением функционального уравнения. Так как согласно (I0) δ_0 дает лишь несущественную аддитивную добавку к потенциалу $W(\xi)$, эту постоянную можно выбрать таким образом, чтобы $\mathcal{X}(\xi)$ имела вид $a^2(\alpha_1^2\mathrm{cn}^4 a\xi+2\alpha_1\alpha_2\mathrm{cn}^2 a\xi\,\mathrm{dn}^2 a\xi+\alpha_2^2\mathrm{dn}^4 a\xi)(\mathrm{cn}\,a\xi\,\mathrm{dn}\,a\xi)^{-2}$, или

$$\lambda(\xi)=a\frac{\alpha_1\mathrm{cn}^2 a\xi+\alpha_2\mathrm{dn}^2 a\xi}{\mathrm{cn}\,a\xi\,\mathrm{dn}\,a\xi}. \qquad (17)$$

Возвращаясь к (I0), мы видим, что теперь имеется достаточное количество параметров, чтобы обеспечить отсутствие каких-либо ограничений на постоянные g_1, g_2, g_3, g_4 в (4). Более того, их число на единицу превышает число $\{g_\alpha\}$, так что некоторая комбинация $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\alpha_2$ может быть использована в качестве спектрального параметра.

Приведем сначала (I0) с функциями ν,λ (11), (17) к виду (4), т.е. выразим входящие в (I0) квадраты функций Якоби через функцию Вейерштрасса. Это легко сделать с помощью соотношений

$$\wp(\xi)=\frac{a^2}{\mathrm{sn}^2 a\xi}+C_0,\quad \wp\left(\xi+\frac{\omega_1}{2}\right)=\frac{a^2\mathrm{dn}^2 a\xi}{\mathrm{cn}^2 a\xi}+C_0,\quad \wp\left(\xi+\frac{\omega_2}{2}\right)=-a^2\mathrm{dn}^2 a\xi+C_0+a^2,$$
$$\wp\left(\xi+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=\varkappa^2 a^2\frac{\mathrm{cn}^2 a\xi}{\mathrm{dn}^2 a\xi}+C_0, \qquad (18)$$

где κ – модуль функций Якоби, $C_0=-a^2\frac{(1+\kappa^2)}{3}$, периоды ω_1, ω_2 функции $\wp(\xi)$ будут использоваться в дальнейшем в качестве независимых параметров вместо a и κ.

Пользуясь произволом в выборе $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\alpha_2$, запишем функции $\lambda(\xi)$, $\nu(\xi)$ в виде

$$\lambda(\xi)=a\frac{\tilde\alpha_1\kappa\,\mathrm{cn}^2 a\xi+\tilde\alpha_2\mathrm{dn}^2 a\xi}{\mathrm{cn}\,a\xi\,\mathrm{dn}\,a\xi},\quad \nu(\xi)=a\sqrt{2}\,\frac{\tilde\alpha\,\mathrm{cn}^2 a\xi\,\mathrm{dn}^2 a\xi+\tilde\beta\,\mathrm{dn}^2 a\xi-\tilde\gamma\kappa^2\mathrm{cn}^2 a\xi\,\mathrm{sn}^2 a\xi}{\mathrm{sn}\,a\xi\,\mathrm{cn}\,a\xi\,\mathrm{dn}\,a\xi}. \qquad (19)$$

Это позволяет найти простую связь между постоянными g_1,g_2,g_3,g_4 в (4) и параметрами, входящими в матрицы Лакса. Действительно, подстановка (I9) в (I0) и использование соотношений (I8) дают при сравнении (I0) и (4) следующую систему уравнений, квадратичных относительно $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma,\alpha_1,\alpha_2$:

$$(\tilde\alpha+\tilde\beta)^2=g_1^2,\quad(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^2=g_3^2,\quad\tilde\beta^2+\tilde\alpha_2^2=g_2^2,\quad\tilde\gamma^2+\tilde\alpha_1^2=g_4^2. \qquad (20)$$

Из (20) сразу следуют выражения для $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma$ через $\{g_\alpha\},\tilde\alpha_1,\tilde\alpha_2$:

$$\tilde\alpha=\frac{1}{2}(g_1+g_3)-\frac{1}{2}(g_1-g_3)^{-1}[\tilde\alpha_1^2-\tilde\alpha_2^2+g_2^2-g_4^2],$$
$$\tilde\beta=\frac{1}{2}(g_1-g_3)+\frac{1}{2}(g_1-g_3)^{-1}[\tilde\alpha_1^2-\tilde\alpha_2^2+g_2^2-g_4^2], \qquad (21)$$
$$\tilde\gamma=-\frac{1}{2}(g_1-g_3)+\frac{1}{2}(g_1-g_3)^{-1}[\tilde\alpha_1^2-\tilde\alpha_2^2+g_2^2-g_4^2],$$

причем $\tilde\alpha_1$, $\tilde\alpha_2$ связаны соотношением

$$(\tilde\alpha_1^2-\tilde\alpha_2^2)^2+2A\tilde\alpha_1^2+2B\tilde\alpha_2^2+C=0, \qquad (22)$$

$$A=g_2^2-g_4^2+(g_1-g_3)^2,\quad B=-g_2^2+g_4^2+(g_1-g_3)^2,$$
$$C=(g_2^2-g_4^2)^2-2(g_2^2+g_4^2)(g_1-g_3)^2+(g_1-g_3)^4. \qquad (23)$$

Уравнение (22) определяет алгебраическую кривую четвёртого порядка. Легко убедиться в том, что её род равен I и, следовательно, возможна её эллиптическая униформизация. Для нахождения явного вида осуществляющих эту униформизацию функций произведем в (22) подстановку:

$$\tilde\alpha_1=\frac{\delta\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi}{1-\varkappa^2\mathrm{sn}^2 h\,\mathrm{sn}^2\varphi},\quad \tilde\alpha_2=\frac{\delta\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h\,\mathrm{sn}\,\varphi}{1-\varkappa^2\mathrm{sn}^2 h\,\mathrm{sn}^2\varphi}, \qquad (24)$$

где $\varkappa$ – модуль входящих в (24) эллиптических функций. Можно показать после довольно длинных вычислений, что (22) выполняется для произвольных значений h, если $\delta, \varkappa, \varphi$ связаны с постоянными A, B, C (23) следующими соотношениями:

$$sn^2\varphi = -(A+B)^{-1}\left[-B+\sqrt{B^2-C}\right]\left[1+\frac{AB}{C}-\left(1-\frac{A^2}{C}\right)^{1/2}\left(1-\frac{B^2}{C}\right)^{1/2}\right], \quad (25а)$$

$$\delta = \frac{\left(-B+\sqrt{B^2-C}\right)^{1/2}}{sn\,\varphi}, \quad \varkappa = -\frac{B+\sqrt{B^2-C}}{C^{1/2}\,sn^2\varphi}. \quad (25б)$$

Таким образом, формулы (24,25а–б) дают явную униформизацию кривой (20) и h является спектральным параметром. Зависимость матриц Лакса от h определяется формулами (6), (7), (I2)–(I3), (I9),(2I),(24). Область изменения h представляет собой комплексный тор $\mathbb{C}/\Gamma$, получаемый факторизацией плоскости $\mathbb{C}$ по решетке периодов Γ функции $sn\,h$ с модулем (25б). Отметим, что для тригонометрического вырождения (3) потенциалов (4) матрицы Лакса имеют размерность $(2N\times 2N)$ /I/ и их зависимость от спектрального параметра рациональна – L и M являются мероморфными функциями с полюсами в четырех точках плоскости $\mathbb{C}$, $h = 0, \pm I, \infty$. В рассматриваемом здесь эллиптическом случае полюса L и M как функции h находятся в точках $sn\,h = \pm(\varkappa\, sn\,\varphi)^{-1}$ и в точках полюсов $sn\,h$, принадлежащих $\mathbb{C}/\Gamma$.

Спектральное уравнение $\det|L(h) - wE| = 0$ (E – единичная $3N\times 3N$ – матрица) определяет кривую $w(h)$, накрывающую $\mathbb{C}/\Gamma$. Число листов этого накрытия совпадает с рангом L и равно $2N$. Несомненный интерес представляет рассмотрение вопроса о возможности линеаризации гамильтонова потока (2,4) на многообразии Якоби кривой $w(h)$. Исследование тригонометрических вырождений (4) показывает, что такая линеаризация весьма вероятна. В частности, интегрирование уравнений движения систем с гамильтонианом (3) и его дальнейшими вырождениями (рациональным и некоторыми другими /3,8/) может быть выполнено при использовании алгебро-геометрических методов, развитых в /4,5/. Эти результаты будут опубликованы в отдельных статьях. В заключение отметим также, что рассмотрение, подобное проведенному выше, было бы весьма интересно провести и для недавно найденных "релятивистских" обобщений интегрируемых систем взаимодействующих частиц /6/. Потенциал взаимодействия, найденный в /6/, определяется системой корней алгебры A_N, и вполне возможно, что свойство интегрируемости сохраняется при построении "релятивистского" гамильтониана по корневым системам других классических алгебр Ли.

Интегрируемость систем этого типа с двумя степенями свободы доказана мной в работе /7/ методом прямого построения дополнительного интеграла движения без использования представления Лакса.

Литература

I. Inozemtsev V.I., Mescheryakov D.V. Lett. Math. Phys., 9, I3, I985 .
2. Olshanetsky M.L., Perelomov A.M. Invent. Math., 37, 93, I976 .
3. Inozemtsev V.I. Phys. Lett., 98A, 3I6, I983 .
4. Dubrovin B.A. Funct. Anal and Appl., II, No 4, p. 28, I977 .
5. Krichever I.M. Funct. Anal. and Appl., No 4, p. 45, I980 .
6. Ruijsennaars S.N.M. Comm. Math. Phys., IIO, I9I, I987 .
7. Inozemtsev V.I. JINR preprint E2-88-218, Dubna, 1988.
8. Inozemtsev V.I. Physica Scripta, I987, 29, p. 5I8.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I марта 1988 года.