сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-187

В.М.Лебеденко

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ ПРЯМЫХ СУММ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР И ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

1988

В настоящей работе изучаются условия, которым должны удовлетворять компоненты элементов данного подмножества $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ некоторой линейной алгебры G, относительно ее разложения в прямую сумму нескольких идеалов, для того, чтобы оно порождало G.

Параллельно рассматривается аналогичный вопрос для случая групп (их мы записываем аддитивно). Очевидно, что решение этой проблемы сводится к случаю двух прямых слагаемых.

Сначала рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть алгебра Ли $G = A \oplus B$ является прямой суммой разрешимой ступени 2 алгебры $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ (A — порождается элементами $a_1,\ldots,a_n$) и простой алгебры $B = \langle b_1,\ldots, b_n \rangle$. Тогда элементы $g_i = a_i + b_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ порождают алгебру G. Действительно, так как второй коммутант $B^{(2)} = B$, то B порождается всевозможными одночленами вида

$$\phi(b_1, \ldots, b_n) = [[\psi_1, \psi_2], [\psi_3, \psi_4]],$$

где $\psi_i = \psi_i(b_1, \ldots, b_2)$ — одночлены $(i = 1,\ldots,n)$. В то же время $\phi(a_1, \ldots a_n) = 0$ и $\phi(g_1, \ldots, g_n) = \phi(b_1,\ldots,b_n)$. Поэтому $\langle g_1,\ldots,g_n \rangle \supseteq B$, а следовательно, и $A \subset \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

Пример 2. Рассмотрим алгебру Ли $L = L_1 \oplus L_2$, где оба прямых слагаемых изоморфны комплексной оболочке алгебры Ли группы $SO(3)$ (см. [4]). В каждой из указанных компонент можно выбрать такие базисы x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2)$, что

$$[x_k, y_k] = z_k,\ [y_k, z_k] = x_k,\ [z_k, x_k] = y_k \quad (k = 1, 2).$$

Непосредственно проверяется, что алгебра L порождается своими двумя элементами $2x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$.

Приведем описание всех систем образующих алгебры L, состоящих из двух элементов (обоснования даны в работе [4]).

Рассмотрим следующее свойство элементов $a, b \in L$: если $[a,b] = c$, то

$$[b, c] = a \quad \text{и} \quad [c, a] = b. \tag{*}$$

Пусть теперь $g_1 = a_1 + b_1$, $g_2 = a_2 + b_2$, $a_1, a_2 \in L_1$, $b_1, b_2 \in L_2$. Элементы g_1 и g_2 порождают L — тогда и только тогда, когда (с точностью до невырожденного линейного преобразования g_1 и g_2) пара b_1, b_2 обладает свойством (*), а пара a_1, a_2 не обладает этим свойством.

Переходя к общему случаю, отметим, что под алгебрами мы будем понимать произвольные линейные алгебры (в частности, алгебры Ли и супералгебры Ли).

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть алгебра (группа) G разлагается в прямую сумму своих идеалов (подгрупп) A и B, $[a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ — система образующих A, $[b_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ — система образующих слагаемого B. Подмножество $[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ $(g_\lambda = a_\lambda + b_\lambda,\ \lambda \in \Lambda)$ порождает G тогда и только тогда, когда не существует такого гомоморфизма

$$\phi: A \to B/J \neq 0, \tag{*}$$

при котором $a_\lambda \phi = \bar{b}_\lambda$ $(\bar{b}_\lambda = b_\lambda + J$ для всех $\lambda \in \Lambda)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что пересечение

$$H = \langle [g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \rangle \cap B$$

состоит из всех элементов B, представимых хотя бы одним способом, в виде таких комбинаций $\psi(\ldots b_\lambda \ldots)$, что $\psi(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$.

Допустим, что $G = \langle [g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \rangle$ и что при этом существует гомоморфизм ϕ типа (*). Тогда, учитывая предыдущее замечание, мы приходим к противоречию, так как если $\psi(\ldots b_\lambda \ldots) \in H$, то $\psi(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$ и

$$(\psi(\ldots a_\lambda \ldots))\phi = \psi(\ldots \bar{b}_\lambda \ldots) = \bar{0} \in B/J.$$

То есть $\psi(\ldots b_\lambda \ldots) \in J$, и, следовательно, $H \subseteq J \neq B$.

Переходя ко второй части доказательства, покажем, что H — идеал (нормальный делитель) B. Пусть $b \in H$. Тогда $b = \psi(\ldots b_\lambda \ldots)$ и $\psi(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$. Если $b' \in B$, $b' = \psi'(\ldots b \ldots)$, то $b'b = \psi'(\ldots b_\lambda \ldots)\psi(\ldots b_\lambda \ldots)$ $\psi'(\ldots a_\lambda \ldots)\psi(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$. Следовательно, $b'b \in H$. Теперь ясно, что и $bb' \in H$ (для случая групп выкладки аналогичны).

Предположим теперь, что для G не существует гомоморфизма типа (*). Тогда $H = B$ и $G = \langle [g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \rangle$. Иначе можно было бы определить гомоморфизм $\phi: A \to B/H$ следующим образом: если $A = \psi(\ldots a_\lambda \ldots)$, то $(\psi(\ldots a_\lambda \ldots))\phi = (\ldots \bar{b}_\lambda \ldots) \in B/H$ $(\bar{b}_\lambda = b_\lambda + H)$. Достаточно проверить только однозначность этого отображения. Если $\psi_1(\ldots a_\lambda \ldots) = \psi_2(\ldots a_\lambda \ldots)$, то $\psi_1(\ldots a_\lambda \ldots) - \psi_2(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$, и, следовательно, $\psi_1(\ldots b_\lambda \ldots) - \psi_2(\ldots b_\lambda \ldots) \in H$. Поэтому $\psi_1(\ldots \bar{b}_\lambda \ldots) = \psi_2(\ldots \bar{b}_\lambda \ldots)$. Утверждение доказано. Из него вытекает

Предложение 2. Если прямые слагаемые A и B алгебры (группы) $G = A \oplus B$ не имеют изоморфных фактор-алгебр (фактор-групп), то для любых их систем образующих $[a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ и $[b_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ (соответственно) множество $[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$, $g = a + b$ $(\lambda \in \Lambda)$ порождает G.

В качестве иллюстрации приведем ряд примеров таких пар алгебр (групп) A и B:

1). $A = A^{(1)}$, B — разрешима ($A^{(1)}$ — первый коммутант);

2). A и B — просты и неизоморфны;

3). A — делимая абелева группа, B — периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены в совокупности;

4). A — p-примарная, B — q-примарная группа и $p \neq q$;

5). A — простая алгебра и $\dim A > \dim B$.

Отметим, что случай, когда A и B имеют изоморфные фактор-алгебры (фактор-группы), до конца пока не ясен. Приведем два примера:

а) если N_1 и N_2 — две нильпотентные алгебры Ли и $\dim(N_1/N_1^2) = \dim(N_2/N_2^2)$, то обе алгебры обладают n-образующими, а их прямая сумма нет (см. /2,3/);

б) пусть группа $G = A \oplus B$, где A и B — две абелевы изоморфные группы типа $C(p^\infty)$,

$$A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle, \quad B = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \rangle$$

$$a_1 = pa_2,\ a_2 = pa_3, \ldots;\quad b_1 = pb_2,\ b_2 = pb_3, \ldots.$$

Тогда система $[a_n + b_n 2]_{n=1}^{\infty}$ порождает G.

Однако есть еще один случай такого рода, когда можно дать определенный ответ на поставленный вопрос.

Предложение 3. Пусть алгебра (группа) G является прямой суммой двух идеалов (подгрупп) A и B, которые являются изоморфными простыми алгебрами (группами) и

$$A = \langle [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \rangle, \quad B = \langle [b_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \rangle.$$

Множество $[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$, где $g_\lambda = a_\lambda + b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ является системой образующих G тогда и только тогда, когда есть такая комбинация $\psi(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$, что $\psi(\ldots b_\lambda \ldots) \neq 0$ (ср. пример 2).

Доказательство. Если $\psi(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$ и $\psi(\ldots b_\lambda \ldots) \neq 0$, то $H \neq 0$ (см. доказательство предложения 1). Но так как H — идеал B, а B — проста, то $H = B$. То есть $\langle [g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \rangle \geq B$, $\langle [g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \rangle \supseteq B$. Поэтому система $[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ порождает G.

Пусть теперь, наоборот, из любого соотношения $\psi(\ldots a_\lambda \ldots) = 0$ следует, что $\psi(\ldots b_\lambda \ldots) = 0$. Тогда отображение $\phi: a_\lambda \to b_\lambda$ индуцирует гомоморфизм A на B. Поэтому, в силу предложения 1, $<[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}> \neq G$.

Отметим, что наши построения справедливы для систем образующих групп произвольной мощности и линейных алгебр (в частности, алгебр Ли и супералгебр Ли) произвольной размерности, а также для колец и ряда других алгебраических систем.

Рассматриваемые системы образующих могут быть как бесконечными, так и конечными. В частности, для супералгебры Ли с нетривиальным строением такая система может состоять из одного элемента (см. /5/).

Ряд вопросов, примыкающих к нашим рассмотрениям, приводится в приложениях.

Приложения

1. Пусть алгебры (группы) $A = <[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}>$, $B = <[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}>$ и множество A_1 — состоит из всех элементов A, представимых в виде $\psi_1(\dots a_\lambda \dots)$, где $\psi_1(\dots b_\lambda \dots) = 0$, а множество B_1 — из всех элементов B, представимых в виде $\psi_1(\dots b_\lambda \dots)$, где $\psi_2(\dots a_\lambda \dots) = 0$. Тогда A_1 — идеал (нормальный делитель) A, B_1 — идеал (нормальный делитель) B и A/A_1 B/B (отсюда легко узнать, чему равно ядро гомоморфизма ϕ типа ($\overset{*}{*}$) из доказательства предложения 1).

2. Из предыдущих результатов вытекает, что если группа (алгебра) $G = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$ — прямая сумма попарно неизоморфных простых групп (алгебр) и $A_i = <[a_{i\lambda}]_{\lambda\in\Lambda}>$, то при $g_\lambda = a_{1\lambda} + a_{2\lambda} + \dots + a_{n\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$ группа (алгебра) $G = <[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}>$.

3. Если представление $T(g)$ группы (алгебры) G в пространстве $V = V_1 \oplus V_2$ распадается, соответственно, в прямую сумму $T(g) = T_1(g) + T_2(g)$, то множество всех элементов $T(g)$, $g \in G$ образует группу, изоморфную $G/\ker T$, и ее пересечения с подгруппами (подалгебрами), соответствующими V_1 и V_2, тривиальны.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А.П.Мишиной и А.Ю.Ольшанскому за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.*
2. *Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.*
3. *Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.*
4. *Лебеденко В.М. Сообщения ОИЯИ Р5-83-331, Дубна, 1983.*
5. *Лебеденко В.М. Препринт ОИЯИ Р5-87-462, Дубна, 1987.*

Рукопись поступила в издательский отдел
21 марта 1988 года.

Лебеденко В.М. **Р5-88-187**
О системах образующих прямых сумм линейных алгебр и прямых произведений групп

Найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять компоненты элементов заданного подмножества M некоторой линейной алгебры G (в частности, алгебры Ли или супералгебры) относительно ее разложения в прямую сумму нескольких идеалов, для того, чтобы оно порождало алгебру G. Аналогичный вопрос рассмотрен и для случая групп. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрен ряд характерных примеров.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Lebedenko V.M. **P5-88-187**
About Generating Systems of Direct Sums of Linear Algebras and Direct Products of Groups

Necessary and sufficient conditions which should satisfy the components of elements of a given subset M of a linear algebra G (in particular, of Lie algebra or superalgebra) with respect to its direct expansion of some ideals to generate algebra G. Analogous problem is considered for the case of groups too. A number of characteristic examples is considered to illustrate the obtained results.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988