объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

П 141

Р5-88-169

Ч.Д.Палев

СУЩЕСТВЕННО ТИПИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ gl(n,m) В БАЗИСЕ ГЕЛЬФАНДА – ЦЕТЛИНА

Направлено в журнал
"Функциональный анализ и его приложения"

1988

В настоящей заметке рассмотрен класс конечномерных неприводимых модулей супералгебры Ли $gl(n,m)$ $\forall$ $n, m=1, 2, \ldots$ В каждом модуле вводится базис, аналогичный базису Гельфанда-Цетлина [1] для $gl(n)$. Алгебра $gl(n,m)$ состоит из всевозможных $n+m \equiv r$-мерных квадратных матриц. Как и в [2] в качестве базиса в алгебре выбираем вейлевские матрицы e_{ij}, $i, j=1, \ldots, r$, причем e_{ij} есть четный генератор, только если $i, j \le n$ или $i, j > n$. Пусть $W(n,p)$ есть $gl(n,p)$-модуль.

<u>Определение</u>. Будем говорить, что типичный [3] $sl(n,m)$-модуль $W(n,m)$ существенно типичен, если не существует флага подмодулей $W(n,m) \supset W(n,m-1) \supset \ldots \supset W(n,p) \supset \ldots \supset W(n,1)$, в котором хотя бы один $gl(n,p)$-подмодуль $W(n,p)$ неразложим.

Пусть $e_{11}, \ldots, e_{rr}$ - базис в подалгебре Картана H, а $e^{1}, \ldots, e^{r}$ - сопряженный к нему базис дуального пространства H^{*}. Обозначим через $W([m]_{r})$ неприводимый конечномерный $gl(n,m)$-модуль со старшим весом $\Lambda = m_{1r} e^{1} + m_{2r} e^{2} + \ldots + m_{rr} e^{r} \equiv [m]_{r}$ и пусть $l_{ir} = m_{ir} - i + n + 1$ $\forall$ $i = 1, \ldots, n$, а для $j = n+1, \ldots, r$ $l_{jr} = -m_{jr} + i - n$.

<u>Лемма</u>. Модули $W([m]_{r})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством всевозможных комплексных координат старшего веса, удовлетворяющих условиям $m_{ir} - m_{i+1,r} \in \mathbb{Z}_{+}$ $\forall$ $i \ne n = 1, \ldots, r-1$. Модуль типичен тогда и только тогда, когда все числа $l_{1r}, \ldots, l_{rr}$ разные.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
БИБЛИОТЕКА

<u>Предложение</u>. Модуль $W([m]_r)$ существенно типичен тогда и только тогда, когда $l_{kr} \notin (l_{n+1,r}, l_{n+1,r}+1, l_{n+1,r}+2, \ldots, l_{rr})$ для всякого $k=1,\ldots,n$.

Пусть (m) есть схема, которая состоит из $r(r+1)/2$ комплексных чисел m_{ij}, $i \le j = 1,\ldots,r$, упорядоченных, как в обычном базисе Гельфанда-Цетлина, для $gl(r)$ [1], и пусть $\Gamma([m]_r)$- множество всевозможных (m), чьи числа удовлетворяют условиям: (1) у всех схем из $\Gamma([m]_r)$ числа $m_{1r},\ldots,m_{rr}$ одинаковы; (2) $\forall$ $i=1,2,\ldots,n-1$ и $\forall$ $p=n+1,n+2,\ldots,r$ $m_{ip}-m_{i,p-1} \equiv \theta_{i,p-1} = 0,1$, $m_{ip}-m_{i+1,p} \in Z_+$; (3) $\forall$ $i \le j = 1,2,\ldots,n-1$ и $i \le j = n+1,n+2,\ldots,r-1$ $m_{ij}-m_{i+1,j+1} \in Z_+$.

Обозначим через $(m)_{\pm ij}$ схему, которая получается из (m) заменой m_{ij} на $m_{ij} \pm 1$. Положим $l_{ij}=m_{ij}-i+n+1$ $\forall$ $i=1,\ldots,n$ и $l_{ij}=-m_{ij}+i-n$ $\forall$ $i=n+1,\ldots,r$.

<u>Теорема</u>. В качестве базиса в существенно типичном модуле $W([m]_r)$ можно выбрать множество $\Gamma([m]_r)$. Будем называть его базисом Гельфанда-Цетлина. Преобразование базиса под действием генераторов $e_{11},\ldots,e_{rr}$ и $e_{k,k-1}$, $e_{k-1,k}$ $\forall$ $k=2,\ldots,n$ такое же, как и в [2]. Поэтому нижеследующие соотношения (вместе с указанными из [2]) полностью определяют действие $gl(n,m)$ в $W([m]_r)$.

$$e_{n,n+1}(m)=\sum_{i=1}^{n}\theta_{in}(-1)^{i-1}(-1)^{\theta_{1n}+\ldots+\theta_{i-1,n}}\left|\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(l_{k,n-1}-l_{i,n+1})}{\prod_{k\neq i=1}^{n}(l_{k,n+1}-l_{i,n+1})}\right|^{1/2}(m)_{in},$$

$$e_{n+1,n}(m)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(1-\theta_{in})(-1)^{i-1}(-1)^{\theta_{1n}+\ldots+\theta_{i-1,n}}(l_{i,n+1}-l_{n+1,n+1})\left|\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(l_{k,n-1}-l_{i,n+1})}{\prod_{k\neq i=1}^{n}(l_{k,n+1}-l_{i,n+1})}\right|^{1/2}(m)_{-in},$$

$$e_{n+p-1,n+p}(m)=\sum_{i=1}^{n}\theta_{i,n+p-1}(-1)^{\theta_{1,n+p-1}+\ldots+\theta_{i-1,n+p-1}+\theta_{i+1,n+p-2}+\ldots+\theta_{n,n+p-2}}\,*$$
$$*(1-\theta_{i,n+p-2})\prod_{k\neq i=1}^{n}\left|\frac{(l_{i,n+p}-l_{k,n+p-1})(l_{i,n+p}-l_{k,n+p-1}-1)}{(l_{i,n+p}-l_{k,n+p})(l_{i,n+p}-l_{k,n+p-2}-1)}\right|^{1/2}(m)_{i,n+p-1}+$$
$$+\sum_{s=n+1}^{n+p-1}\left|\frac{\prod_{q=n+1}^{n+p-2}(l_{q,n+p-2}-l_{s,n+p-1}-1)\prod_{q=n+1}^{n+p}(l_{q,n+p}-l_{s,n+p-1})}{\prod_{q\neq s=n+1}^{n+p-1}(l_{q,n+p-1}-l_{s,n+p-1})(l_{q,n+p-1}-l_{s,n+p-1}-1)}\right|\,*$$
$$*\prod_{k=1}^{n}\frac{(l_{k,n+p-1}-l_{s,n+p-1})(l_{k,n+p-1}-l_{s,n+p-1}+1)}{(l_{k,n+p}-l_{s,n+p-1})(l_{k,n+p-2}-l_{s,n+p-1}+1)}(m)_{s,n+p-1}\quad \forall\ p=2,3,\ldots,r.$$

$$e_{n+p,n+p-1}(m)=\sum_{i=1}^{n}\theta_{i,n+p-2}(-1)^{\theta_{1,n+p-1}+\ldots+\theta_{i-1,n+p-1}+\theta_{i+1,n+p-2}+\ldots+\theta_{n,n+p-2}}\,*$$
$$*(1-\theta_{i,n+p-1})\frac{\prod_{q=n+1}^{n+p-2}(l_{i,n+p}-l_{q,n+p-2}-1)\prod_{q=n+1}^{n+p}(l_{i,n+p}-l_{q,n+p})}{\prod_{q=n+1}^{n+p-1}(l_{i,n+p}-l_{q,n+p-1}-1)(l_{i,n+p}-l_{q,n+p-1})}\,*$$
$$*\prod_{k\neq i=1}^{n}\left|\frac{(l_{i,n+p}-l_{k,n+p-1})(l_{i,n+p}-l_{k,n+p-1}-1)}{(l_{i,n+p}-l_{k,n+p})(l_{i,n+p}-l_{k,n+p-2}-1)}\right|^{1/2}(m)_{-i,n+p-1}+$$
$$+\sum_{s=n+1}^{n+p-1}\left|\frac{\prod_{q=n+1}^{n+p-2}(l_{q,n+p-2}-l_{s,n+p-1})\prod_{q=n+1}^{n+p}(l_{q,n+p}-l_{s,n+p-1}+1)}{\prod_{q\neq s=n+1}^{n+p-1}(l_{q,n+p-1}-l_{s,n+p-1}+1)(l_{q,n+p-1}-l_{s,n+p-1})}\right|^{1/2}(m)_{-s,n+p-1}\quad p=2,\ldots,r.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л.// ДАН СССР.-1950. Т.71.-С.825-828. 2. Палев Ч.Д., Функцион. анализ и его прил., 1987, Т.21, вып. 3. С.85-86. 3.Kac V.G.// Lect. Notes Math.-1978. V. 626. -P.597-626.

Рукопись поступила в издательский отдел
II марта I988 года.

Палев Ч.Д. P5-88-169
Существенно типичные представления
супералгебр Ли gl(n,m) в базисе
Гельфанда - Цетлина

В работе рассмотрен класс конечномерных неприводимых модулей супералгебры Ли gl(n,m). В каждом модуле вводится базис, аналогичный базису Гельфанда - Цетлина для gl(n).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод автора

Palev T.D. P5-88-169
Essentially Typical Representations
of Lie Superalgebras gl(n,m)
in Gelfand - Zetlin Basis

A class of finite-dimensional irreducible modules for Lie superalgebra gl(n,m) is constructed. A basis analogous to the Gelfand-Zetlin's one for gl(n) algebras is introduced for every module.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988