сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-159

Я.Д.Маджарова

О ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫПУКЛОГО ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1988

В данной работе рассматривается внешняя задача Дирихле для существенно нелинейного выпуклого равномерно эллиптического уравнения в двумерной области. Используются результаты, относящиеся к задаче Дирихле для того же уравнения в ограниченной области (см. /1/, /2/, /3/). Доказано существование ограниченного решения. В предположении отсутствия младших членов доказано существование предела решения при $|x| \to \infty$.

Внешняя задача Дирихле для линейных эллиптических уравнений подробно исследуется в работе /4/: обсуждаются вопросы существования и единственности решения. Показано, что даже в равномерно эллиптическом случае поведение решения на бесконечности сильно зависит от свойств коэффициентов. Для существенно нелинейных эллиптических уравнений внешняя задача Дирихле до сих пор не рассматривалась.

I. Введение

Пусть на плоскости дана область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ ($\partial\Omega \in C^3$) и такая, что $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ ограниченно. Обозначим через φ сужение на $\partial\Omega$ гладкой функции $\phi \in C^3(\mathbb{R}^2)$. Рассматривается задача Дирихле:

$$\begin{cases} f(D^2u) + g(x, u, Du) = 0 & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{I}$$

где

$$f = f(r), \quad f \in C^2(\mathbb{R}^4), \quad f(0) = 0,$$

$$g = g(x, z, p), \quad g \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2),$$

а D^2u и Du – гессиан и градиент неизвестной функции u.

Предполагается, что

I) выполняется условие равномерной эллиптичности: существуют константы $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ такие, что

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} f_{ij}(r)\xi^i\xi^j \le \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^4, \tag{2}$$

где

$$f_{ij} = \frac{\partial f}{\partial r_{ij}} = f_{ji};$$

2) функции f и g выпуклы относительно производных u. Из гладкости f, g следует, что это эквивалентно неравенствам

$$\sum_{ij,kl} f_{ij,kl}(r)\xi^{ij}\xi^{kl} \ge 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^4, r \in \mathbb{R}^4, \tag{3}$$

$$\sum_{i,j} g_{p_ip_j}(x,z,p)\xi^i\xi^j \geq 0 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^2, x\in\mathbb{R}^2, z\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{R}^2; \qquad (4)$$

3) однородность:

$$g(x,0,0)\equiv 0; \qquad (5)$$

4) функция g и ее производные удовлетворяют неравенствам

$$g_z(x,z,p)\le 0; \qquad (6)$$

$$\max_{x\in\bar\Omega;\,|z|\le K}|g(x,z,0)|\le G(K); \qquad (7)$$

$$\max_{x\in\bar\Omega;\,|z|\le K}|g_{x_k}(x,z,p)|\le G+G|p|, \quad G=G(K), \quad k=1,2; \qquad (8)$$

$$\max_{x\in\bar\Omega;\,|z|\le K}|g_{p_i}(x,z,p)|\le G(K), \quad i=1,2. \qquad (9)$$

Справедлива следующая

<u>Теорема I</u>. В предположениях (2)-(9) внешняя задача Дирихле (I) имеет ограниченное решение $u\in C^2(\bar\Omega)$.

В частном случае $g\equiv 0$ результат можно уточнить:

<u>Теорема 2</u>. Если выполняются условия Теоремы I и $g\equiv 0$, то каждое ограниченное решение задачи (I) имеет предел при $|x|\to\infty$.

Основная идея доказательства Теоремы I довольно стандартна: строится последовательность расширяющихся ограниченных областей $\Omega_R\subset\Omega$, которая при $R\to\infty$ стремится к Ω. Пусть u_R - решение задачи Дирихле в Ω_R. Для u_R доказываются априорные оценки, не зависящие от R. Строится подпоследовательность решений $\{u_{R_N}\}$, сходящаяся к ограниченной функции, которая является решением внешней задачи Дирихле (I). При доказательстве Теоремы 2 условие $g\equiv 0$ позволяет применить неравенство Харнака к подходящей вспомогательной функции.

2. Вспомогательная задача и априорные оценки

Для дальнейшего перепишем исходное эллиптическое уравнение в эквивалентном виде

$$\sum_{i,j} a^{ij}(D^2u)u_{x_ix_j}+\sum_i b^i(x,u,Du)u_{x_i}+c(x,u)u=0, \qquad (10)$$

где

$$a^{ij}(D^2u)=\int_0^1 f_{ij}(tD^2u)\,dt,$$

$$b^i(x,u,Du)=\int_0^1 g_{p_i}(x,u,tDu)\,dt,$$

$$c(x,u)=\int_0^1 g_z(x,tu,0)\,dt\le 0.$$

Будем также использовать обозначение

$$L[u]v\equiv\sum a^{ij}(D^2u)v_{x_ix_j}+\sum b^i(x,u,Du)v_{x_i}+c(x,u)v. \qquad (11)$$

Здесь $L[u]$ - линейный эллиптический оператор, коэффициенты которого зависят от u.

Пусть B_R - шар радиуса R, $S_R=\partial B_R$, и пусть R_0 такое, что $B_{R_0}\supset\partial\Omega$. Без ограничения общности можно считать, что $\phi\equiv 0$ в окрестности S_{R_0} и для $R>R_0$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} f(D^2u)+g(x,u,Du)=0 & x\in\Omega_R,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi,\\ u|_{S_R}=0,\end{cases}$$

где

$$\Omega_R=\Omega\cap B_R, \quad R>R_0.$$

Из результатов /3/ следует, что вспомогательная задача (R) имеет единственное решение $u_R\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega_R)$, где α в принципе может зависеть от R. Это означает, что для решения справедлива оценка

$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha(R)}(\bar\Omega_R)}\le C=C(R).$$

Проанализируем зависимость константы C от R.

<u>Лемма I</u>. Существует постоянная M, не зависящая от R и такая, что

$$\max_{\bar\Omega_R}|u_R|\le M.$$

<u>Доказательство</u>: Из условия однородности ($g(x,0,0)\equiv 0$) следует, что u_R не имеет ни положительного максимума, ни отрицательного минимума в Ω_R. Отсюда следует, что

$$\max_{\bar\Omega_R}|u_R|=\max_{\partial\Omega_R}|\phi|=\max_{\partial\Omega}|\varphi|=M.$$

В дальнейшем будем писать u вместо u_R, если это не приводит к недоразумениям.

<u>Лемма 2</u>. Существует постоянная M_1', не зависящая от R, и такая, что

где $\alpha = \alpha(M, \lambda, \Lambda)$.

Если $|D^2u| > \frac{\alpha N}{\lambda}$, то
$$\lambda |D^2u|^2 \geq \alpha N |D^2 u|$$
и, следовательно,
$$2\lambda|D^2u|^2 - 8\varepsilon G|D^2u|^2 - \alpha N|D^2u| \geq 0.$$

В противном случае $|D^2u| \leq \frac{\alpha N}{\lambda}$
$$2N(u+M)\sum f_{ij} u_{x_i x_j} \geq -\frac{\alpha^2 N^2}{\lambda}.$$

Пусть градиент удовлетворяет неравенству
$$|Du(x_0)|^2 \leq \frac{\alpha^2 N}{\lambda^2};$$
тогда
$$w(x) \leq w(x_0) \leq \frac{\alpha^2 N}{\lambda^2} + 4M^2 N.$$

Наконец, если
$$|Du(x_0)|^2 > \frac{\alpha^2 N}{\lambda^2},$$
то
$$\lambda N |Du(x_0)|^2 > \frac{\alpha^2 N^2}{\lambda}.$$

Итак, мы либо получили требуемую оценку, либо противоречивое неравенство
$$0 \geq \sum f_{ij} w_{x_i x_j}(x_0) > 0.$$

Противоречие показывает, что w принимает свое максиальное значение на $\partial\Omega_R$ и, следовательно,
$$|Du|^2 \leq M_1^2 + 4M^2N.$$

Этим лемма доказана.

<u>Лемма 4</u>. Существует постоянная C, не зависящая от R и такая, что
$$\max_{\partial\Omega_R}|D^2u| \leq C + C\left(\max_{\bar\Omega_R}|D^2u|\right)^{1/2}.$$

<u>Доказательство</u>: Доказательство полностью содержится в /3/. Сделаем только следующее замечание: пусть $x_0 \in \partial\Omega_R$ и $\psi = \psi[x_0]$ диффеоморфизм, выпрямляющий границу в окрестности x_0. Поскольку S_R окружность, справедливы оценки
$$|\psi|, \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leq C' = C'(\partial\Omega),$$
где C' от R не зависит.

<u>Лемма 5</u>. Существует постоянная M_2, не зависящая от R и такая, что
$$\max_{\Omega_R}|D^2u| \leq M_2,$$

$$M_2 = M_2(\lambda, \Lambda, M, G(M), M_1, \partial\Omega).$$

<u>Доказательство</u>: Детали доказательства можно проследить в /3/. Снова применяется метод Бернштейна со вспомогательной функцией
$$w(x) = (u^-_{\xi\xi})^2 + N|Du|^2 + N_1 u^2,$$
где $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi|=1$, $u^-_{\xi\xi} = \min(0, u_{\xi\xi})$. Отсутствие слагаемого вида $N|x|^2$ преодолевается как при доказательстве Леммы 3.

3. Доказательство Теоремы I.

Для осуществления предельного перехода $R\to\infty$ нам будут необходимы априорные оценки для u_R в пространствах Гельдера.

Напомним еще раз, что решение u_R задачи Дирихле в области Ω_R удовлетворяет неравенству
$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega_R)} \leq C, \quad 0<\alpha<1,$$
где константы α и C зависят от λ, Λ, M, $G(M)$, M_1, M_2 и Ω_R (см. /3/ и /5/, стр.268–269). Нас интересует прежде всего зависимость постоянной C от R. Внимательный анализ доказательства оценок показывает следующее (см. /5/, стр.268–269, 265, 190, 192,195):

Пусть $\Omega' \subset\subset \Omega$. Тогда справедлива оценка
$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha'}(\bar\Omega')} \leq C', \quad 0<\alpha'<1,$$
где постоянные α' и C' зависят от констант эллиптичности, C^2 - нормы функции u_R и от величины $d = dist(\Omega', \partial\Omega_R)$. При доказательстве оценок в замкнутой области добавляется вместо d зависимость от геометрических свойств границы и диаметра всей области. Пусть теперь $R > R_0+1$. Представим замкнутую область $\bar\Omega_{R-1}$ в виде объединения
$$\bar\Omega_{R-1} = \bar\Omega_{R_0} \cup \{R_0 \leq |x| \leq R-1\}.$$

В силу сказанного выше существуют α_0 и C_0 такие, что
$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha_0}(\bar\Omega_{R_0})} \leq C_0, \quad 0<\alpha_0<1.$$

Эти постоянные от R не зависят.

Существуют также постоянные α_1 и C_1, зависящие от
$$d' = dist(S_{R_0}, \partial\Omega), \quad d'' = dist(S_{R-1}, S_R) = 1$$
такие, что
$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha_1}(R_0\leq|x|\leq R-1)} \leq C_1, \quad 0<\alpha_1<1.$$

Если $\alpha = \min(\alpha_0,\alpha_1)$, $C = C_0 + C_1$, то получаем
$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha}(\bar\Omega_{R-1})} \leq C,$$

где α и C от R не зависят. Эта оценка позволит нам сделать предельный переход $R \to \infty$. Пусть дана последовательность

$$R_0+1 < R_1 < R_2 < \dots < R_N < \dots, \quad \lim_{N\to\infty} R_N = \infty .$$

Рассмотрим соответствующую последовательность функций

$$u_{R_1},\ u_{R_2},\ \dots,\ u_{R_N},\ \dots, \qquad (12)$$

а также последовательность компактов $\bar\Omega_{R_1-1}, \bar\Omega_{R_2-1}, \dots, \bar\Omega_{R_N-1}, \dots$,

$$\bar\Omega_{R_k-1} \subset \bar\Omega_{R_{k+1}-1}, \quad \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bar\Omega_{R_N-1} = \bar\Omega .$$

Существует подпоследовательность последовательности (12), которая сходится к некоторой функции u_1 в некотором пространстве Гельдера $C^{2,\beta_1}(\bar\Omega_{R_1-1})$,

$$u_{11},\ u_{12},\ \dots,\ u_{1N},\ \dots, \quad u_{1N} \xrightarrow[N\to\infty]{C^{2,\beta_1}(\bar\Omega_{R_1-1})} u_1 . \qquad (13)$$

Из последовательности (13) можем выбрать подпоследовательность

$$u_{21},\ u_{22},\ \dots,\ u_{2N},\ \dots, \qquad (14)$$

сходящуюся к функции u_2 в пространстве $C^{2,\beta_2}(\bar\Omega_{R_2-1})$, $0<\beta_2<\beta_1$, и т.д., причем $u_k \equiv u_{k+1}$ на множестве $\bar\Omega_{R_k-1}$.

Применив диагональный процесс Кантора, получаем последовательность

$$u_{11},\ u_{22},\ \dots,\ u_{NN},\ \dots,$$

сходящуюся к некоторой функции u. Поскольку последовательность $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, \dots$ убывает и в принципе может стремиться к 0, о предельной функции u можно сказать только, что она принадлежит классу $C^2(\bar\Omega)$. Но на любом компакте $K \subset \bar\Omega$ функция u принадлежит некоторому классу Гельдера $C^{2,\beta(K)}(K)$. То, что u является ограниченным решением задачи (1), очевидно в силу доказанных оценок.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство Теоремы 2.

Из ограниченности решения u следует существование верхнего предела

$$l = \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\, u(x) .$$

Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $R_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $|x|>R_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$u(x) < l+\varepsilon .$$

Чтобы число l являлось пределом u при $|x|\to\infty$, необходимо доказать, что для достаточно больших $|x|$ выполняется еще

$$l-\varepsilon < u(x) .$$

Это мы и сделаем в частном случае $g \equiv 0$. Докажем сначала следующее утверждение:

<u>Лемма</u>. Пусть в области $|x|>A$

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)I, \quad c(x)\le 0,$$

эллиптический дифференциальный оператор со свойством: существует константа $C(R_1,R_2)$ такая, что если $A<R_1<|x|<R_2$

$$\mathcal{L}v \le 0$$
$$v \ge 0,$$

то

$$\sup_{R_1<|x|<R_2} v \le C \inf_{R_1<|x|<R_2} v,$$

причем C инвариантна относительно гомотетий с полюсом в начале координат. (Это означает, что для $\mathcal{L}$ справедливо неравенство Харнака с дополнительным свойством инвариантности постоянной). Тогда каждое ограниченное решение u уравнения

$$\mathcal{L}u = 0$$

имеет предел при $|x|\to\infty$.

<u>Доказательство</u>: Пусть, как прежде,

$$l = \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\, u \quad \text{, где } \quad \mathcal{L}u = 0,$$

$\varepsilon>0$ и для $|x|>R_0(\varepsilon)$ справедливо $u(x)<l+\varepsilon$. Кроме того, поскольку l — верхний предел u, существует последовательность $\{x_\nu\}_1^\infty$, $|x_\nu|\to\infty$ такая, что

$$l-\varepsilon < u(x_\nu), \quad \nu\in\mathbb{N}.$$

Рассмотрим функцию

$$v(x) = l+\varepsilon-u(x), \quad |x|>R_0(\varepsilon).$$

Очевидно, $v\ge 0$, $\mathcal{L}v\le 0$. Обозначим через G_1 множество

$$R_0 \le |x| \le 2R_0$$

и рассмотрим фамилию множеств $G_k = \{kR_0 \le |x| \le 2kR_0\}$, $k\in\mathbb{N}$.

Ясно, что $\{|x|\ge R_0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Пусть для некоторого μ точка x_μ содержится в множестве G_{k_0}. Поскольку

$$v(x_\mu) = l+\varepsilon-u(x_\mu) < 2\varepsilon,$$

получаем

$$\min_{G_{k_0}} v \le v(x_\mu) < 2\varepsilon$$

и, следовательно,

$$v(x) \le \max_{G_{k_0}} v \le C \min_{G_{k_0}} v < 2C\varepsilon \qquad \forall x \in G_{k_0}$$

в силу инвариантности C относительно гомотетий. Это означает, что

$$\ell + \varepsilon - u(x) < 2C\varepsilon \qquad \forall x \in G_{k_0},$$

откуда

$$|u(x) - \ell| < \varepsilon \max(1, 2C) \qquad \forall x \in G_{k_0}.$$

Пусть теперь $k > k_0$ произвольное. Так как $|x_\nu| \to \infty$, существует τ такое, что $x_\tau \in G_{k_1}$ для некоторого $k_1 > k$. Очевидно,

$$G_k \subset \{k_0 R_0 \le |x| \le 2k_1 R_0\}.$$

На границе этого множества

$$-\varepsilon \max(1, 2C) < u(x) - \ell < \varepsilon \max(1, 2C)$$

и из принципа максимума следует, что эти неравенства справедливы и в G_k. Отсюда следует, что

$$|u(x) - \ell| < \varepsilon \max(1, 2C)$$

для всех x, удовлетворяющих $|x| > k_0 R_0$, что доказывает лемму.

Теперь остается заметить, что в случае $g \equiv 0$ для оператора (II) справедливо неравенство Харнака с постоянной, удовлетворяющей условию инвариантности. Подробное доказательство здесь не приводится, так как в силу доказанных априорных оценок оно мало отличается от доказательства для линейных равномерно эллиптических операторов (см./5/, стр.40 и далее).

Теорема 2 доказана.

Замечание. Очевидно, что для каждого ℓ существует не более одного решения задачи (I), стремящегося к ℓ при $|x| \to \infty$.

Литература

1. Evans L.C. - Comm. Pure Appl. Math., 1982, v.25, p.333 - 363.
2. Trudinger N.S. - Trans. Amer. Math. Soc., 1983, v.287, p.751 - 769.
3. Madjarova J.D. - Serdica, 1985, v.11, p.208 - 217.
4. Meyers N.G., Serrin J. - J. Math. Mech., 1960, v.9, p.513 - 538.
5. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 марта 1988 года.