сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-88-138

Б.С.Гетманов, В.Е.Ковтун*

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА

*Харьковский государственный университет

1988

I. Метод обратной задачи (см., например, [1]) позволяет строить значительное число полевых гамильтоновых систем в пространствах различной размерности, обладающих исключительными свойствами и условно называемых интегрируемыми. Одним из свойств таких систем является существование у них бесконечного числа интегралов движения (или высших локальных сохраняющихся токов), не связанных с симметриями типа пространственно-временных и зависящих от высших производных поля. В связи с этим актуальная задача классификации и перечисления интегрируемых систем заданного вида может быть решена с помощью перечисления систем, обладающих дополнительными интегралами движения (во всех известных случаях из существования одного, в крайнем случае двух дополнительных интегралов, следует существование бесконечного их числа). Проблема перечисления эволюционных систем вида $\vec{u}_t = \vec{F}(\vec{u}, \vec{u}_1, \dots \vec{u}_n)$ ($\vec{u} = (u^1, u^2, \dots u^n)$, $\vec{u}_k = \partial^k \vec{u} / \partial x^k$) далеко продвинута в работах Шабата с сотрудниками [2–4]. Однако мощные методы этих работ встречаются с трудностями в случае систем гиперболического типа, к которым относятся модели релятивистской теории поля (исключение составляет классификация интегрируемых уравнений Клейна–Гордона для одного действительного поля [5]). С другой стороны, в этом случае требование релятивистской инвариантности накладывает столь жесткие ограничения на вид сохраняющихся токов, что вполне эффективными оказываются более простые методы, восходящие к работам [6,7]. Этими методами в работе [8] были проклассифицированы интегрируемые уравнения Клейна–Гордона для одного <u>комплексного</u> поля.

Характерной особенностью рассматриваемых задач является необходимость проведения значительного количества простых, но громоздких вычислений, объем которых столь стремительно растет с ростом сложности задачи, что использование систем аналитических вычислений (САВ), реализованных на мощном компьютере, становится неизбежным. САВ интенсивно применялись в ряде работ (см., например, [4,9]), в которых алгоритмизован метод Шабата. Использование компьютера в рассмотренных ниже задачах менее алгоритмично, но более гибко ("в режиме диалога" – как следствие большей сложности задач) – решение переопределенных систем нелинейных алгебраических (числом более сотни) уравнений, алгоритмическая реализация процесса Буллоу–Додда (см. ниже), решение систем дифференциальных уравнений (как однородных, так и неоднородных), взятие сложных интегралов. Использовалась САВ REDUCE-30 на ЭВМ ЕС-I06I.

В разделе 2 приведен список двумерных интегрируемых <u>спинорных</u> систем (нелинейных уравнений Дирака), в разделе 3 представлены результаты поиска существенно-нелинейных скалярных моделей теории поля, обладающих первым дополнительным интегралом. За деталями отсылаем к последующим более подробным публикациям.

2. <u>Спинорные системы</u>

Наиболее общий вид действительного, калибровочно- и лоренц-инвариантного лагранжиана нелинейного двумерного поля Дирака таков:

$$L = i(\bar u u_\xi - \bar u_\xi u + \bar v v_\eta - \bar v_\eta v) + F(w, \bar w). \qquad (\mathrm{I})$$

Здесь $\eta = (t+x)/2$, $\xi = (t-x)/2$ – конусные переменные в двумерном пространстве-времени, u и v – компоненты двумерного спинора $\psi^T = (u, v)$, двумерные матрицы Дирака имеют вид $\gamma^0 = \sigma^1$, $\gamma^1 = i\sigma^2$, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$; $w = u\bar v$ – единственная лоренц- и калибровочно-инвариантная комбинация компонент поля (без производных), F – произвольная функция w, $\bar w$ $(\bar F = F)$, черта означает комплексное сопряжение. Учтено, что $\eta\xi$ – лоренцев инвариант, а размерность компонент спинора $u \sim \xi^{+1/2} \sim \eta^{-1/2}$, $v \sim \xi^{-1/2} \sim \eta^{1/2}$. Задача состоит в отыскании функций F, для которых (I) обладает высшими (нететоровскими) локальными полиномиальными сохраняющимися токами, существование которых является атрибутом интегрируемых моделей и связано с наличием нетривиальной группы Ли-Беклунда. Требование лоренц-инвариантности накладывает жесткие ограничения на вид сохраняющихся токов: в координатах x, t они представляют собой тензоры n-го ранга $T_{\underbrace{\mu\nu\cdots\lambda}_{n}}$, а в конусных переменных закон сохранения тока n-го ранга имеет вид

$$\rho_\xi^{(n)} = j_\eta^{(n)}, \qquad (2)$$

где $\rho^{(n)}$ – плотность тока – представляет собой однородный полином степени n по степеням производных u по η <u>с учетом размерности</u> u. Для любой $F = \bar F$, как следствие лагранжевости, существуют нетеровские ("электромагнитный") ток I-го ранга ($\rho = i|u|^2$, $j = i|v|^2$), и ток 2-ранга – тензор энергии-импульса ($\rho = i(\bar u_\eta u - \bar u u_\eta)$). Можно легко показать, что для тока любого ранга $n > 2$ анализ членов со старшей производной по η в (2) приводит к линейности F по w и $\bar w$: $F = m(u\bar v + \bar u v) + \lambda|u|^2|v|^2$, что дает хорошо известную интегрируемую (массивную) модель Тирринга /I0,II/ и согласуется с результатами, полученными в рамках схемы единого описания двумерных интегрируемых массивных моделей релятивистской теории поля (СХЕОП) /I2/. В рамках

СХЕОП были, однако, получены другие интегрируемые спинорные модели – калибровочно-неинвариантные, с четырехлинейным взаимодействием. Представляется оправданным расширить круг искомых систем, отбросив требование калибровочной инвариантности, но наложив условие четырехлинейности взаимодействия (общий случай приводит к необходимости решать системы большого количества уравнений в частных производных от 4 переменных, и лежит пока за пределами наших возможностей).

Наиболее общий вид лагранжиана:

$$L = i(\bar u_\xi u - \bar u u_\xi + \bar v_\eta v - \bar v v_\eta) + m(\bar u v + u\bar v) + L_{int.} \qquad (3)$$

$$L_{int.} = \lambda_1|u|^2|v|^2 + |u|^2(\lambda_2\bar v^2 + \bar\lambda_2 v^2) + |v|^2(\lambda_3\bar u^2 + \bar\lambda_3 u^2) + \lambda_4\bar u v^2 + \bar\lambda_4 u^2\bar v^2 + \lambda_5\bar u^2\bar v^2 + \bar\lambda_5 u^2 v^2,$$

$\bar\lambda_1 = \lambda_1$, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ – константы взаимодействия. Рассмотрим сразу (действительный) ток 4-го ранга. Наиболее общий вид его плотности (с точностью до полной производной):

$$\begin{aligned}\rho^{(4)} = {} & i a_1(\bar u_{\eta\eta} u_\eta - u_{\eta\eta}\bar u_\eta) + |u_\eta|^2(a_2|u|^2 + a_3 u^2 + \bar a_3\bar u^2) \\ & + u_\eta^2(a_4|u|^2 + a_5 u^2 + \bar a_5\bar u^2) + \bar u_\eta^2(a_6|u|^2 + a_7 u^2 + \bar a_7\bar u^2) \\ & + u_\eta(a_8 u^5\bar u^0 + a_9 u^4 u + \cdots) + \bar u_\eta(\bar a_8\bar u^5 u^0 + \bar a_9 + \bar u^4 u + \cdots) \\ & + a_{13} u^8\bar u^0 + \bar a_{13}\bar u^8 u^0 + \cdots + a_{17}\bar u^4 u^4.\end{aligned} \qquad (4)$$

Для получения условий интегрируемости используем процедуру Буллоу-Додда, реализованную алгоритмически на ЭВМ: вычислим, пользуясь уравнениями движения, $\rho_\xi^{(4)}$, и представим ее, перебрасывая производные в виде $\rho_\xi^{(4)} = j_\eta^{(4)} + R$, где R – полином по $v, \bar v, u, \bar u, u_\eta, \bar u_\eta, \cdots$ с коэффициентами, зависящими от a_i и констант взаимодействия, из которого нельзя выделить полные производные, не повышая порядок производных по η.

Требование $R = 0$ дает искомый закон сохранения и приводит к переопределенной системе I20 нелинейных алгебраических уравнений на a_i и λ_i, решавшейся с помощью ЭВМ. Анализ массивного и безмассового ($m = 0$) случаев существенно различен. Приведем окончательный ответ – список совокупностей ограничений на коэффициенты λ_i лагранжиана (3), при которых соответствующая модель обладает сохраняющимся током 4-го ранга.

<u>а) $m = 0$</u>

I) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_{2-5} = 0$ (модель Тирринга);
2) $\lambda_{1-3} = 0$, $\bar\lambda_4 = \lambda_4$, $\lambda_4^2 = |\lambda_5|^2$ (модель, эквивалентная уравнению $O(1,1)$ – синус-Гордон), /I2,I3/;
3) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 = -\lambda_2$, $\lambda_5 = -\lambda_2^2/\lambda_1$, $\lambda_4 = -|\lambda_2|^2/\lambda_1$ ("смесь" моделей I) и 2));
4) $\lambda_5 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_4 + \bar\lambda_4$, $|\lambda_2|^2 = |\lambda_4|^2$, $\lambda_2 = \lambda_3$.

Модели I)–3) интегрируются на алгебре $sl(2,C)$, модель 4) – на алгебре $sl(3,C)$ в рамках СХЕОП /I2/.

б) $m=0$

I) Все λ_i отличны от нуля, но подчиняются системе нелинейных алгебраических уравнений, которую не удается упростить:

$$\begin{cases}(\lambda_1\lambda_4-\bar\lambda_2\bar\lambda_3)(\lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_3)+(\lambda_5\bar\lambda_2-\lambda_4\lambda_2)^2=0\\ (\bar\lambda_3\lambda_4-\lambda_3\bar\lambda_5)(\lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_3)+(\lambda_5\bar\lambda_2-\lambda_4\lambda_2)(|\lambda_5|^2-|\lambda_4|^2)=0\\ (\lambda_1\bar\lambda_5-\bar\lambda_2\bar\lambda_3)(\lambda_1\lambda_5-\lambda_2\lambda_3)-(\lambda_2\bar\lambda_5-\bar\lambda_2\bar\lambda_4)(\bar\lambda_2\lambda_5-\lambda_2\lambda_4)=0,\end{cases}$$

$$\lambda_1\bar\lambda_4\neq\lambda_2\lambda_3.$$

2) $\lambda_1=0,\ \lambda_{2-5}\neq 0$, при условиях $(\lambda_4\bar\lambda_3-\lambda_3\bar\lambda_5)(\bar\lambda_4\lambda_3-\bar\lambda_3\lambda_5)=$ $=(|\lambda_4|^2-|\lambda_5|^2),\quad |\lambda_4|^2\neq|\lambda_5|^2$.

Обе модели содержат редукции к безмассовым версиям массивных моделей пункта а), но часть из них фактически линеаризуется (например, для безмассовой модели Тирринга законы сохранения тока I-го ранга имеют вид $(|u|^2)_\zeta=(|v|^2)_\xi=0$, поэтому нелинейный член представляет собой произведение произвольных функций ξ и ζ). Во всех таких случаях высшие токи содержат свободные параметры и распадаются на части, сохраняющиеся независимо.

Рассмотрение тока 3-го ранга аналогичным образом приводит к системе 60 уравнений на коэффициенты тока и лагранжиана; ее решения содержатся в решениях пунктов а) и б), но не исчерпывают их (факт "пропуска" части высших интегралов для некоторых моделей, хорошо известный в методе обратной задачи).

3. Существенно-нелинейные системы, по терминологии Д.И.Блохинцева, представляют собой модели теории поля, лагранжиан L которых нелинейно зависит как от полей φ^i, так и от вторых лоренцевых инвариантов – $z^i=\varphi^{i\,2}_x$ (так что $\partial^2L/\partial z^{i\,2}\neq 0$). Простейший пример такого рода дают системы, лагранжиан которых $L=L(z)$ не зависит явно от поля φ ($\partial L/\partial\varphi=0$), в частности, двумерная модель Борна-Инфельда с $L=-1+\sqrt{1+z}$ /I3/. Все такие модели интегрируются методом годографа и имеют бесконечные наборы сохраняющихся токов, зависящих только от первых производных φ_t, φ_x. Здесь мы рассмотрим двумерную задачу с лагранжианом для одного действительного скалярного поля $L(z,\varphi)$, $\partial^2L/\partial z^2\neq 0$, $\partial L/\partial\varphi\neq 0$. В случае $\partial^2L/\partial z^2=0$ интегрируемые уравнения проклассифицированы в /5/; при $\partial^2L/\partial z^2\neq 0$ ситуация радикально усложняется, и мы ограничимся задачей отыскания уравнений указанного вида, обладающих одним высшим (нетривиальным) током наинизшего возможного (4-го) ранга. Уравнение движения в конусных переменных имеет вид

$$\varphi_{\xi\zeta}=f(z,\varphi)(\varphi_\xi^2\varphi_{\zeta\zeta}+\varphi_\zeta^2\varphi_{\xi\xi})+B(z,\varphi).$$

$$\Big(f(z,\varphi)=-\frac{L''}{2(zL''+L')};\quad B(z,\varphi)=\frac{\dot L-2\dot L'z}{2(zL''+L')};\qquad (4)$$

$$L'=\partial L/\partial z;\ \dot L=\partial L/\partial\varphi;\ z=\varphi_\xi\varphi_\zeta;\ f\neq 0;\ B\neq 0\Big).$$

Процедура Буллоу–Додда здесь оказывается малоэффективной; удобнее иметь дело с явными выражениями для плотности тока и потока, наиболее общий вид которых таков:

$$\begin{aligned}\rho^{(4)}&=a_1\varphi_{\xi\xi}^2+a_2\varphi_\xi^4\varphi_{\xi\xi}\varphi_{\zeta\zeta}+a_3\varphi_\xi^8\varphi_{\zeta\zeta}^2\\&+a_4\varphi_{\xi\xi}\varphi_\xi^2+a_5\varphi_{\zeta\zeta}\varphi_\xi^6+a_6\varphi_\xi^4\\ j^{(4)}&=b_1\varphi_\zeta^2\varphi_{\xi\xi}^2+b_2\varphi_\xi^2\varphi_{\xi\xi}\varphi_{\zeta\zeta}+b_3\varphi_\xi^6\varphi_{\zeta\zeta}^2\\&+b_4\varphi_{\xi\xi}+b_5\varphi_\xi^4\varphi_{\zeta\zeta}+b_6\varphi_\xi^2.\end{aligned}\qquad (5)$$

$$a_i=a_i(z,\varphi);\quad b_i=b_i(z,\varphi).$$

Подстановка (5) в уравнение $\rho^{(4)}_\zeta=j^{(4)}_\xi$, использование (4) для исключения смешанных производных дает переопределенную систему I6 нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений в частных производных для определения a_i, b_i и L (через f и B), получающуюся при приравнивании коэффициентов при одинаковых "тензорных" структурах. Опишем предельно кратко схему решения системы. Эта система естественным образом разбивается на группы уравнений. Из первой группы можно выразить алгебраически a_1, b_1, a_3, b_3 через a_2, b_2, и a_5, b_5 через a_6, b_6. Вторую группу дифференциальных (по z) уравнений можно рассматривать как однородную алгебраическую систему относительно переменных a_2, b_2, a_2', b_2'; условие ее разрешимости после громоздких вычислений оказывается чрезвычайно простым: $f'+2f^2=0$, откуда, трижды интегрируя, получаем сильнейшее ограничение на допустимые лагранжианы: $L=V_1+V_2\sqrt{z+V_3}$, где V_{1-3} – функции поля φ, нуждающиеся в определении. На следующем этапе, после того, как удается решить соответствующее уравнение Риккати, интегрирование однородной системы дифференциальных уравнений дает a_2 и b_2 как функции z, $V_{1-3}(\varphi)$ и двух произвольных функций $C_{1,2}(\varphi)$. Условие совместности следующей подсистемы для a_6, b_6 приводит к явному выражению $C_{1,2}$ через V_{1-3} и соотношение $V_1=\pm V_2\sqrt{V_3}$. Интегрирование по z этой неоднородной системы дает явный вид a_6, b_6 и появляются еще две неизвестные функции $C_{3,4}(\varphi)$. Начиная с этого этапа, ввиду чрезвычайной громоздкости все вычисления велись на компьютере. Нахождение последних коэффициентов a_4, b_4 из следующей неоднородной подсистемы после решения уравнения Риккати свелось к взятию десятков интегралов по z от комбинаций отношений многочленов степени до I7-й включительно с логарифмами и арктангенсами. Последнее уравнение системы в силу произвольности z расщепляется на переопределенную систему 32 дифференциальных уравнений относительно $V_{2,3}$ и четырех $c_i(\varphi)$. Исключая $c_i(\varphi)$ и замечая, что путем подходящего переопределения поля $\varphi = \varphi(\psi)$ можно наложить определенное дополнительное ограничение на $V_{2,3}$, получаем после интегрирования по φ оставшегося уравнения ответ – допустимый лагранжиан – в двух (нетривиально) эквивалентных удобных формах:

I) $V_3 = 1$. $L = V(\varphi)\left(-1+\sqrt{1+\varphi_x^2}\right)$,

$V(\varphi)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$d^2V/d\varphi^2 + c_1 V^3 + c_2 V^4 + c_3 V^5 \quad (c_{1-3} - const)$$

2) $V_2 = \sqrt{V_3} = 1/U(\varphi)$. $L = \dfrac{-1+\sqrt{1+U\varphi_x^2}}{U}$,

$$d^2U/d\varphi^2 + c_1 U + c_2 = 0 \quad (c_{1,2} - const).$$

Литература

I. Захаров В.Е. и др. "Теория солитонов". Наука, М., I980.
2. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Функц.анализ, I982, I4, с. 79.
3. Михайлов А.В., Шабат А.Б. ТМФ, I985, 62, № 2, с. I63.
4. Gerdt V.P. et al. JINR, E5-87-40, Dubna, 1987.
5. Жибер А.В., Шабат А.Б. ДАН СССР, I979, 247, № 5, с. II03.
6. Кулиш П.П. ТМФ, I976, 26, с. I98.
7. Dodd R.K., Bullough R.K. Proc.R.Soc.Lond. Ser.A252, 481(1977).
8. Гетманов Б.С. В кн.: "Теоретико-групповые методы в физике", т. 2, "Наука", М., I983, с. 333; JINR, E2-80-319, Dubna, 1980.
9. Гердт В.П., Жарков А.Ю. ОИЯИ, Р5-86-37I, Дубна, I986.
I0. Кузнецов Е.А., Михайлов А.В. ТМФ, I977, 30, с. 303.
II. Barashenkov I.V., Getmanov B.S. Com.Math. Phys., 1987, 112, 423.
I2. Гетманов Б.С. В кн.: "Труды Ш Межд. симпозиума по избранным проблемам статистической механики", ОИЯИ, ДI7-84-850, Дубна, I984, т.I, с.2I2; 2I7.
I3. Барбашов Б.М., Черников Н.А. ЖЭТФ, 50, I966, с. I296.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля I988 года.