ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5-88-119

Д.В.Ктитарев

ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ ИЛИ БЫСТРО УБЫВАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

1988

В настоящей работе рассматривается задача Коши для систем линейных эволюционных уравнений, содержащих псевдодифференциальные операторы /ПДО/. Для двух классов таких систем, содержащих системы уравнений в частных производных с постоянными и переменными быстро убывающими коэффициентами, построено решение в виде ряда, который можно интерпретировать как фейнмановский интеграл в фазовом пространстве /см. [1,2] / от хронологической экспоненты операторнозначного символа ПДО. Аналогичные формулы были ранее получены в [3,4], но для более узкого, чем в данной работе, класса систем псевдодифференциальных уравнений. Формулы такого типа для одного уравнения рассматривались также в [5].

1. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим задачу Коши для следующего псевдодифференциального уравнения:

$$\frac{\partial}{i\partial t} u(t, x) = [H(-i\partial) + A(t, x)]\, u(t, x), \qquad /1/$$
$$u(0, x) = u_0(x).$$

Решением этой задачи будем называть функцию u аргумента $t \in [0, T]$ со значениями в пространстве обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^d, \boldsymbol{C}^n)$, которая в точке 0 представляет собой регулярный функционал, заданный функцией u_0: $\boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{C}^n$.

ПДО $H(-i\partial)$ определяется своим символом - гладкой функцией H аргумента $x \in \boldsymbol{R}^d$ со значениями в пространстве $M_n(\boldsymbol{C})$ комплексных матриц порядка $n \times n$. Предполагается, что символ H удовлетворяет условию

$$\| \partial^\alpha H(p) \| < C_\alpha \langle p \rangle^{m_\alpha}, \quad \alpha \ge 0, \qquad /2/$$

где

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial p_d}\right)^{\alpha_d}, \quad \langle p \rangle = \left(1 + \sum_{i=1}^{d} |p_i|^2\right)^{1/2}, \quad C_\alpha,\ m_\alpha > 0.$$

Действие ПДО $H(-i\partial)$ на функцию $\phi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d, \boldsymbol{C}^n)$ определяется формулой

$$H(-i\partial)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \exp(ip(x-q))\, H(p)\, \phi(q)\, dq\, dp, \quad \text{где } x, p, q \in \boldsymbol{R}^d.$$

Функция A аргументов $t \in [0, T]$ и $x \in \boldsymbol{R}^d$ со значениями в пространстве $M_n(\boldsymbol{C})$ обладает свойством

$$A(t, x) = \int \exp(ixp)\, \hat{A}(t, dp),$$

где $\hat{A}(t, \cdot)$ - семейство $M_n(\boldsymbol{C})$-значных борелевских мер на $\boldsymbol{R}^d$, причем для любого борелевского множества $B \subset \boldsymbol{R}^d$ функция $\hat{A}(t, B)$: $[0, T] \to M_n(\boldsymbol{C})$ измерима и

$$\int_0^T d\tau \int \| \hat{A}(\tau, dp) \|\, \langle p \rangle^k < C_1^k \text{ для любого } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ где } C_1 > 0. \qquad /3/$$

Предполагается также, что для функции u_0: $\boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{C}^n$ выполнено условие

$$u_0(x) = \int \exp(ixp)\, \hat{u}_0(dp),$$

где $\hat{u}_0$ - борелевская мера на $\boldsymbol{R}^d$, для которой

$$\int \| \hat{u}_0(dp) \|\, \langle p \rangle^k < C_2^k \text{ для любого } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ где } C_2 > 0. \qquad /4/$$

Рассмотрим функцию

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^t d\theta_n \int_0^{\theta_n} d\theta_{n-1} \dots \int_0^{\theta_2} d\theta_1 \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_\ell \le n} \int \hat{A}_n(\theta_n, dp_n) \times \qquad /5/$$
$$\times \dots \times H_{k_\ell}\Bigl(\sum_{\substack{j=0 \\ j \ne k_1, \dots, k_{\ell-1}}}^{k_\ell - 1} p_j \Bigr) \dots H_{k_1}\Bigl(\sum_{j=0}^{k_1 - 1} p_j \Bigr) \dots \hat{A}_1(\theta_1, dp_1)\, \hat{u}_0(dp_0) \exp\Bigl(ix \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne k_1, \dots, k_\ell}}^{n} p_j\Bigr).$$

Нижние индексы у мер $\hat{A}$ и функций H обозначают их порядковый номер в интеграле, состоящем из $n + 2$ "сомножителей" - функций и мер /меры $\hat{A}$ с индексами $k_1, \dots, k_\ell$ отсутствуют/.

Теорема 1. Функция $u(t, x)$ является решением задачи Коши /1/.

Доказательство. Абсолютную сходимость ряда обеспечивают условия /2/-/4/. Почленно дифференцируя ряд, получаем, что функция u удовлетворяет уравнению и начальному условию задачи /1/.

Ряд /5/ можно записать в виде интеграла Фейнмана. Для этого рассмотрим функционал

$$\Psi_1(t, x, \eta, \xi) = T\text{-}\exp[i\int_0^t (H(\xi(s)) + A(s, x + \eta([s, t])))ds]u_0(x + \eta([0, t])),$$

где $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^d$, $\xi \in B[0, T]$, $\eta \in B'[0,T]$. Через $B[0, T]$ обозначено пространство ограниченных функций на отрезке $[0, T]$, через $B'[0, T]$ - его сопряженное, а символ $T\text{-}\exp$ обозначает хронологическую экспоненту /см., например,[/6/] /.

При некоторых более сильных, чем /2/-/4/, ограничениях на символ ПДО $H(-i\partial)$ и потенциал A в задаче /1/ справедливо следующее утверждение: функционал Ψ_1 является преобразованием Фурье $M_n(\mathbf{C}^n)$-значной борелевской меры $\hat{\Psi}_1$ на $B[0, T]$:

$$\Psi_1(t, x, \eta, \xi) = \int \exp(i<\eta, \zeta>)\hat{\Psi}_1(t, x, d\zeta, \xi),$$

а значение интеграла

$$u(t, x) = \int_{B[0, T]} \hat{\Psi}_1(t, x, d\xi, \xi),$$

понимаемого в смысле Колмогорова[/7/], совпадает с суммой ряда /5/.

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФЦИЕНТАМИ

Рассмотрим задачу Коши для следующего эволюционного уравнения

$$\frac{\partial}{i\partial t} u(t, x) = H(t, x, -i\partial)u(t, x), \qquad /6/$$
$$u(0, x) = u_0(x).$$

Решение этой задачи будем искать в том же смысле, что и для уравнения /1/.

Символ ПДО $H(t, x, -i\partial)$ - гладкая функция, имеющая следующий вид:

$$H(t, q, p) = \sum_{|k|=0}^{m} h_k(t, q)p^k,$$

где $t \in [0, T]$, $q, p \in \mathbf{R}^d$, $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_i = 0, 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, d$, $|k| = k_1 + \ldots + k_d$, $p^k = p_1^{k_1} \ldots p_d^{k_d}$; h_k - гладкие функции со значениями в пространстве $M_n(\mathbf{C})$, обладающие следующими свойствами:

$$h_k(t, q) = \int \exp(iqy)\hat{h}_k(t, dy),$$

где $\hat{h}_k(t, \cdot)$ - семейства $M_n(\mathbf{C})$-значных борелевских мер на $\mathbf{R}^d$, причем для любого борелевского множества $B \subset \mathbf{R}^d$ и любых индексов k функция $\hat{h}_k(t, B):[0, T] \to M_n(\mathbf{C})$ измерима и

$$\int_0^T d\tau \int ||\hat{h}_k(\tau, dp)||<p>^\alpha < C_3^\alpha \text{ для любого } \alpha = 0,1,2,\ldots, \text{ где } C_3 > 0.$$

ПДО $H(t, x, -x\partial)$ действует на функцию $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^h)$ следующим образом:

$$H(t, x, -i\partial)\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \exp(ip(x - q))H(t, x, p)\phi(q)dqdp, \quad x, p, q \in \mathbf{R}^d.$$

В этом случае оператор $H(t, x, -i\partial)$ называется ПДО с qp-символом /см., например,[/8/] /.

Предполагается, что для функции u_0 выполнено условие

$$u_0(x) = \int \exp(ixp)\hat{u}_0(dp),$$

где $\hat{u}_0$ - борелевская мера на $\mathbf{R}^d$.

Рассмотрим функцию

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^t d\theta_n \int_0^{\theta_n} d\theta_{n-1} \ldots \int_0^{\theta_2} d\theta_1 \int \hat{H}(\theta_n, dp_n, \sum_{j=0}^{n-1} p_j) \times \qquad /7/$$

$$\times \ldots \times \hat{H}(\theta_1, dp_1, p_0)\hat{u}_0(dp_0)\exp(ix\sum_{j=0}^{n} p_j),$$

где использовано обозначение

$$\hat{H}(t, dy, p) = \sum_{|k|=0}^{m} \hat{h}_k(t, dy)p^k.$$

Теорема 2. Функция $u(t, x)$ является решением задачи Коши[/6/].

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

При некоторых более сильных ограничениях на символ ПДО $H(t, x, -i\partial)$ ряд /7/ также можно записать в виде интеграла Фейнмана. Для этого необходимо рассмотреть функционал

$$\Psi_2(t, x, \eta, \xi) = T\text{-}\exp[i\int_0^t H(s, x + \eta((s, t]), \xi(s))ds]u_0(x + \eta((0, t])),$$

$$t \in [0, T], \; x \in \mathbf{R}^d, \; \xi \in B[0, T], \; \eta \in B'[0, T]. \qquad /8/$$

Значение интеграла

$u(t, x) = \int \hat{\Psi}_2(t, x, d\xi, \xi)$,

где

$\Psi_2(t, x, \eta, \xi) = \int \exp(i\langle\eta, \xi\rangle)\, \hat{\Psi}_2(t, x, d\zeta, \xi)$,

совпадает с суммой ряда /7/.

Замечание 1. Аналогичные формулы справедливы для решений систем уравнений с ПДО с pq-символом. В этом случае $\hat{H}(\theta_k, dp_k, \sum_{j=0}^{k-1} p_j)$ в формуле /7/ нужно заменить на $\hat{H}(\theta_k, dp_k, \sum_{j=0}^{k} p_j)$, а $\eta((s, t])$ в формуле /8/ - на $\eta([s, t])$.

Замечание 2. Аналогичные результаты можно получить для бесконечномерных систем псевдодифференциальных уравнений в случае, когда аргумент x неизвестной функции u принадлежит произвольному банахову пространству X /ср.[9] /. Для этого можно использовать теорию бесконечномерных ПДО, предложенную в работе[10].

Автор благодарен О.Г.Смолянову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
2. Смолянов О.Г. - Докл. АН СССР, 1982, т.263, с.558.
3. Watanabe H. - Journal Funct. Anal., 1986, v.65, p.204.
4. Ктитарев Д.В. - Матем.заметки, 1987, т.42, с.40.
5. Чеботарев А.М. - Матем.заметки, 1978, т.24, с.699.
6. Маслов В.П., Шишмарев И.А. - В кн.: Совр.пробл.матем., т.8. М.: ВИНИТИ, 1977, с.137.
7. Колмогоров А.Н. Избранные труды: математика и механика. М.: Наука, 1985, с.96.
8. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
9. Ктитарев Д.В. - Деп.ВИНИТИ 08.01.87, № 164-В87.
10. Хренников А.Ю. - Теор.матем.физ., 1986, т.66, с.339.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 февраля 1988 года.

Ктитарев Д.В. Р5-88-119
Формула Фейнмана для систем уравнений в частных производных с постоянными или быстро убывающими коэффициентами

Рассматривается задача Коши для систем линейных псевдодифференциальных уравнений. Для двух классов таких систем, содержащих системы уравнений в частных производных с постоянными и переменными быстро убывающими коэффициентами, получена формула для решения в виде ряда. Этот ряд можно записать в форме интеграла Фейнмана в фазовом пространстве от хронологической экспоненты операторнозначного символа псевдодифференциального оператора.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Ktitarev D.V. P5-88-119
Feynman Formula for Systems of Partial Differential Equations with Constant or Rapidly Decreasing Coefficients

The Cauchy problem for the systems of linear pseudodifferential equations is considered. For two classes of such systems including partial differential systems with constant and rapidly decreasing variable coefficients a solution by series is obtained. The series is represented in the form of Feynman integral in phase space of chronological exponent of operator-valued symbol of pseudodifferential operator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988