сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-87-77

П.Е.Жидков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВИДА КИНКОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

1987

I. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию нелинейных волн посвящено большое число работ (см. [I-I3]). В частности, большой интерес у исследователей вызывает изучение их устойчивости. Подробный перечень физической литературы и результатов численных экспериментов по этой тематике можно найти в обзорах [4-6]. Первым строгим математическим результатом в этом направлении явилась работа Бенжамина [7], в которой впервые введено понятие устойчивости формы солитона и доказана теорема об устойчивости для солитонов уравнения Кортевега- де Фриза. Эти исследования были продолжены рядом авторов для других уравнений (полный перечень этих работ имеется в обзоре [8]). Из последних работ отметим [9,I0], в которых доказана устойчивость кинков для вещественного уравнения Клейна-Гордона и для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза соответственно.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t+u_{xx}+f(|u|^2)u=0. \tag{I.I}$$

Его замечательным свойством является интегрируемость методом обратной задачи рассеяния при $f(s)=\pm s$ [2]. Оно обладает играющими важную роль в физических исследованиях решениями вида

$$\Phi(x,t)=\exp\left\{i\left[bx-(bx-(b^2+\bar{\omega})t\right]\right\}A(x-2bt) \tag{I.2}$$

с вещественной функцией A, удовлетворяющей уравнению

$$A''+\bar{\omega}A+f(A^2)A=0, \tag{I.3}$$

Ранее исследовалась устойчивость решений вида (I.2), обращающихся в нуль при $|x|\to\infty$. Решение $\Phi(x,t)$ называлось устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что любого решения уравнения (I.I), для которого $\rho(u,\Phi)|_{t=0}<\delta$, для всех $t>0$ имеет место неравенство $\rho(u,\Phi)<\varepsilon$, где для произвольных u, $v\in W_2^1(R^1)$ функция $\rho(u,v)$ определяется формулой

$$\rho(u,v)=\inf_{-\infty<\tau<\infty,\,\varphi\in[0,2\pi]}\|u(x)-e^{i\varphi}v(x-\tau)\|,\quad \|u\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[|u(x)|^2+|u'(x)|^2dx\right.\right\}^{1/2}.$$

Для стоячих волн ($b=0$) наиболее полный результат получен в работах /II,I2/, в которых доказана соответственно устойчивость основного состояния и получены достаточные условия устойчивости произвольного решения вида (I.2) для многомерного уравнения Шредингера. В общем случае ($b\neq 0$) имеется работа /I3/ - доказана устойчивость для $f(s)=|s|$.

В настоящей статье изучаются решения вида (I.2) с огибающей $A(x)$ -монотонной ограниченной функцией. Доказано, что такие решения устойчивы в некотором смысле при самых общих предположениях относительно функции f .

2. Основной результат. Задача Коши

Пусть функция A удовлетворяет уравнению (I.3), монотонна и $A(-\infty)=A_1$, $A(+\infty)=A_2$, $|A_1|+|A_2|<\infty$. Пусть выполнены условия:

(а) $A_1, A_2 \geqslant 0$;

(б) $\bar{\omega}+f(A_i^2)+2A_i^2 f'(A_i^2)>0$, $(i=1,2)$.

Условие (б) обеспечивает быстрое убывание $[A(x)-A_i]$ и A_i' при $|x|\to\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[A(x)-A_1]e^{-\gamma x}=0\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}[A(x)-A_2]e^{\gamma x}=0\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}A'(x)e^{-\gamma x}=0\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}A'(x)e^{\gamma x}=0$$

для некоторого $\gamma>0$ /I4/.

Введем следующие обозначения. Положим

$$|g(x)|_C=\sup_{-\infty<x<\infty}|g(x)|\,,\qquad |g|_P=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^P dx\right\}^{1/P}\,,$$

$$\|g\|_q=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[q|g(x)|^2+|g'(x)|^2]dx\right\}^{1/2}\,,$$

где p , q - положительные постоянные. Известно, что при различных q величины $\|g\|_q$ определяют эквивалентные нормы пространства $W_2^1(R^1)$. В дальнейшем будет использоваться неравенство Соболева

$$|g|_C\leq C_q\|g\|_q\,,$$

где C_q - постоянная, зависящая лишь от q .

Рассмотрим задачу Коши

$$iu_t+u_{xx}+f(|u|^2)u=0,\quad t>0,\ -\infty<x<\infty, \tag{2.I}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\ .$$

Будем предполагать в дальнейшем, что для любой функции $u_0(x)$, достаточно близкой к $\Phi(x,0)$, задача (2.I) имеет глобальное (определенное для всех $t>0$) решение. Более точно, предположим, что если $[\Phi(x,0)-u_0(x)]$ гладкая, быстро убывающая при $|x|\to\infty$ функция, то существует гладкое решение задачи (2.I), определенное для всех $t>0$, причем равномерно по любому конечному интервалу изменения t величины

$$u(x,t)-A_1\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}\ ,\quad u_x'(x,t)-ibA_1\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}\ ,$$

$$u_t'(x,t)+i(b^2+\bar{\omega})A_1\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}, \tag{2.2}$$

$$u_{xt}''(x,t)-b(b^2+\bar{\omega})A_1\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}\ ,$$

$$u_{xx}''(x,t)+b^2A_1\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}$$

быстро убывают при $x\to-\infty$, а величины

$$u(x,t)-A_2\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}\ ,\quad u_x'(x,t)-ibA_2\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\},$$

$$u_t'(x,t)+i(b^2+\bar{\omega})A_2\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}\ , \tag{2.3}$$

$$u_{xt}''(x,t)-b(b^2+\bar{\omega})A_2\exp\{i[bx-(b^2+\bar{\omega})t]\}\ ,$$

$$u_{xx}''(x,t)+b^2A_2\exp\{i[bx+(b^2+\bar{\omega})t]\}$$

быстро убывают при $x\to+\infty$.

К настоящему времени имеются лишь работы, в которых приводятся теоремы существования решения задачи Коши (2.I) в классах функций, элементы которых стремятся к нулю при $|x|\to\infty$ /I5,I6/. Утверждение, справедливость которого предполагается, можно надеяться и доказать, например, сделав в задаче (2.I) замену $u(x,t)=\Phi(x,t)+h(x,t)$ и исследуя задачу Коши, получающуюся для функции h , в классе быстро убывающих функций методами, предложенными в указанных работах. В дальнейшем будем рассматривать лишь решения задачи (2.I), удовлетворяющие свойствам (2.2),(2.3).

Рассмотрим функцию $R(\tau)=\big\|\,|u(x-\tau,t)|-|\Phi(x,t)|\,\big\|_q$.

Лемма 2.I.

Функция $R(\tau)$ достигает своего абсолютного минимума при некотором $\tau=\tau_0(t)$.

Доказательство

Ясно, что $R(\tau)\to+\infty$ при $\tau\to\infty$, поэтому достаточно доказать непрерывность $R(\tau)$. Имеем для произвольного $c>0$:

$$R^2(\tau) = \int_{-c}^{c}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)| - |\Phi(x,t)|\right]^2 + \left[|u_x'(x-\tau,t)| - |\Phi_x'(x,t)|\right]^2\right\}dx +$$

$$\int_{-\infty}^{-c}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)| - |\Phi(x,t)|\right]^2 + \left[|u_x'(x-\tau,t)| - |\Phi_x'(x,t)|\right]^2\right\}dx +$$

$$\int_{c}^{+\infty}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)| - |\Phi(x,t)|\right]^2 + \left[|u_x'(x-\tau,t)| - |\Phi_x'(x,t)|\right]^2\right\}dx .$$

Зафиксируем некоторые $\tau_1 \in R^1$, $\varepsilon > 0$. Ясно, что можно выбрать $c > 0$ так, что

$$\int_{-\infty}^{-c} + \int_{c}^{+\infty} < \varepsilon$$

для всех $\tau \in (\tau_1 - 1, \tau_1 + 1)$. Далее,

$$\lim_{\tau\to\tau_1}\int_{-c}^{c}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)| - |\Phi(x,t)|\right]^2 + \left[|u_x'(x-\tau,t)| - |\Phi_x'(x,t)|\right]^2\right\}dx =$$

$$\int_{-c}^{c}\left\{q\left[|u(x-\tau_1,t)| - |\Phi(x,t)|\right]^2 + \left[|u_x'(x-\tau_1,t)| - |\Phi_x'(x,t)|\right]^2\right\}dx .$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{\tau\to\tau_1}}\,|R(\tau) - R(\tau_1)| \le \varepsilon .$$

Лемма 2.I доказана.

Положим $v(x,t) = u(x-\tau_0,t)$. Введем следующие обозначения:

$$\Phi(x,t) = A(x,t)e^{i\varphi(x,t)}, \quad v(x,t) = \left[A(x,t) + a(x,t)\right]e^{i[\varphi(x,t)+\omega(x,t)]},$$

где $A = |\Phi|$, $\varphi(x,t) = bx - (b^2 + \bar\omega)t$, $a = |v| - A$, функцию ω определим следующим образом. Для каждого t рассмотрим множество $U = U(t) = \{x \mid v(x,t) \ne 0\}$. Очевидно, U – открытое множество, поэтому оно может быть представлено как объединение не более чем счетного числа непересекающихся интервалов. На каждом из них определим ω таким образом, чтобы функция $[\omega(x,t) + \varphi(x,t)]$ была равна произвольной непрерывной ветви функции $\operatorname{Arg} v(x,t)$ положим, $\omega(x,t) = 0$ при $x \notin U$. Положим

$$\omega_1(x,t) = \begin{cases} \omega_x'(x,t), & \text{если } x \in U \\ 0, & \text{если } x \notin U. \end{cases}$$

Основной результат работы составляет

Теорема

Пусть $f \in C^1_{loc}(R^1)$ и пусть выполнены свойства (а),(б). Тогда для некоторого $q > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $\|a\|_q\big|_{t=0} < \delta$ и $\left|\omega_1(A+a)\right|_2\big|_{t=0} < \delta$, то для

всех $t > 0$ имеют место неравенства $\|a\|_q < \varepsilon$, $|\omega_1(A+a)|_2 < \varepsilon$.

Поясним смысл этой теоремы. Из нее вытекает устойчивость формы огибающей решений (I.2) с $A(x)$ – монотонной функцией. Пусть еще для простоты $A_1 > 0$, $A_2 > 0$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $d > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $\tau_0 = \tau_0(t)$ такие, что если $\|a\|_q\big|_{t=0} < \delta$ и $|\omega_1(A+a)|_2\big|_{t=0} < \delta$, то каково бы ни было $x_0 \in R^1$, найдется $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ такое, что для всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$\left\| u(x-\tau_0,t)e^{i\varphi_0} - \Phi(x,t)\right\|_{W_2^1(x_0-d,\,x_0+d)} < \varepsilon ,$$

т.е., как говорят, решение Φ устойчиво с точностью до сдвига и поворота.

3. Доказательство устойчивости

Введем функцию $U(s) = \frac{1}{2}\int_0^s f(p)dp$ (формулируем необходимое и достаточное условие существования монотонного ограниченного решения уравнения (I.3).

Лемма 3.I

Пусть для определенности $A_1 < A_2$. Для того, чтобы уравнение (I.3) имело монотонное решение $A(x)$, удовлетворяющее условиям $A(-\infty) = A_1$, $A(+\infty) = A_2$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(в) $\bar\omega + f(A_i^2) = 0$, $i = 1,2$;

(г) $\frac{\bar\omega}{2}A_1^2 + U(A_1^2) = \frac{\bar\omega}{2}A_2^2 + U(A_2^2)$;

(д) $\frac{\bar\omega}{2}s^2 + U(s^2) < \frac{\bar\omega}{2}A_1^2 + U(A_1^2)$ для всех $s \in (A_1, A_2)$.

Доказательство

Ясно, что для любого решения уравнения (I.3) справедливо тождество

$$\left\{\frac{1}{2}A'^2 + \frac{\bar\omega}{2}A^2 + U(A^2)\right\}' = 0 . \tag{3.I}$$

Пусть $A(x)$ – монотонное решение уравнения (I.3) с $A(-\infty) = A_1$, $A(+\infty) = A_2$. Условие (в) выполняется тогда в силу уравнения (I.3), а условия (г),(д) сразу вытекают из тождества (3.I).

Пусть выполнены условия (в)-(д). Зафиксируем любое $x_0 \in R^1$ и рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.I) с начальными условиями

$$A(x_0) = (A_1 + A_2)/2, \quad A'(x_0) = \left\{\bar\omega A_1^2 + 2U(A_1^2) - \bar\omega(A_1+A_2)^2/4 + 2U((A_1+A_2)^2)/4\right\}^{1/2} .$$

Легко убедиться в том, что ее решение монотонно и удовлетворяет условиям $A(-\infty) = A_1$, $A(+\infty) = A_2$.

Лемма 3.I доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены свойства (а)-(д).

Лемма 3.2

Функционал $I(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}|u_x|^2-U(|u|^2)-ibu\bar{u}_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}|u|^2+C\right\}dx$,
где $C=\frac{\bar{\omega}}{2}A_1^2+U(A_1^2)$, определен и не зависит от t на решениях задачи (2.I), удовлетворяющих свойствам (2.2), (2.3).

Доказательство

Подставляя асимптотики u, u_x при $x\to\pm\infty$, легко убедиться, что функционал $I(u)$ определен. Далее,

$$\frac{dI(u)}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}u_{xt}\bar{u}_x+\frac{1}{2}u_x\bar{u}_{xt}-\frac{1}{2}f(|u|^2)(u_t\bar{u}+u\bar{u}_t)-ibu_t\bar{u}_x-ibu\bar{u}_{xt}+\right.$$
$$\left.+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}u_t\bar{u}+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}u\bar{u}_t\right\}dx=$$

[В силу равномерности асимптотик (2.2), (2.3) по t этот интеграл сходится равномерно на любом конечном интервале изменения t, поэтому такое дифференцирование под знаком интеграла законно]

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(u_t\bar{u}_x)_x-\frac{1}{2}u_t\bar{u}_{xx}+\frac{1}{2}(u_x\bar{u}_t)_x-\frac{1}{2}u_{xx}\bar{u}_t-\frac{1}{2}f(|u|^2)u_t\bar{u}-\frac{1}{2}f(|u|^2)u\bar{u}_t-\right.$$
$$\left.ibu_t\bar{u}_x-ib(u\bar{u}_t)_x+ibu_x\bar{u}_t+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}u_t\bar{u}+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}u\bar{u}_t\right\}dx=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{2}(u_t\bar{u}_x)_x+\frac{1}{2}(u_x\bar{u}_t)_x-ib(u\bar{u}_t)_x\right]+\right.$$
$$u_t\left(-\frac{1}{2}\bar{u}_{xx}-\frac{1}{2}f(|u|^2)\bar{u}-ib\bar{u}_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}\bar{u}\right)+$$
$$\left.\bar{u}_t\left(-\frac{1}{2}u_{xx}-\frac{1}{2}f(|u|^2)u+ibu_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}u\right)\right\}dx=$$

[Используя асимптотики (2.2), (2.3), легко убедиться в том, что интеграл от выражения в квадратных скобках равен нулю]

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{u_t\left(-\frac{1}{2}i\bar{u}_t-ib\bar{u}_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}\bar{u}\right)+\bar{u}_t\left(\frac{1}{2}iu_t+ibu_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}u\right)\right\}dx=$$

[Подставляем u_t, $\bar{u}_t$ из уравнения (2.I)]

$$=i\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(u_{xx}+f(|u|^2)u)\left(-ib\bar{u}_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}\bar{u}\right)-(\bar{u}_{xx}+f(|u|^2)\bar{u})\left(ibu_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}u\right)\right\}dx=$$

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-ib(u_{xx}\bar{u}_x+u_x\bar{u}_{xx})+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}(u_{xx}\bar{u}-u\bar{u}_{xx})-ibf(|u|^2)(u\bar{u}_x+u_x\bar{u})\right\}dx=$$

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-ib(|u_x|^2)_x+\frac{-\bar{\omega}+b^2}{2}(u_x\bar{u}-u\bar{u}_x)_x-2ib\left[U(|u|^2)\right]'_x\right\}dx=$$

[Опять используем асимптотики (2.2), (2.3)]

$=0$.

Таким образом, $\frac{dI(u)}{dt}=0$ и лемма 3.2 доказана.

Нетрудно убедиться в том, что $I(u)=I(v)$. В обозначениях п.2 $I(\Phi)$ и $I(v)$ запишутся следующим образом:

$$I(\Phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}A_x^2-U(A^2)-\frac{\bar{\omega}}{2}A^2+C\right\}dx,$$
$$I(U)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(A_x+a_x)^2+\frac{1}{2}\omega_1^2(A+a)^2-U((A+a)^2-\frac{\bar{\omega}}{2}(A+a)^2+C\right\}dx.$$

Следовательно, $\Delta I=I(v)-I(\Phi)=$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[a_xA_x-\bar{\omega}aA-f(A^2)Aa\right]+\frac{1}{2}\omega_1^2(A+a)^2+\frac{1}{2}\left[a_x^2-(\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2))a^2\right]+\right.$$
$$\left.\frac{a^2}{2}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)-f((A+\theta a)^2)-2(A+\theta a)^2f'((A+\theta a)^2)\right]\right\}dx,$$

где $\theta=\theta(x,t)\in(0,1)$. Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}a_xA_xdx=\int_{-\infty}^{\infty}\{(aA_x)_x-aA_{xx}\}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}aA_{xx}dx$, первое слагаемое в квадратных скобках в выражении для ΔI равно нулю.

Таким образом,

$$\Delta I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\omega_1^2(A+a)^2+\left[a_x^2-(\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2))a^2\right]+\right. \tag{3.2}$$
$$\left.a^2\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)-f((A+\theta a)^2)-2(A+\theta a)^2f'((A+\theta a)^2)\right]\right\}dx.$$

Из этого представления сразу вытекает

Лемма 3.3

Для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для произвольной функции $u_0(x)$ из задачи (2.I), удовлетворяющей условиям $\|a\|_q\big|_{t=0}<\delta$, $\big|\omega_1(A+a)\big|_2\big|_{t=0}<\delta$, выполняется неравенство $|I(v)-I(\Phi)|<\varepsilon$.

Рассмотрим функционал $J(g)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g_x^2-(\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2))g^2\right\}dx$.

Оценим его снизу. При получении этой оценки воспользуемся методами работы /9,10/.

Лемма 3.4

Существует не зависящая от g, x и t постоянная $c_1>0$ такая, что $J(g)\geqslant c_1|g|_2^2$ для всех функций g, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)A_x'(x,t)dx = 0. \qquad (3.3)$$

Доказательство

Рассмотрим оператор $L\varphi=\varphi''+q(x)\varphi$, $-\infty<x<\infty$, где $q(x)=\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)$. Положим $q_i=\bar{\omega}+f(A_i^2)+2A_i^2f'(A_i^2)$, $i=1,2$. В силу условия (б) $q_i>0$, $i=1,2$.

Известно (см. /15/), что непрерывный спектр оператора L совпадает с полупрямой $[b,+\infty)$, где $b=\min\{q_1;q_2\}$. Далее, дифференцируя (1.3) по x, убеждаемся, что поскольку $A'(x)\in L_2(R^1)$, $\varphi_0=A'(x)$ является собственной функцией оператора L, отвечающей собственному значению $\lambda_0=0$, причем поскольку $A'(x)$ сохраняет знак, λ_0 - наименьшее и простое собственное значение. Из спектрального разложения самосопряженного в $L_2(R^1)$ расширения оператора L /17/ вытекает для всех g, удовлетворяющих (3.3):

$$J(g)=(G,LG)\geqslant\lambda|g|_2^2,$$

где λ равно b, если у оператора L нет положительных собственных значений, либо равно наименьшему из этих значений.

Лемма 3.4 доказана.

Величина $\tau_0(t)$ была определена как точка минимума функции $R(\tau)$, которая существует в силу леммы 2.1. Следовательно,

$$0=(R^2(\tau))'\Big|_{\tau=\tau_0}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(q\left[(A(x,t)+a(x,t)-A(x+\tau-\tau_0,t)\right]^2+\left[A_x'(x,t)+a_x'(x,t)-A_x'(x+\tau-\tau_0,t)\right.^2)dx\right\}_\tau'\Big|_{\tau=\tau_0}=$$

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\left[qa(x,t)A_x'(x,t)+a_x'(x,t)A_{xx}''(x,t)\right]dx=$$

$$2\int_{-\infty}^{\infty}a(x,t)\left[qA_x'(x,t)-A_{xxx}(x,t)\right]dx=$$

$$2\int_{-\infty}^{\infty}a(x,t)A_x'(x,t)\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx=0,$$

Возьмем теперь $q=1+\sup_x|\bar{\omega}+f(A^2(x))+2A^2(x)f'(A^2(x))|$.

Положим

$$K_q=\frac{|A'|_2\,|A'(q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2))|_2}{\int_{-\infty}^{\infty}A'^2(q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2))dx}.$$

Ясно, что $0<K_q<+\infty$.

Лемма 3.5

В классе функций $g\in W_2^1(R^1)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)A_x'(x,t)\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx=0, \qquad (3.4)$$

справедлива оценка $J(g)\geqslant c_2|g|_2$, где $c_2=c_1/(1+K_q)^2$.

Доказательство

Представим g в виде $g=\alpha A'+\varphi$, где $\int_{-\infty}^{\infty}A_x'\varphi dx=0$. Тогда $J(g)=J(\varphi)\geqslant c_1|\varphi|_2^2$. Из условия (3.4) получаем:

$$\alpha\int_{-\infty}^{\infty}A_x'^2\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi A_x'\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx=0.$$

Отсюда получаем:

$$|\alpha|\cdot|A_x'|_2=|A_x'|_2\cdot\left|\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi A_x'\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx}{\int_{-\infty}^{\infty}A_x'^2\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|A_x'|_2\,|\varphi|_2\cdot\frac{\left|A_x'\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right|_2}{\left|\int_{-\infty}^{\infty}A_x'^2\left[q+\bar{\omega}+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx\right|}=K_q|\varphi|_2.$$

Далее, имеем: $|g|_2\leqslant|\alpha|\cdot|A_x'|_2+|\varphi|_2\leqslant(1+K_q)|\varphi|_2$.

Следовательно, $J(g)=J(\varphi)\geqslant c_1|\varphi|_2^2\geqslant c_2|g|_2^2$,

где $c_2=c_1/(1+K_q)^2$, и лемма доказана.

Лемма 3.6

В классе функций $g\in W_2^1(R^1)$, удовлетворяющих условию (3.4), справедлива оценка $J(g)\geqslant c_3\|g\|_q^2$ с некоторой положительной постоянной c_3.

Доказательство

Для произвольного K имеем:

$$J(g)=(1-k)\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g_x^2-g^2\left[\bar\omega+C_2+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx+$$

$$k\int_{-\infty}^{\infty}g_x^2dx+(1-k)C_2\int_{-\infty}^{\infty}g^2dx-k\int_{-\infty}^{\infty}g^2\left[\bar\omega+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]dx \quad .$$

Здесь первое слагаемое неотрицательно в силу леммы 3.5. Кроме того, найдется $k=k_o>0$, такое, что

$$k_o\max_x\left|\bar\omega+f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right|\leqslant(1-k_o)C_2/2.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$J(g)\geqslant k_o\int_{-\infty}^{\infty}g_x^2\,dx+\frac{(1-k_o)C_2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}g^2\,dx\geqslant C_3\,\|g\|_q^2\quad .$$

Лемма 3.6 доказана.

Оценим теперь последнее слагаемое в выражении для ΔI . Имеет место

Лемма 3.7

Существует определенная на полупрямой $s\geqslant 0$ неотрицательная функция $L(s)$ такая, что $\lim\limits_{s\to+0}L(s)=0$, и справедливо неравенство

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}a^2\left[f(A^2)-f((A+\theta a)^2+2A^2f'(A^2)-2(A+\theta a)^2f'((A+\theta a)^2)\right]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|a\|_q^2\,L(\|a\|_q).$$

Доказательство

По теореме вложения Соболева $|g|_C\leqslant C_4\|g\|_q$ для любой $g\in W_2^1(R^1)$, где $C_4=\mathrm{const}>0$. Положим $L(0)=0$, для любого $s>0$

$$L(s)=\sup_{|\varphi|\leqslant C_4s}\ \sup_{A_1<\psi<A_2}\left|f(\psi^2)+2\psi^2f'(\psi^2)-f((\varphi+\psi)^2)+2(\varphi+\psi)^2f'((\varphi+\psi)^2)\right|\ .$$

Свойство $\lim\limits_{s\to+0}L(s)=0$ вытекает из равномерной непрерывности функций f, f' на любом конечном промежутке, и лемма доказана.

Лемма 3.8

$\|a\|_q$ – непрерывная функция t .

Доказательство

Для произвольных t_1 , t_2 имеем:

$$\|a(\cdot,t_1)\|_q-\|a(\cdot,t_2)\|_q=$$

$$\|A(x+\tau_o(t_1),t_1)-|u(\cdot,t_1)|\|_q-\|A(x+\tau_o(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\|_q\leqslant$$

$$\|A(x+2b(t_1-t_2)+\tau_o(t_2),t_1)-|u(\cdot,t_1)|\|_q-\|A(x+\tau_o(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\|_q=$$

$$\|A(x+\tau_o(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_1)|\|_q-\|A(x+\tau_o(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\|_q\leqslant$$

$$\|\,|u(\cdot,t_1)|-|u(\cdot,t_2)|\,\|_q\quad .$$

Отсюда в силу произвольности t_1 , t_2 и предположений о свойствах решения $u(x,t)$ вытекает утверждение леммы.

Теперь все готово для доказательства теоремы. Из выражения (3.2) для ΔI , лемм 3.6 и 3.7 вытекает следующая оценка:

$$\Delta I\geqslant C_3\,\|a\|_q^2-\|a\|_q^2\,L(\|a\|_q). \tag{3.5}$$

Положим $H(s)=C_3s^2-s^2\,L(s)$. По лемме 3.7 найдется $\delta_1>0$, такое, что для любого s : $0<s\leqslant\delta_1$ справедливо неравенство $H(s)\geqslant C_3/2s^2$. Зафиксируем любое $\delta_2<\delta_1$ и воспользуемся леммой 3.3. По этой лемме найдется $\delta_3\leqslant\delta_2$ такое, что $\Delta I\leqslant\frac{C_3}{4}\delta_2^2$ при $\|a\|_q\big|_{t=0}<\delta_3$, $|\omega_1(A+a)|_2\big|_{t=0}<\delta_3$. Тогда в силу леммы 3.8 и неравенства (3.5) очевидно,

$$\|a\|_q\leqslant\delta_2 \tag{3.6}$$

для всех $t\geqslant 0$. Тем самым доказано, что $\|a\|_q\to 0$ равномерно по $t>0$ при $\|a\|_q\big|_{t=0}\to 0$, $|\omega_1(A+a)|_2\big|_{t=0}\to 0$. Для доказательства аналогичного утверждения для $|\omega_1(A+a)|_2$ достаточно заметить, что

$$0\leqslant|\omega_1(A+a)|_2^2\leqslant\Delta I-J(a)-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}a^2\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)-f((A+\theta a)^2)\right.-$$

$$\left.2(A+\theta a)^2f'((A+\theta a)^2)\right]dx\to 0\quad\text{при}\quad\|a\|_q\big|_{t=0}\to 0\ ,$$

$$|\omega_1(A+a)|_2\big|_{t=0}\to 0\quad .$$

Тем самым теорема доказана.

4. Приложение

Полученный результат может быть применен для исследования устойчивости кинков для модели бозе-газа с нелинейностью (u^3-u^5):

$$iu_t+u_{xx}+\alpha u+u(|u|^2-|u|^4) = 0 . \qquad (4.I)$$

Нетрудно проверить, что в силу леммы 3.I уравнение (4.I) имеет решение вида (I.2) с огибающей $A(x)$ - монотонной ограниченной функцией при $\tilde{\omega}=-\alpha-3/16$, причем огибающая $A(x)$ удовлетворяет условию

$$A(x)>0 .$$

Нетрудно заметить, что уравнение (I.3) для функции $A(x)$ интегрируемо в квадратурах. Аналитическое представление для указанных решений найдено в работе /I8/. В силу доказанной теоремы эти решения устойчивы.

В заключение автор выражает благодарность К.П.Кирчеву, В.Г.Маханькову и И.В. Барашенкову за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, I977.
2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. - М., Наука, I980.
3. Солитоны (под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри) - М., Мир, I983.
4. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M. Soliton stability. Ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР, препринт, I983, № I99, с.62.
5. Makhankov V.G. Dynamics of classical solitons(in nonintegrale systems). Phys. Rep., 1978, vol. 35, No1, p.1-128.
6. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. ЭЧАЯ, I983, т.I4, вып.I, стр.I23-I80.
7. Benjamin T.B. The Stability of solitary waves. Proc. Royal Soc. London, 1972, vol. A328, p.153-183.
8. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики. - ЭЧАЯ, I985, т.I6, вып.3, стр.597-648.
9. Henri D.B., Perez J.F., Wreszinski W.F. Stability theory for solitary wave solutions of scalar field equation. Commun. Math. Phys., 1982, vol.85, No3, p.351-361.
I0. Илиев И.Д., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида кинков для некоторых нелинейных уравнений, подобных уравнению Кортевега-де Фриза. ОИЯИ, Р5-86-47, Дубна, I986.

II. Cazenave T., Lions P.L. Orbital Stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. Commun. Math. Phys., 1982, vol. 85, No 4, p.549-561.
I2. Weinstein M.I. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations. Commun. on Pure and Appl. Math., 1986,vol. 39, No1,p.51-67.
I3. Жидков П.Е. Об устойчивости солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера. Дифференциальные уравнения, I986, т.XXII, № 6, стр.994-I004.
I4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., ИЛ, I954.
I5. Tsutsumi M. Weighted Sobolev spaces and repeadly decreased solutions of some nonlinear dispersive wave equations. Journal of differ. equat.,1981,v.42,No2,p.260-281.
I6. Ginibre J., Velo G. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. Journal of funct. anal., 1979, vol.32, p.1-32.
I7. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. т.2. Спектральная теория. - М., Мир, I966.
I8. Barashenkov I.V., Makhankov V.G. Soliton-like excitations in a one-dimensional nuclear matter. JINR, E2-84-173, Dubna, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
II февраля I987 года.