сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-766

Р.М.Ямалеев

# АНАЛОГИ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА ДЛЯ ФОРМ ВЫШЕ КВАДРАТИЧНЫХ И ИХ МАТРИЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

1987

## ВВЕДЕНИЕ

Не будет сильным преувеличением, если утверждать, что структура современной механики (классической и квантовой) основана на квадратичных формах. Достаточно вспомнить, что классический оператор Гамильтона для свободного движения пропорционален сумме квадратов компонент импульса, релятивистское соотношение между массой, энергией, импульсом есть квадратичная форма. Основное понятие геометрии - расстояние (интервал) тоже квадратичная форма. Далее, в механике и в геометрии важное значение имеют группы движения, оставляющие неизменным инвариант-определенную квадратичную форму.

После того как было открыто такое физическое явление, как спин, и была создана стройная теория этого явления, с претенциозной точностью описывающая эксперимент, стало ясно, что основу теории составляет не столько квадратичная форма, сколько ее линеаризованный вариант, т.е. билинейная форма с образующими соответствующей алгебры. Этот факт побудил огромный интерес и привел к практически исчерпывающему исследованию алгебр Клиффорда, Грассмана, Даффина-Кеммера. Для образующих указанных алгебр были найдены конкретные матричные представления, играющие весьма важное значение при решении конкретных физических задач.

С открытием частиц со спином в аппарат квантовой механики вошли соотношения антикоммутации. Антикоммутаторы определяют перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения фермионов. Эти операторы имеют конечномерные представления в виде линейных комбинаций от образующих алгебр Клиффорда[1]. Последние, как мы знаем[2], призваны линеаризовать заданную квадратичную форму.

Первая попытка выйти за рамки билинейных соотношений в механике была предпринята Намбу[3]. Механика Намбу основана на полилинейных соотношениях, обобщающих скобки Пуассона. Правда, квантование механики Намбу путем замены скобок Пуассона соответствующими коммутационными соотношениями пока не привело к успеху. В связи с исследованием форм выше квадратичных возникает вопрос: существуют ли в данном случае алгебры, аналогичные алгебре Клиффорда? Если "да", то возможна ли матричная реализация этих алгебр ?

Когда мы говорим об аналогах алгебры Клиффорда, то прежде всего имеем в виду то свойство образующих этой алгебры, которое позволяет утвердить соотношение

$$e\left(\sum_{m=1} p_m^2\right) = \left(\sum_{m=1} \alpha_m p_m\right)^2,$$

$e$ – единица, $\alpha_m$ – образующие алгебры. Таким образом, мы ищем алгебру с такими образующими ( $e$ , $\alpha_m$ ), чтобы имело место

$$e\left(\sum_{m=1}^{M} p_m^N\right) = \left(\sum_{m=1}^{M} \alpha_m p_m\right)^N. \qquad (I)$$

Точнее, мы ищем матричное представление $\alpha_m$ в предположении, что соответствующая алгебра существует.

В свое время У.Бернсайд[4] обратил особое внимание на вопрос о локальной конечности групп с тождественным соотношением $X^N = 1$ . Исследования групп с образующими, удовлетворяющими этому соотношению, по сей день ведутся интенсивно[5]. В настоящей работе мы не рассматриваем групповые свойства $\alpha_m$. Мы ограничимся только алгебраическими свойствами $\alpha_m$ , вытекающими из (I), и поиском матричных представлений для $\alpha_m$.

## I. Полилинейные правила антикоммутации для образующих алгебры, факторизующей $N$ -форму

Определение

$N(M)$ -формой будем называть сумму вида $\sum\limits_{m=1}^{M} p_m^N$ (верхний индекс у многочленов соответствует показателю степени).

Основная наша задача состоит в представлении $N(M)$ -формы в виде линейной по $p_m$ суммы, возведенной в $N$-ую степень. Полученное выражение мы будем называть факторизованным, а сам процесс приведения – факторизацией $N(M)$-формы. В сущности, мы исследуем представление вида

$$e\,(p_1^N + p_2^N + \ldots + p_M^N) = (p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_M\alpha_M)^N, \qquad (I.I)$$

$\alpha_K$ – образующие искомой алгебры, $e$ – единица алгебры. При $N=2$ задача решается в рамках алгебры Клиффорда. Образующие этой алгебры удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$[\alpha_i, \alpha_j] := \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2e\,\delta_{ij}, \qquad (I.2)$$

что необходимо и достаточно, чтобы использовать их для факторизации $2(M)$ -формы[2].

Теперь получим соотношения, аналогичные (I.2) для $N(M)$-форм. Искомые соотношения будем выводить по индукции. Рассмотрим сначала $3(M)$ -форму:



$$e\,(p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_M^3) = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_M p_M)^3. \qquad (I.3)$$

Нетрудно убедиться, что $\alpha_K$ в этом случае должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$[\alpha_i, \alpha_j]\alpha_K + [\alpha_j, \alpha_K]\alpha_i + [\alpha_K, \alpha_i]\alpha_j = 0,$$
$$(i \neq j \text{ или } j \neq K \text{ или } i \neq K) \qquad (I.4)$$

и

$$\alpha_i^3 = \alpha_j^3 = \alpha_K^3 = e. \qquad (I.5)$$

Выражение (I.4) можно преобразовать к виду

$$[\alpha_i, \alpha_K, \alpha_j] := [[\alpha_i, \alpha_j], \alpha_K] + \text{(циклическая перестановка)} = 0. \qquad (I.6)$$

Заметим, что равенство (I.6) в точности совпадает с тождеством Якоби[6], если в этом тождестве коммутаторы заменить на антикоммутаторы. Естественным обобщением (I.6) на $N(M)$-формы являются равенства

$$[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3} \ldots \alpha_{i_K} \ldots \alpha_{i_N}] = 0,\ \alpha_{i_K}^N = e, \qquad (I.7)$$
$$1 \le i_K \le M,\ K = 1, 2, \ldots N.$$

Полилинейные (или $N$ -линейные) соотношения антикоммутации (I.7) строятся следующим образом. Сначала необходимо построить антикоммутатор из $N$ образующих:

$$[\ldots[[[\alpha_1, \alpha_2], \alpha_3], \alpha_4] \ldots], \qquad (I.8)$$

затем к этому выражению прибавить все антикоммутаторы, получаемые из (I.8) циклической перестановкой (например, по часовой стрелке) всех образующих, вошедших в (I.8). Полученное выражение будем называть $N$ -линейным антикоммутатором ( $N$-ЛА ).

## 2. Матричное представление образующих алгебры, удовлетворяющих (I.7)

В качестве первого шага рассмотрим кубическую форму, состоящую из двух слагаемых:

$$E_3\,(p_1^3 + p_2^3) = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)^3, \qquad (2.I)$$

$E_p$ – единичная матрица порядка $p$ .

Равенство (2.I) имеет силу, если $\alpha_1, \alpha_2$ удовлетворяют системе равенств ( $3$-ЛА ):

(а) $\alpha_1^3 = \alpha_2^3 = E_3$ ,

(б) $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_1 = 0$, (2.2)

(с) $\alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_1\alpha_2 = 0.$

Единственными матрицами, удовлеторяющими (а), являются циклические матрицы (3х3). Поэтому представление для $\alpha_1, \alpha_2$ будем искать среди матриц вида

$$\alpha_i := \begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & b_i \\ c_i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Для определения чисел $a_i$ , $b_i$ , $c_i$ ( $i$ = I,2) подставим матрицы $\alpha_i$ из (2.3) в (2.2). В результате для определения шести неизвестных получим три нелинейных уравнения. Положим $a_1 = b_1 = c_1 = 1$. Тогда для $a_2$ , $b_2$ , $c_2$ получим систему

$$\begin{gathered} a_2 + b_2 + c_2 = 0, \\ a_2 b_2 + b_2 c_2 + a_2 c_2 = 0, \\ a_2 b_2 c_2 = 1. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Легко заметить, что (2.4) есть система уравнений Виета для корней уравнения

$$x^3 - 1 = 0. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) имеет решение

$$x_K = exp(i 2\pi K/3) \quad , \quad (K = 1,2,3). \tag{2.6}$$

Обозначим $A = X_1 := \dfrac{i\sqrt{3} - 1}{2}$ , $\bar{A} = X_2 := \dfrac{-i\sqrt{3} - 1}{2}$ .

Таким образом, искомые матрицы имеют вид:

$$\alpha_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A} \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

В качестве второго шага рассмотрим форму четвертой степени, состоящую только из двух слагаемых:

$$E_4 (p_1^4 + p_2^4) = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)^4. \tag{2.8}$$

Здесь для определения $\alpha_1$, $\alpha_2$ имеем 5 соотношений:

$$\begin{aligned} &(а) \quad \alpha_1^4 = E_4 \ , \ \alpha_2^4 = E_4 , \\ &(б) \quad \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1^3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^2 + \alpha_1^3 \alpha_2 = 0, \\ &(с) \quad \alpha_2^2 \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_1 + (\alpha_2 \alpha_1)^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2 \alpha_1^2 \alpha_2 + (\alpha_1 \alpha_2)^2 = 0, \\ &(д) \quad \alpha_2^3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2^3 + \alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$



Соответственно, матрицы $\alpha_1$, $\alpha_2$ ищем в виде

$$\alpha_i := \begin{pmatrix} 0 & a_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_i \\ p_i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Положим $a_1 = b_1 = c_1 = p_1 = 1$.

Для $a_2$, $b_2$, $c_2$, $p_2$ имеем

$$\begin{gathered} a_2 + b_2 + c_2 + p_2 = 0, \\ a_2 b_2 + b_2 c_2 + b_2 p_2 + a_2 c_2 + c_2 p_2 + a_2 p_2 = 0, \\ a_2 b_2 c_2 + a_2 b_2 p_2 + a_2 c_2 p_2 + b_2 p_2 c_2 = 0, \\ a_2 b_2 c_2 p_2 = 1. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Как видно, (2.II) есть система Виета для корней уравнения

$$x^4 - 1 = 0.$$

Решениями этого уравнения являются

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -i \ , \ x_3 = -1 \ , \ x_4 = i.$$

Выпишем явный вид полученных матриц:

$$\alpha_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Метод индукции подсказывает нам решения проблемы в общем случае $N(2)$-формы. В этом случае $\alpha_1$ будет циклической матрицей порядка $N$ состоящей только из единичных элементов, а $\alpha_2$ - циклической матрицей, состоящей из корней уравнения $x^N - 1 = 0$ .

Таким образом, мы нашли матричное представление образующих (точнее, алгоритм построения таких представлений) для $N(2)$ -форм. Ясно, что для факторизации сумм при $M > 2$ нам придется иметь дело с матрицами более высокого порядка. В качестве примера рассмотрим алгоритм построения матриц высшей размерности для алгебры Клиффорда /7/.

$\underline{n=1}$ $\quad \alpha_{1,1} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{2,1} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$

$\underline{n=2}$ $\quad \alpha_{1,2} := (E_2 \otimes \alpha_{1,1}), \quad \alpha_{2,2} := (E_2 \otimes \alpha_{2,2}),$

$$\alpha_{3,2} := (\alpha_{1,1} \otimes \beta_1), \quad \alpha_{4,2} := (\alpha_{2,1} \otimes \beta_1), \quad \beta_2 := \beta_1 \otimes \beta_1$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$n=\ell$ $\quad \alpha_{i,\ell} := (E_2 \otimes \alpha_{i,\ell-1}), \quad (i = 1,2,\dots,2^{\ell-1}),$

$$\alpha_{i+1,\ell} := (\alpha_{i,\ell-1} \otimes \beta_{\ell-1}).$$

При построении матриц высших порядков для $N(M)$-форм мы будем следовать той же логике, что была продемонстрирована для образующих алгебры Клиффорда. Заметим, что обычно в качестве $\beta_n$ выбирают произведения всех матриц $\alpha_i$ для данного $n$ ; $\beta_n$ антикоммутирует со всеми $\alpha_i$ и $\beta_n^2 = E$ . Однако главное назначение $\beta_n$ - это ее роль при построении матриц - образующих при $n+1$. Оказалось, что такой алгоритм построения $\beta_n$ для $N(M)$ не годится. Приведенная выше формула $\beta_n = (\beta_1 \otimes \beta_{n-1})$ совпадает с произведениями всех $\alpha_{in}$ для $2(M)$ -формы и легко обобщается для $N(M)$-форм. Итак, в общем случае имеем

<u>Алгоритм I</u>

$\underline{n=1}$ $\quad \alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$ - циклические матрицы порядка $N$ для $N(2)$ - формы.

$$\beta_1 := \alpha_{1,1}\alpha_{2,1}.$$

$\underline{n=2}$ $\quad \alpha_{1,2} := (E_N \otimes \alpha_{1,1}), \quad \alpha_{2,2} := (E_N \otimes \alpha_{2,1}),$ (2.13)

$$\alpha_{3,2} := (\alpha_{1,1} \otimes \beta_1), \quad \alpha_{4,2} := (\alpha_{2,1} \otimes \beta_1), \quad \beta_2 := (\beta_1 \otimes \beta_1),$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\underline{n=\ell}$ $\quad \alpha_{i,\ell} := (E_N \otimes \alpha_{i,\ell-1}), \quad (i = 1,2,\dots,2^{\ell-1}),$

$$\alpha_{i+1,\ell} := \alpha_{i,\ell-1} \otimes \beta_{\ell-1}.$$

<u>Теорема</u>

<u>Алгоритм I</u> построения матричного представления образующих для кубической формы обеспечивает выполнение трилинейных антикоммутационных соотношений (I.6).



<u>Доказательство</u>

проведем по методу индукции. При $n=1$ в справедливости (I.6) для $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \beta_1$ убеждаемся путем прямой подстановки. Предположим, что $\alpha_{i,\ell-1}$ и $\beta_{\ell-1}$ удовлетворяют (I.6). Покажем, что $\alpha_{i,\ell}$, $\beta_\ell$, построенные по алгоритму I, тоже удовлетворяют (I.6). Поскольку $\alpha_{i,\ell}$ $(i=1,2,\dots 2^{\ell-1})$ имеют блочно-диагональный вид, то согласно свойствам блочно-диагональных матриц /8/, равенства (I.6) для них редуцируются в те же равенства для матриц $\alpha_{i,\ell-1}, \beta_{\ell-1}$. Для последних выполнение условий (I.6) мы предположили.

Теперь рассмотрим взаимную антикоммутативность матриц типа $\alpha_{i+1,\ell}$ , $i=1,2,\dots 2^{\ell-1}$ . Они имеют вид

$$\alpha_{i+1,\ell} = \alpha_{i,\ell-1} \otimes \beta_{\ell-1}.$$

Соотношение (I.6) состоит из тройных произведений вида

$$\alpha_{i+1,\ell}\alpha_{k+1,\ell}\alpha_{p+1,\ell} = (\alpha_{i,\ell-1} \otimes \beta_{\ell-1})(\alpha_{k,\ell-1} \otimes \beta_{\ell-1})(\alpha_{p,\ell-1} \otimes \beta_{\ell-1}).$$

Согласно известному свойству прямого произведения /8/, получим

$$\alpha_{i+1,\ell}\alpha_{k+1,\ell}\alpha_{p+1,\ell} = \alpha_{i,\ell-1}\alpha_{k,\ell-1}\alpha_{p,\ell-1} \otimes \beta^3_{\ell-1}.$$

Напомним, что $\beta^3_{\ell-1}$ - единичная матрица. Отсюда следует, что

$$[\alpha_{i+1,\ell}, \alpha_{k+1,\ell}, \alpha_{p+1,\ell}] = [\alpha_{i,\ell-1}, \alpha_{k,\ell-1}, \alpha_{p,\ell-1}] \otimes E = 0. \quad (2.14)$$

Если рассматривать соотношения, куда входят $\alpha_{i,\ell}$ и $\alpha_{i+1,\ell}$ , то равенство (I.6) будет обеспечено за счет антикоммутативности $\alpha_{i,\ell-1}$ и $\beta_{\ell-1}$ . Действительно, раскроем скобку вида $R := [\alpha_{i,\ell}, \alpha_{k+1,\ell}, \alpha_{p+1,\ell}]$ . Имеем (краткости ради значок $\ell-1$ опускаем):

$$R = [(E\otimes\alpha_i)(\alpha_k\otimes\beta) + (\alpha_k\otimes\beta)(E\otimes\alpha_i)](\alpha_p\otimes\beta)$$

$$+ [(\alpha_k\otimes\beta)(\alpha_p\otimes\beta) + (\alpha_p\otimes\beta)(\alpha_k\otimes\beta)](E\otimes\alpha_i)$$

$$+ [(\alpha_p\otimes\beta)(E\otimes\alpha_i) + (E\otimes\alpha_i)(\alpha_p\otimes\beta)](\alpha_k\otimes\beta)$$

$$= (\alpha_k\alpha_p + \alpha_p\alpha_k) \otimes (\alpha_i\beta^2 + \beta^2\alpha_i + \beta\alpha_i\beta) =$$

$$= [\alpha_k, \alpha_p][\alpha_i, \beta, \beta].$$

Поскольку выражение в последней скобке равно нулю (по предположению), то $R=0$ . Точно так же проверяются равенства вида

$$[\alpha_{i,\ell}, \alpha_{k,\ell}, \alpha_{p+1,\ell}] = 0.$$

Теорема доказана.

Доказательства аналогичных теорем для $N(M>3)$ -форм отличаются только громоздкостью выкладок и не содержат принципиальных особенностей.

В заключение укажем на связь образующих $\alpha_1, \alpha_2$, призванных факторизовать $N(2)$ -форму с алгеброй Диксона /9/. Алгебра Диксона - циклическая алгебра с делением степеней, больших 2 в поле $F$, определяется следующими соотношениями:

$$A := \oplus\, u^j v^i F,$$

$$v u = u v \xi,$$

$$u^n = a \quad , \quad v^n = b.$$

В качестве иллюстрации достаточно взять $\alpha_1, \alpha_2$ из (2.7). Для них справедливы равенства

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1 \bar{A} \quad , \quad \alpha_1^3 = 1 \quad , \quad \alpha_2^3 = 1.$$

Следовательно, здесь $a = 1$, $b = 1$, $\xi = \bar{A}$.

Поскольку все образующие, рассматриваемые нами, удовлетворяют уравнению $\hat{X}^n - e = 0$, то мы имеем дело с элементами циклической алгебры. Целью настоящей работы было показать, что элементы циклической алгебры, построенные соответствующим образом, пригодны для факторизации $N(M)$ -формы. Построенный набор образующих по отношению к $N(M)$ -форме выполняет ту же роль, что и образующие алгебры Клиффорда выполняют по отношению к $2(M)$ - форме. Чтобы подчеркнуть это сходство, мы назвали подалгебры циклических алгебр, содержащие найденный набор образующих, аналогами алгебры Клиффорда.

## Литература


1. Зайцев Г.А. Основные формулы для многомерного действительного спинора и алгебраическая модель квантованных волновых полей. ДАН СССР, 1964, т.156,2,294.
2. Б.Л.ван дер Варден. Алгебра. "Наука", М., 1976.
3. Nambu Y. Cenerdlired Hamiltonian dinamics, Phys. Rev.D, 1973,7,No8, p.2405-2412.
4. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. "Наука", М., 1975, с.1-336.
5. Кострикин А.И. Вокруг Бернсайда. "Наука", М., 1986, с.1-231.
6. Фок В.А. Начала квантовой механики. "Наука", 1976, с.1-376.
7. Пшеничников С.Б., Ямалеев Р.М. Методы обращения матриц порядка $2^n$ путем разложения в кольце альтернионов.ЖВМ и МФ,1987,т.27,№8,с.1244.
8. Ланкастер П. Теория матриц. "Наука", М., 1978, с.1-280.
9. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. "Мир", М., 1986, с.1-541.



Рукопись поступила в издательский отдел
26 октября 1987 года.




Ямалеев Р.М. P5-87-766

**Аналоги алгебры Клиффорда для форм выше квадратичных и их матричная реализация**


Найдены матричные представления для образующих алгебры с полилинейными антикоммутационными соотношениями, индуцируемыми N(M)-формой. Предложен алгоритм построения матриц-образующих и доказана теорема о соответствии алгоритма с правилами полилинейных антикоммутационных соотношений. Полученные матрицы обладают свойствами, аналогичными свойствам базисных матриц алгебры Клиффорда.



Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

**Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987**


Перевод О.С.Виноградовой.

Yamaleev R.M. P5-87-766

**Analogs of Clifford Algebra for Forms Above Quadratical and Their Matrix Realization**


Matrix representations for generators of algebra with multilinear anticommutation relations inducible by N(M)-form are found. Algorithm for construction of matrix-generator is proposed and a theorem is proved about the correspondence of algorithm and roles of multilinear anticommutation relations. The obtained matrices have characteristics analogous to the properties of basic matrices of Clifford algebra.



The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

**Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987**