сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-765

М.Слодичка

О СЛАБОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1987

1. Введение

Эта статья написана на основе изучения некоторых задач в теории линейной термоэластичности. В течение последних лет этой проблематике посвящено много работ (см., например, /1-4,7,10-12/ ,...), в которых определяются свойства приближенного решения, полученного дискретизацией по времени и пространству.

В этой статье рассматривается слабо связанная система двух эволюционных уравнений (параболического и гиперболического), в правых частях которых находятся операторы типа Вольтерра. Введено определение слабого решения и доказаны теоремы его существования и единственности в абстрактных вещественных гильбертовых пространствах. В доказательствах использован метод Роте (дискретизация по времени или метод прямых) и техника из /5,9/.

2. Определения и предположения

Пусть Y, H – вещественные гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, и Y компактно вложено в H ($Y \hookrightarrow H$) ; Y^* и H^* – сопряженные пространства к Y и H. Непрерывную билинейную форму между $v \in Y$ и $z \in Y^*$ обозначаем через $\langle z,v \rangle$ и промежуток $\langle 0,T \rangle$ ($T<\infty$) через J. Часто будем пользоваться пространствами типа $C(J,X)$, $L_\infty(J,X)$, $L_2(J,X)$, где X – пространство Банаха (их свойства можно найти, например, в /8/). Символы $\longrightarrow$ ($\rightharpoonup$) обозначают сильную (слабую) сходимости.

Определение 2.1. Если X,Y – пространства Банаха и $\alpha \in (0,1\rangle$, то $\mathrm{Lip}_\alpha(X,Y)$ – множество всех функций $g: X \to Y$, для которых

$$\|g(u) - g(v)\|_Y \le C\,\|u-v\|_X^\alpha \qquad \forall u,v \in X .$$

Для $\alpha = 1$ будем писать $\mathrm{Lip}(X,Y) = \mathrm{Lip}_1(X,Y)$.

Определение 2.2. Если X,Y – пространства Банаха и I – промежуток в R, то $\mathrm{Lip}(I\mathrm{x}X,Y)$ множество всех функций $g : I\mathrm{x}X \to Y$, для которых

$$\|g(t,u) - g(t',v)\|_Y \le C(|t-t'| + |t-t'|\,\|u\|_X + \|u-v\|_X)$$

$$\forall t,t' \in I ; \quad \forall u,v \in X .$$

Определение 2.3. Оператор $M : L_\infty(J,H) \to L_\infty(J,H)$ является оператором типа Вольтерра тогда и только тогда, если

$$(u(s) = v(s) \text{ п.в. в } J) \Longrightarrow (M(u)(s) = M(v)(s) \quad \forall s \in J).$$

Пусть $E : Lip(J,H) \to Lip(J,H)$ оператор типа Вольтерра и $G : L_\infty(J,Y) \to L_\infty(J,Y)$ имеет вид

$$G(v)(t) = \int_0^t K(t,s)v(s)ds \quad , \quad K \in L_\infty(J\times J) . \tag{2.4}$$

Далее фиксируем $f \in Lip(J\times H, Y^*)$ и непрерывные билинейные формы

$p(u,v)$, $a_1(t;x,y)$, $a_2(t;x,y)$, $r(t;x,u)$, $r_1(x,u)$, $d(t;u,x)$,

$g(t;x,y)$, $b(t;u,v)$ для $u,v \in H$; $x,y \in Y$; $t \in J$.

В этой статье будем рассматривать проблему

PC-1. Найти u,v такие, что

(i) $u \in L_2(J,Y) \cap L_\infty(J,H)$

$v \in L_\infty(J,Y) \cap Lip(J,H)$, $\frac{dv}{dt} \in L_\infty(J,H)$

(ii) $u(0) = U_0 \in H$, $v(0) = V_0 \in Y$, $\frac{dv(0)}{dt} = V_1 \in H$

(iii) имеет место (2.5)

$$\begin{aligned}
&- p(U_0, \varphi(0)) + \int_J \Big[-p(u(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}) + a_1(t;u(t), \varphi(t))\Big] dt = \\
&= -r_1(V_0, \varphi(0)) + \int_J \Big[-r_1(v(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}) + r(t; u(t), \varphi(t)) + \\
&+ d(t; u(t), \varphi(t)) + d(t; \frac{dv(t)}{dt}, \varphi(t)) + g(t; G(v)(t), \varphi(t)) + \\
&+ g(t; v(t), \varphi(t)) + \langle f(t,E(v)(t)), \varphi(t)\rangle \Big] dt, \\
&-p(V_1, \psi(0)) + \int_J \Big[-p(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\psi(t)}{dt}) + a_2(t; v(t), \psi(t))\Big] dt = \\
&= \int_J \Big[-r_1(\psi(t), u(t)) + r(t;u(t), \psi(t)) + b(t; \frac{dv(t)}{dt}, \psi(t)) + \\
&+ \langle f(t,E(v)(t)), \psi(t)\rangle \Big] dt ,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

для всех $\omega \in H^1(J,H) \cap L_2(J,Y)$, $\omega(T)=0$, где $\omega = \varphi, \psi$;

$$H^1(J,H) = \left\{ v \in L_2(J,H) : \frac{dv}{dt} \in L_2(J,H) \right\}$$

и производные в смысле дистрибуций $D'(J,H)$.

Замечание 2.6. Билинейные формы $p(r,d,g)$ в различных выражениях в (2.5) можем считать разными, но они должны подчиняться условиям теоремы 4.5. То же самое имеет место и для функции f и оператора E .

Замечание 2.7. В дальнейшем символы $C, \varepsilon, C_\varepsilon$ будут обозначать положительные константы, которые в различных местах могут быть разными; ε обозначает малую константу и $C_\varepsilon = C(\frac{1}{\varepsilon})$.

Для билинейных форм $p, a_1, a_2, b, r, r_1, g, d$ и оператора E будем предполагать следующие условия $(\forall t \in J; \lambda = 0,1)$:

$$p(x,x) \geq C_1 |x|^2 , \tag{2.8}$$

$$|p(x,y)| \leq C|x| \; |y| , \tag{2.9}$$

$$p(x,y) = p(y,x) , \tag{2.10}$$

$$a_1(t;z,z) \geq C_1 \|z\|^2 - C|z|^2 , \tag{2.11}$$

$$|a_1^{(\lambda)}(t;z,v)| \leq C\|z\| \; \|v\| , \tag{2.12}$$

$$a_2(t;z,z) \geq C_1\|z\|^2 - C|z|^2 , \tag{2.13}$$

$$a_2(t;z,v) = a_2(t;v,z) , \tag{2.14}$$

$$|a_2^{(\lambda)}(t;z,v)| \leq C\|z\| \; \|v\| , \tag{2.15}$$

$$|r_1(z,x)| \leq C\|z\| \; |x| , \tag{2.16}$$

$$|r^{(\lambda)}(t;z,x)| \leq C\|z\| \; |x| , \tag{2.17}$$

$$|g^{(\lambda)}(t;z,v)| \leq C\|z\| \|v\| , \tag{2.18}$$

$$|d^{(\lambda)}(t;x,z)| \leq C|x| \|z\| , \tag{2.19}$$

$$|b^{(\lambda)}(t;x,y)| \leq C|x| \, |y| \tag{2.20}$$

для всех $x,y \in H$ и $z,v \in Y$, где $w^{(p)}(t;x,y) = \partial_t^p w(t;x,y)$,

$$|E(v)(t) - E(v)(t')| \leq |t-t'| \quad L(\|v\|_{C(\langle 0,t\rangle,H)})\Big(1+\Big\|\frac{dv}{dt}\Big\|_{L_\infty(\langle 0,t\rangle,H)}\Big) \tag{2.21}$$

для всех $t,t' \in J$; $t' < t$; $L \in C(R_+,R_+)$; $\forall v \in Lip(J,H)$.

3. Априорные оценки

В доказательстве существования решения PC-1 мы используем метод Роте. Разобьем отрезок J на n равных частей $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$, $i=1,\dots,n$; $h = T/n$; $t_i = ih$. Для данной функции $w(t)$ введем следующие обозначения

$w_i = w(t_i)$, $\delta w_i = (w_i - w_{i-1})/h$, $\delta^2 w_i = \delta(\delta w_i)$ для $i=1,\dots,n$.

Сначала будем рассматривать проблему

PD-1. Найти $u_i,\ v_i \in Y$ $(i=1,\dots,n)$ такие, что

(i) $u_0 = U_0$, $v_0 = V_0$, $\delta v_0 = V_1$, $v_{-1} = V_0 - hV_1$

$U_0,\ V_1 \in H$, $V_0 \in Y$

(ii) имеет место (3.I)

$$\begin{aligned} &p(\delta u_i, \varphi) + a_1(t_i; u_i, \varphi) = r_1(\delta v_i, \varphi) + r(t_i; u_i, \varphi) + d(t_i, u_{i-1}, \varphi) + \\ &+ d(t_i; \delta v_i, \varphi) + g(t_i; G_i v, \varphi) + g(t_i; v_{i-1}, \varphi) + \langle f(t_i, E_i v), \varphi\rangle, \qquad (3.\mathrm{I}) \\ &p(\delta^2 v_i, \psi) + a_2(t_i; v_i, \psi) = -r_1(\psi, u_i) + r(t_i; u_i, \psi) + \\ &+ b(t_i; \delta v_i, \psi) + \langle f(t_i, E_i v), \psi\rangle \end{aligned}$$

для всех $\varphi, \psi \in Y$; $i=1,\dots,n$; где

$R_i v = R(\tilde v_{i-1})(t_i)$ $\qquad R = E,\ G$

$$\tilde v_{i-1} = \tilde v_{i-1,n}(t) = \begin{cases} V_0 & t \in \langle 0, h\rangle \\ v_{j-1} + (t-t_j)\delta v_j & t \in \langle t_j, t_{j+1}\rangle \quad j=1,\dots,i-1 \\ v_{i-1} & t \in \langle t_i, T\rangle \end{cases}.$$

Последовательно для $i=1,\dots,n$ будем решать PD-1 . После этого построим функции Роте $u_n(x,t)$, $v_n(x,t)$ как приближенные решения проблемы PC-1 в том смысле, что они стремятся к решению PC-1 в некоторых функциональных пространствах,

$$z_n(t) = \begin{cases} z_0 & t = 0 \\ z_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta z_i & t \in (t_{i-1}, t_i\rangle \end{cases},$$

$$\bar z_n(t) = \begin{cases} z_0 & t = 0 \\ z_i & t \in (t_{i-1}, t_i\rangle \end{cases}$$

для $i=1,\dots,n$ и $z = u, v, V^{(1)}$ причем $V_0^{(1)} \equiv V_1$.

Далее будем пользоваться следующими формулами (неравенство Юнга)

$$ab \le \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2 , \qquad a, b \in R_+ \qquad (3.2)$$

(суммирование по частям для билинейных форм)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j} e(t_i; z_i, w_i - w_{i-1}) &= e(t_j; z_j, w_j) - e(0; z_0, w_0) - \qquad (3.3) \\ &- \sum_{i=1}^{j} \left[e(t_{i-1}; \delta z_i, w_{i-1}) + \delta e(t_i; z_i, w_{i-1})\right] h \end{aligned}$$

(суммирование по частям для симметричных билинейных форм)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j} e(t_i; z_i - z_{i-1}, z_i) &= \frac{1}{2}\Big[e(t_j; z_j, z_j) - e(0; z_0, z_0) + \qquad (3.4) \\ &+ \sum_{i=1}^{j} \left\{ e(t_i; \delta z_i, \delta z_i) h^2 - \delta e(t_i; z_{i-1}, z_{i-1}) h \right\} \Big]. \end{aligned}$$

Лемма 3.5. Пусть выполнены условия теоремы 4.5. Тогда существуют единственные элементы $u_i,\ v_i \in Y$,которые являются решением PD-1 для $i=1,\dots,n$ и $h < h_0$.

Доказательство: Вследствие $v_i = v_0 + \sum_{j=1}^{i} \delta v_j h$ можно написать (3.I) в форме

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} p(u_i, \varphi) + a_1(t_i; u_i, \varphi) - r_1(\delta v_i, \varphi) - r(t_i; u_i, \varphi) - \\ &- d(t_i; \delta v_i, \varphi) = \frac{1}{h} p(u_{i-1}, \varphi) + d(t_i; u_{i-1}, \varphi) + g(t_i; G_i v, \varphi) + \\ &+ g(t_i; v_{i-1}, \varphi) + \langle f(t_i, E_i v), \varphi\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} p(\delta v_i, \psi) + h a_2(t_i; \delta v_i, \psi) + r_1(\psi, u_i) - b(t_i; \delta v_i, \psi) - r(t_i; u_i \psi) = \\ &= \frac{1}{h} p(\delta v_{i-1}, \psi) - a_2(t_i; v_0, \psi) - \sum_{j=1}^{i} a_2(t_i; \delta v_j, \psi) h + \langle f(t_i, E_i v), \psi\rangle. \end{aligned}$$

Если последовательно для каждого $i=1,\dots,n$ использовать лемму Лакса-Мильграма, мы получаем утверждение леммы.

Лемма 3.6. Пусть выполнены условия теоремы 4.5. Тогда существуют C , $h_0 > 0$ такие, что

$$|u_i| + |\delta v_i| + \|v_i\| + \sum_{j=1}^{i} \|u_j\|^2 h + |v_i| + \sum_{j=1}^{i} \Big[|u_j - u_{j-1}|^2 + |\delta v_j - \delta v_{j-1}|^2 + \|v_j - v_{j-1}\|^2 \Big] \le C$$

для всех $i=1,\dots,n$ и $h < h_0$.

Доказательство. Если подставим $\varphi = u_i h$ в $(3.\mathrm{I})_1$ и просуммируем от $i=1$ до $i=j$ $(1 \le j \le n)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{j}\left[p(\delta u_i,u_i) + a_1(t_i;u_i,u_i)\right]h = \sum_{i=1}^{j}\left[r_1(\delta v_i,u_i) + r(t_i;u_i,u_i) + d(t_i;u_{i-1},u_i) + d(t_i;\delta v_i,u_i) + g(t_i;G_i v,u_i) + g(t_i;v_{i-1},u_i) + \langle f(t_i,E_i v),u_i\rangle\right]h . \tag{3.7}$$

Последовательно, используя (3.2),(3.4), переходим к

$$\frac{c_1}{2}\left[|u_j|^2 + \sum_{i=1}^{j}|u_i - u_{i-1}|^2\right] + (c_1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{j}\|u_i\|^2 h \le \sum_{i=1}^{j} r_1(\delta v_i,u_i)h + C_\varepsilon\left(1 + \sum_{i=1}^{j} A_i h\right), \tag{3.8}$$

где

$$A_i = \max_{1\le k\le i}|u_k|^2 + \max_{1\le k\le i}|\delta v_k|^2 + \max_{1\le k\le i}\|v_k\|^2 + \sum_{k=1}^{i}\|u_k\|^2 h .$$

Теперь подставим $\psi = \delta v_i h$ в $(3.1)_2$, просуммируем от $i=1$ до $i=j$ ($1\le j\le n$) и получим

$$\sum_{i=1}^{j}\left[p(\delta^2 v_i,\delta v_i) + a_2(t_i;v_i,\delta v_i)\right]h = \sum_{i=1}^{j}\left[-r_1(\delta v_i,u_i) + r(t_i;u_i,\delta v_i) + b(t_i;\delta v_i,\delta v_i) + \langle f(t_i,E_i v),\delta v_i\rangle\right]h . \tag{3.9}$$

Вследствие (3.2),(3.4) имеем

$$\frac{c_1}{2}\left[|\delta v_j|^2 + \sum_{i=1}^{j}\left\{|\delta v_i - \delta v_{i-1}|^2 + \|v_i - v_{i-1}\|^2\right\}\right] + \left(\frac{c_1}{2}-\varepsilon\right)\|v_j\|^2 \le -\sum_{i=1}^{j} r_1(\delta v_i,u_i)h + \varepsilon\sum_{i=1}^{j}\|u_i\|^2 h + C_\varepsilon\left(1+\sum_{i=1}^{j}A_i h\right). \tag{3.10}$$

Формулы (3.8),(3.10) для достаточно малого ε дают

$$\sum_{i=1}^{j}\left[|u_i-u_{i-1}|^2 + |\delta v_i - \delta v_{i-1}|^2 + \|v_i - v_{i-1}\|^2\right] + A_j \le C\left(1 + \sum_{i=1}^{j}A_i h\right).$$

Отсюда, пользуясь леммой Гронуола, получаем искомое утверждение.

4. Существование и единственность

Введем следующие обозначения

$w_n(t;x,y) = w(t_j;x,y)$, $\qquad w = a_1,a_2,r,d,g,b$,

$R_n(z)(t) = R(z)(t_j)$, $\qquad R = E,\ G$

$f_n(t,\xi) = f(t_j,\xi)$,

для $t\in(t_{j-1},t_j\rangle$ и $j=1,\dots,n$.

Априорные оценки леммы 3.6 дают

$$|\bar u_n(t)|\le C \quad \forall t\in J, \quad \|\bar u_n\|_{L_2(J,Y)}\le C, \tag{4.1}$$

$$\int_J|\bar u_n(t) - \bar u_n(t-h)|^2 dt \le Ch, \tag{4.2}$$

$$|\bar v_n^{(1)}(t)|\le C, \quad \|\bar v_n(t)\|\le C \text{ п.в. в } J \tag{4.3}$$

$$\int_J|\bar v_n^{(1)}(t) - \bar v_n^{(1)}(t-h)|^2 dt \le Ch, \quad \int_J\|\bar v_n(t) - \bar v_n(t-h)\|^2 dt \le Ch . \tag{4.4}$$

Теорема 4.5. При выполнении условий (2.4),(2.8)-(2.21), $f\in Lip(J\times H,Y^*)$, $E\in Lip(C(J,H),C(J,H))$ существует решение проблемы PC-1.

Доказательство. Зафиксируем $\varphi\in H^1(J,H)\cap L_2(J,Y)$, $\varphi(T)=0$. Построим

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi(x,t)dt \quad (i=1,\dots,n), \qquad \varphi_0 = \varphi(0)$$

и функции $\varphi_n(t)$, $\bar\varphi_n(t)$.

Подставим $\varphi = \varphi_i h$ в $(3.1)_1$ и просуммируем от $i=1$ до $i=n$. Благодаря (3.3) для p, r_1 получаем

$$p(\bar u_n(t),\bar\varphi_n(t)) - p(U_0,\varphi_0) + \int_J\left[-p\left(\bar u_n(t-h),\frac{d\varphi_n(t)}{dt}\right) + a_{1,n}(t;\bar u_n(t),\bar\varphi_n(t))\right]dt = r_1(\bar v_n(t),\bar\varphi_n(t)) - r_1(V_0,\varphi_0) + \int_J\left[-r_1\left(\bar v_n(t-h),\frac{d\varphi_n(t)}{dt}\right) + r_n(t;\bar u_n(t),\bar\varphi_n(t)) + d_n(t;\bar u_n(t-h),\bar\varphi_n(t)) + d_n(t;\bar v_n^{(1)}(t),\bar\varphi_n(t)) + g_n(t;G_n(\tilde v_n)(t),\bar\varphi_n(t)) + g_n(t;\bar v_n(t-h),\bar\varphi_n(t)) + \langle f_n(t,E_n(\hat v_n)(t)),\bar\varphi_n(t)\rangle\right]dt . \tag{4.6$_1$}$$

Аналогичным путем для $\psi\in H^1(J,H)\cap L_2(J,Y)$, $\psi(T)=0$ из $(3.1)_2$ вытекает

$$p(\bar v_n^{(1)}(t),\bar\psi_n(t)) - p(V_1,\psi_0) + \int_J\left[-p(\bar v_n^{(1)}(t-h),\bar\psi_n(t)) + a_{2,n}(t;\bar v_n(t),\bar\psi_n(t))\right]dt = \int_J\left[-r_1(\bar\psi_n(t),\bar u_n(t)) + r_n(t;\bar u_n(t),\bar\psi_n(t)) + b_n(t;\bar v_n^{(1)}(t),\bar\psi_n(t)) + \langle f_n(t,E_n(\tilde v_n)(t)),\bar\psi_n(t)\rangle\right]dt. \tag{4.6$_2$}$$

Используя лемму I.3.I8 из [6], имеем

$$\frac{d\varphi_n}{dt} \longrightarrow \frac{d\varphi}{dt} \quad , \quad \frac{d\Psi_n}{dt} \longrightarrow \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{в} \quad L_2(J,H) \tag{4.7}$$

$$\bar{\varphi}_n \longrightarrow \varphi \quad , \quad \bar{\Psi}_n \longrightarrow \Psi \quad \text{в} \quad L_2(J,Y) . \tag{4.8}$$

Ввиду (4.I)-(4.4) и леммы I.3.I3 из [6] существует $u \in L_2(J,Y)$, для которого

$$\bar{u}_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_2(J,Y) \tag{4.9}$$

и $v \in L_\infty(J,Y) \cap Lip(J,H)$, $\frac{dv}{dt} \in L_\infty(J,H)$

такая, что

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{в} \quad C(J,H) \tag{4.I0}$$

$$v_n \rightharpoonup v \quad , \quad \bar{v}_n \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad L_2(J,Y) \tag{4.II}$$

$$\bar{v}_n^{(1)} \rightharpoonup \frac{dv}{dt} \quad \text{в} \quad L_2(J,H) . \tag{4.I2}$$

Вследствие (4.3),(4.I0) и $Y \hookrightarrow\hookrightarrow H$ легко видеть, что

$$G\tilde{v}_n \rightharpoonup Gv \quad \text{в} \quad L_2(J,Y) , \tag{4.I3}$$

$$\tilde{v}_n \longrightarrow v \quad \text{в} \quad C(J,H) . \tag{4.I4}$$

Формулы (4.9)-(4.I4) имеют место только для специальных подпоследовательностей из $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, которые опять обозначаем через $\{u_n\}$, $\{v_n\}$.

Если устремим теперь n к бесконечности в (4.6), на основании (4.I)-(4.4) и (4.7)-(4.I4) получаем (2.5). Существование предела покажем только для одного члена (4.6), для остальных это получается аналогичным путем.

Ясно, что $\int_J g(t;x,y)dt$ – непрерывная билинейная форма в $L_2(J,Y) \times L_2(J,Y)$ и

$$\int_J |g_n(t;\bar{v}_n(t-h),\bar{\varphi}_n(t)) - g(t;\bar{v}_n(t-h),\bar{\varphi}_n(t))| \, dt \le Ch .$$

Пользуясь (4.4),(4.8),(4.II) нетрудно показать, что

$$\int_J \left[g(t;\bar{v}_n(t-h),\bar{\varphi}_n(t)) - g(t;v(t),\varphi(t)) \right] dt = \int_J \left[g(t;\bar{v}_n(t-h),\bar{\varphi}_n(t) - \varphi(t)) + \right.$$

$$\left. + g(t;\bar{v}_n(t-h) - \bar{v}_n(t),\varphi(t)) + g(t;\bar{v}_n(t) - v(t),\varphi(t)) \right] dt \longrightarrow 0 ,$$

т.е.

$$\int_J g_n(t;\bar{v}_n(t-h),\bar{\varphi}_n(t))dt \longrightarrow \int_J g(t;v(t),\varphi(t)) \, dt .$$

<u>Теорема 4.I5</u>. Пусть выполнены условия теоремы 4.5. Если

$$g(t;G(v)(t),\varphi(t)) \equiv g(t;\int_0^t v(\tau)d\tau , \varphi(t)),$$

$$g(t;\ v(t),\ \varphi(t)) \equiv 0 \quad ,$$

тогда существует единственное решение РС-1 .

<u>Доказательство</u>. Существование вытекает из теоремы 4.5. При доказательстве единственности используем идею из [9] (гл.IV-теорема 3.I). Пусть задача РС-1 имеет два решения u_1,v_1 и u_2,v_2 . Теперь определим следующие функции

$$u = u_1 - u_2 , \qquad v = v_1 - v_2 , \qquad z(t) = \int_0^t u(s)ds ,$$

$$w_s(t) = \begin{cases} \int_s^t z(\tau)\,d\tau & 0 \le t \le s \\ 0 & s < t \le T , \end{cases}$$

$$y_s(t) = \begin{cases} \int_s^t v(\tau)\,d\tau & 0 \le t \le s \\ 0 & s < t \le T , \end{cases}$$

$$x(t) = \int_t^0 v(\tau)\,d\tau \qquad 0 \le t \le s .$$

Легко видеть, что

$$\int_J p(u(t), \frac{dw_s(t)}{dt}) \, dt = \int_0^s p(\frac{dz(t)}{dt} , z(t))dt = \frac{1}{2} p(z(s),z(s)),$$

$$\int_J a_1(t;u(t),w_s(t))dt = -\int_0^s \left[a_1^{(1)}(t;z(t),w_s(t)) + a_1(t;z(t),z(t)) \right] dt,$$

$$\int_J r_1(v(t), \frac{dw_s(t)}{dt})dt = \int_0^s r_1(v(t),z(t)) \, dt ,$$

$$\int_J r(t;u(t),w_s(t))dt = -\int_0^s \left[r^{(1)}(t;z(t),w_s(t)) + r(t;z(t),z(t)) \right] dt ,$$

$$\int_J d(t;u(t),w_s(t))dt = -\int_0^s \left[d^{(1)}(t;z(t),w_s(t)) + d(t;z(t),z(t)) \right] dt ,$$

$$\int_J d(t; \frac{dv(t)}{dt} ,w_s(t))dt = \int_0^s \left[d^{(1)}(t;v(t),w_s(t)) + d(t;v(t),z(t)) \right] dt,$$

$$\int_J p(\frac{dv(t)}{dt} , \frac{dy_s(t)}{dt}) \, dt = \frac{1}{2} p(v(s),v(s)) ,$$

$$\int_J a_2(t;v(t),y_s(t))dt = -\frac{1}{2}\left[a_2(0;y_s(0),y_s(0))+\int_0^s a_2^{(1)}(t;y_s(t),y_s(t))dt\right],$$

$$\int_J r_1(y_s(t),u(t))dt = -\int_0^s r_1(v(t),z(t))dt\ ,$$

$$\int_J b(t;\frac{dv(t)}{dt},y_s(t))dt = -\int_0^s \left[b^{(1)}(t;v(t),y_s(t))+b(t;v(t),v(t))\right]dt\ ,$$

$$\int_J r(t;u(t),y_s(t))dt = -\int_0^s \left[r^{(1)}(t;z(t),y_s(t)) + r(t;z(t),v(t))\right]dt\ .$$

Рассмотрим разность выражений (2.5), получаемых для разных решений, подставим $\varphi = w_s$ и $\Psi = y_s$. На основании написанных выше формул мы получаем

$$\frac{1}{2}p(z(s),z(s)) + \int_0^s\left[a_1(t;z(t),z(t)) - r_1(v(t),z(t))\right]dt =$$

$$= \int_0^s\Big[-a_1^{(1)}(t;z(t),w_s(t)) + r^{(1)}(t;z(t),w_s(t)) + r(t;z(t),z(t)) +$$

$$+ d^{(1)}(t;z(t),w_s(t)) + d(t;z(t),z(t)) + d^{(1)}(t;v(t),w_s(t)) +$$

$$+ d(t;v(t),z(t)) + g(t;x(t),w_s(t)) + \tag{4.16}$$

$$+ \langle f(t,E(v_2)(t)) - f(t,E(v_1)(t)),w_s(t)\rangle\Big]dt\ ,$$

$$\frac{1}{2}\left[p(v(s),v(s)) + a_2(0;x(s),x(s))\right] + \int_0^s r_1(v(t),z(t))dt =$$

$$= \int_0^s\Big[-\frac{1}{2}a_2^{(1)}(t;y_s(t),y_s(t)) + b^{(1)}(t;v(t),y_s(t)) +$$

$$+ b(t;v(t),v(t)) + r^{(1)}(t;z(t),y_s(t)) + r(t;z(t),v(t)) +$$

$$+ \langle f(t,E(v_2)(t)) - f(t,E(v_1)(t)),y_s(t)\rangle\Big]dt$$

(здесь мы пользовались тождеством $y_s(0) = x(s)$).

Теперь просуммируем $(4.16)_1$ и $(4.16)_2$. Аналогичным путем, как в теореме 4.5, используя неравенство

$$\int_0^s \|y_s(t)\|^2 dt = \int_0^s\|x(s) - x(t)\|^2 dt \le \frac{s}{2}\|x(s)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^s\|x(t)\|^2 dt$$

нетрудно показать, что

$$|v(s)|^2 + (1 - Cs)\|x(s)\|^2 + |z(s)|^2 + (1-\varepsilon)\int_0^s\|z(t)\|^2 dt \le \tag{4.17}$$

$$\le C_\varepsilon\int_0^s\Big[\|v\|^2_{C(\langle 0,t\rangle,H)} + \|x(t)\|^2 + |z(t)|^2 + \int_0^t\|z(\tau)\|^2 d\tau\Big]dt.$$

Пусть

$$F(t) = \|v\|^2_{C(\langle 0,t\rangle,H)} + \|x\|^2_{C(\langle 0,t\rangle,Y)} + \|z\|^2_{C(\langle 0,t\rangle,H)} + \int_0^t\|z(\tau)\|^2 d\tau.$$

Для достаточно малого ε из (4.17) вытекает

$$|v(s)|^2 + (1-Cs)\|x(s)\|^2 + |z(s)|^2 + \int_0^s\|z(t)\|^2 dt \le C\int_0^s F(t)dt\ , \tag{4.18}$$

т.е. $\exists\, s_0 > 0 \quad \forall s \in \langle 0,s_0\rangle$:

$$|v(s)|^2 + \|x(s)\|^2 + |z(s)|^2 + \int_0^s\|z(t)\|^2 dt \le C\int_0^s F(t)\,dt. \tag{4.19}$$

Если ξ - произвольная точка в $\langle 0,s_0\rangle$, тогда для каждого $s \in \langle 0,\xi\rangle$ имеем

$$|v(s)|^2 + \|x(s)\|^2 + |z(s)|^2 + \int_0^s\|z(t)\|^2 dt \le C\int_0^\xi F(t)\,dt$$

и ввиду этого

$$F(\xi) \le C\int_0^\xi F(t)\,dt\ .$$

Лемма Гронуола дает $F(\xi) = 0$. Из произвола в выборе ξ следует $F(s_0) = 0$. Отсюда легко видеть, что $u(t) = 0 = v(t)$ п.в. в $\langle 0,s_0\rangle$. Повторяя рассуждение для $t \in \langle s_0, 2s_0\rangle$, убедимся, что $u(t) = 0 = v(t)$ на этом промежутке. Итак, в конечное число шагов докажем обращение $u(t)$, $v(t)$ в нуль для всех $t \in J$.

Литература

1. BERMUDEZ, A. - VIAÑO, J.M.: Étude de deux schémas numériques pour les équations de la thermoélasticité. R.A.I.R.O. Numer. Anal. 17 (1983), 121-136.
2. CHOU, S.I.- WANG, C.C.: Estimates of error in finite element approximate solutions to problems in linear thermoelasticity. Part 1. Computationaly coupled numerical schemes. Arch. Rat. Mech. Anal. 76 (1981), 263-299.
3. DAFERMOS, C.M.: On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. 29 (1968), 241-271 .
4. DUVAUT, G.- LIONS, J.L.: Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique. Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972), 241-279.
5. KAČUR, J.: Application of Rothe's method to evolution integrodifferential equations. Universität Heidelberg, SFB 123, 381 (1986) .

6. KAČUR, J.: Method of Rothe in evolution equations. Teubner Texte zur Mathematik 80, Leipzig 1985.
7. KAČUR, J.- ŽENÍŠEK, A.: Analysis of approximate solutions of coupled dynamical thermoelasticity and related problems. Aplikace matematiky 31 (1986), 190-223.
8. KUFNER, A.-JOHN, O.-FUČÍK, S.: Function spaces. Academia, Prague 1977.
9. Ладыженская О.А.: Краевые задачи математической физики. Наука, Москва, 1973.
10. NICKELL, R.E. - SACKMAN, J.L.: Approximate solutions in linear coupled thermoelasticity. J. Appl. Mech. 35 (1968), 255 - 266.
11. NICKELL, R.E. - SACKMAN, J.L.: Variational principles for linear coupled thermoelasticity. Q. Appl. Math. 26 (1968), 11-26 .
12. ŽENÍŠEK, A.: Finite element methods for coupled thermoelasticity and coupled consolidation of clay. R.A.I.R.O. Numer. Anal. 18 (1984), 183-205.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 октября 1987 года.

Слодичка М. P5-87-765
О слабом решении одной системы квазилинейных интегродифференциальных эволюционных уравнений

Рассматривается система двух квазилинейных интегродифференциальных уравнений /гиперболического и параболического/ в частных производных. Даны доказательства существования и единственности слабого решения. При доказательстве существования решения использован метод Роте /метод прямых или дискретизация по времени/.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Slodička M. P5-87-765
About Weak Solution of a System of Quasilinear Integrodifferential Evolution Equations

A system of two partial quasilinear integrodifferential equations (hyperbolic and parabolic) is studied. The proofs of the existence and uniqueness of the weak solution are given. The proof of the existence of solution is done by Rothe's method (method of lines or discretization in time).

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987