сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-87-761

А.А.Боголюбская, И.Л.Боголюбский

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОГО МАГНЕТИКА С УСТОЙЧИВЫМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СОЛИТОНАМИ

1987

I.Неодномерные солитоны в магнетиках являются в настоящее время объектом интенсивного исследования (см., например, [I] и цитированную там литературу). Особый интерес представляют так называемые топологические солитоны, характеризующиеся наличием целочисленного "топологического заряда", сохраняющегося независимо от эволюционных уравнений. Наличие топологического инварианта является важной составной частью механизма, обеспечивающего существование устойчивых солитонов. Однако наличие в модели топологического заряда еще не гарантирует существования солитонов, а в случае существования - их устойчивости [2,3]. Для статических локализованных рапределений это легко продемонстрировать методом работы [4]; поэтому при поисках устойчивых неодномерных статических солитонов бозонных полей следует первым делом выяснять возможность существования в рассматриваемых моделях минимума функционала энергии при масштабных преобразованиях, $\vec{x} \to a\vec{x}$. В качестве примеров трехмерных моделей (относящихся к числу "нелинейных σ-моделей"), в которых выполнены оба отмеченные условия, определяющие существование устойчивых солитонов, укажем широко используемую в ядерной физике модель Скирма [5], а также обобщения модели изотропного магнетика Гейзенберга [6,3]. В работах [3,7] с помощью ЭВМ были получены трехмерные устойчивые солитоны в решеточной модели магнетика, имеющие единичный топологический заряд $H_\ell=1$ (H_ℓ - решеточный аналог индекса Хопфа). Не вызывает сомнений и существование устойчивых солитонов в соответствующей континуальной модели [3].

Двумерный случай $(D=2)$ является, как известно, особым [4,2]. В частности, для двумерного изотропного магнетика Гейзенберга существует бесконечное однопараметрическое множество солитонных решений, непрерывным образом зависящих от параметра a масштабного преобразования. Эти решения, полученные в [8], положили начало поискам двумерных топологических солитонов (см. ссылки в [I]). К сожалению, известные авторам работы, в которых с помощью ЭВМ исследовались двумерные топологические солитоны в моделях анизотропного магнетика гейзенберговского типа, являются ошибочными. Действительно, в настоящей работе будет показано, что соответствующие функционалы энергии не могут достигать минимумов на локализованных распределениях конечного размера.

Для получения устойчивых двумерных солитонов следует дополнить эти модели слагаемым в гамильтониане, растущим на малых расстояниях и предотвращающим вследствие этого " схлопывание" локализованного распределения до нулевого размера, подобно тому, как это было сделано в трехмерном пространстве /5,6,3/. Двумерная модель такого типа рассматривалась в статье /9/. В настоящей работе мы исследуем конкретный модельный гамильтониан анизотропного магнетика гейзенберговского типа и с помощью ЭВМ находим солитонные решения с единичным топологическим зарядом.

2. Рассмотрим двумерную (x,y) модель анизотропного гейзенберговского магнетика, плотность гамильтониана которого записывается в стационарном случае $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ в виде

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2+\mathcal{H}_3=\alpha^2(\partial_i s^a)^2+\beta^2\sin^2\theta+\gamma^2\left[(\partial_i s^a\partial_i s^a)^2-(\partial_i s^a\,\partial_j s^a)^2\right]. \quad (I)$$

Здесь $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, $a=1,2,3$, α,β, γ – постоянные, $s^a s^a=1$, θ – угол между "осью легкого намагничивания" и единичным вектором $\vec{s}=(s^1,a^2,s^3)$. Пусть для простоты эта"легкая ось" совпадает с осью z.

Плотность $\mathcal{H}\geqslant 0$; двум вакуумным состояниям системы соответствуют однородные распределения спинов $\vec{s}(\vec{x})=\vec{s}_0=\pm\vec{e}_z$, $\vec{e}_z$ – единичный орт оси z; для определенности выберем вакуумное состояние $\vec{s}(\vec{x})=+\vec{e}_z$. Рассмотрим теперь локализованные возмущения этого распределения. Определим для них функционалы

$$H_k=\int\mathcal{H}_k\,d^2x\,, \quad k=1,2,3\,. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что при масштабном преобразовании

$$\vec{s}\,(\vec{x})\longrightarrow\vec{s}\,(a\vec{x}) \quad (3)$$

они преобразуются следующим образом:

$$H_1\longrightarrow H_1\,, \quad (4a)$$

$$H_2\longrightarrow a^{-2}H_2\,, \quad (4b)$$

$$H_3\longrightarrow a^2H_3\,. \quad (4c)$$

В данной работе солитоном называется локализованное возмущение вакуумного состояния, являющееся решением уравнений движения и обладающее конечной энергией $H=\int\mathcal{H}\,d^2x$. Для нахождения стационарных солитонов следует исследовать локализованные решения уравнения $\delta H/\delta\vec{s}=0$. Для доказательства устойчивости этих солитонов необходимо показать, что полученные решения соответствуют минимумам (по крайней мере, локальным) функционала H.

Покажем, что в рамках модели (I) при $\gamma=0$ солитонных решений нет. Действительно, рассмотрим частный класс возмущений $\delta\vec{s}(\vec{x})$ исследуемых распределений $\vec{s}(\vec{x})$, соответствующих их масштабному преобразованию (3).

Из формул (4a), (4b) получаем

$$\frac{dH}{da}=\frac{d(H_1+H_2)}{da}=-2a^{-3}H_2\,. \quad (5)$$

Подставляя $a=1$ и учитывая, что $H_2>0$, находим, что $\frac{dH}{da}(1)<0$, что и означает отсутствие решений уравнения $\delta H/\delta\vec{s}=0$ при $\gamma=0$.

Учет члена $\mathcal{H}_3$ изменяет положение:

$$\frac{dH}{da}(1)=-2H_2(1)+2H_3(1)\,. \quad (6)$$

Видно, что существование солитонных решений не запрещено, причем для солитона выполнено равенство $H_2=H_3$. Эти выводы остаются справедливыми и для двумерных моделей магнетиков с другим видом анизотропии, например, типа "легкая плоскость".

3. Введем безразмерные координаты $\vec{R}=(x_d,y_d)=(\alpha^{-1}\beta)\vec{r}$. Соотношение (I) примет вид

$$\mathcal{H}=\beta^2\left\{(\partial_i s^a)^2+\sin^2\theta+p\left[(\partial_i s^a\cdot\partial_i s^a)^2-(\partial_i s^a\cdot\partial_j s^a)^2\right]\right\}, \quad (7)$$

где теперь $\partial_1=\frac{\partial}{\partial x_d}$, $\partial_2=\frac{\partial}{\partial y_d}$, $p=\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^4}$.

Условие $\vec{s}(\infty)=\vec{e}_z$ позволяет, используя стереографическую проекцию, взаимно однозначно отобразить исходное пространство R^2 на сферу S^2. Вектор $\vec{s}$ также принимает значения на сфере S^2. Всякое локализованное распределение $\vec{s}(\vec{x})$ определяется, таким образом, некоторым отображением $R^2\to S^2$ или $S^2\to S^2$. Такие отображения характеризуются топологическим индексом, или степенью отображения, вычисляемой по формуле (см., например, /2,8,I/)

$$Q=\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon_{\mu\nu}\,\varepsilon^{abc}\,s^a\frac{\partial s^b}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial s^c}{\partial x^\nu}\,d^2x\,, \quad (8)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$, ε_{abc} - абсолютно антисимметричные единичные псевдотензоры, $\mu,\nu=1,2$, $a,b,c=1,2,3$.

Для двумерного изотропного ферромагнетика Гейзенберга ($\beta=0$, $\gamma=0$ в (I)) известна оценка /8/ $\alpha^{-2}H \geqslant 8\pi Q$, причем равенство достигается на солитонах. В нашем случае, при $Q \geqslant 1$, справедливо строгое неравенство $\alpha^{-2}H > 8\pi Q$, которое следует из очевидных неравенств для непрерывных отображений $\vec{s}(\vec{x})$ с топологическим индексом $Q \geqslant 1$: $H_2 > 0$, $H_3 > 0$. Эти последние неравенства показывают, что должна существовать улучшенная оценка для H снизу, для получения которой необходимо учитывать все три слагаемых H_i .

Кратко остановимся на свойствах сектора $Q=0$ модели (I). Нетопологические $(Q=0)$ статические солитоны вида

$$s^1=\sin\theta\,,\quad s^2=0\,,\quad s^3=\cos\theta\,,\quad \theta=\theta(x,y) \tag{9}$$

существовать не могут, так как скирмовское (см. /5/) слагаемое $\mathcal{H}_3$ при подстановке (9) тождественно равно нулю, и уравнение $\frac{dH}{da}(1)=0$ (см. п. 2) не может иметь решений. Возможность существования статических солитонов с $Q=0$ нельзя исключить заранее, если скирмовский член заменяется, например, слагаемым $\gamma^2(\partial_i s^a \cdot \partial_i s^a)^2$.

4. Исследуем теперь солитоны с зарядом $Q=1$. На основании аналогии с моделью Скирма /5,10/ естественно предполагать, что минимум энергии локализованных распределений с $Q=1$ достигается на множестве конфигураций, описываемых следующей подстановкой:

$$s^1=s_x=\sin\theta\cdot n_x\,,\quad s^2=s_y=\sin\theta\cdot n_y\,,\quad s^3=s_z=\cos\theta\,,\qquad \vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\vec{R}}{R} \tag{10}$$

(доказательство этого утверждения будет представлено в отдельной работе).

В результате подстановки (10) в (I) получаем

$$\mathcal{H}(r)=\alpha^2\left[\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\right]+\beta^2\sin^2\theta+\gamma^2\frac{2}{r^2}\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 =$$
$$=\beta^2\left[\left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2+\frac{1}{R^2}\sin^2\theta+\sin^2\theta+\frac{2p}{R^2}\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Варьируя (II), находим уравнение для функции $\theta(R)$, которая с учетом соотношений (10) определяет солитонное решение:

$$\frac{d^2\theta}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d\theta}{dR}-\left(\frac{1}{R^2}+1\right)\sin\theta\cos\theta +$$
$$+2p\left[\frac{\sin^2\theta}{R^2}\frac{d^2\theta}{dR^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{R^2}\left(\frac{d\theta}{dR}\right)^2-\frac{\sin^2\theta}{R^3}\frac{d\theta}{dR}\right]=0\,. \tag{12}$$

Граничное условие при $R=\infty$ выберем в виде $\theta(\infty)=0$. Из условия конечности $\mathcal{H}(R)$ при $R=0$ получаем $\theta(0)=n\pi$. Далее из соотношения для конфигураций, задаваемых подстановкой (10) (см. /1/)

$$Q=\frac{1}{2}\left[1-\cos\theta(0)\right], \tag{13}$$

и равенства $Q=1$ находим, что $n=1$. В итоге граничное условие при $R=0$ принимает вид $\theta(0)=\pi$.

Подставляя в уравнение (12) разложение функции $\theta(R)$ в ряд при $R\to 0$, находим, что

$$\theta(R)=\pi-CR+O(R^2). \tag{14}$$

Для нахождения решения нелинейной краевой задачи применим метод "стрельбы": решая уравнение (12) с учетом (14) при различных значениях $C>0$, будем добиваться выполнения условия $\theta(\infty)=0$.

Численные исследования на ЭВМ были выполнены при различных значениях безразмерного параметра p . Солитонные функции $\theta(R)$ представлены на рис. I. Видно, что размер солитона монотонно увеличивается с ростом p , что согласуется с результатами оценок. Расчеты при малых p показывают, что при $p\to 0$ полуширина солитона $\Delta R_s \to 0$ ($\Delta R_s \approx 4\cdot 10^{-2}$ при $p=10^{-6}$; $\Delta R_s \approx 0{,}4$ при $p=10^{-2}$, т.е. при малых p $\Delta R_s \sim p^{\delta}$, где $\delta \approx 0{,}25$). Отметим, что результаты вычисления на ЭВМ энергии распределений $H=2\pi\int \mathcal{H} R\,dR$ в процессе "пристрелки" по параметру C дают четкое указание на устойчивость найденных солитонов относительно радиальных возмущений, т.е. варьирования функции $\theta(R)$: на солитонных функциях $\theta_s(R)$ достигается минимальное при данном p значение $H=H_s$.

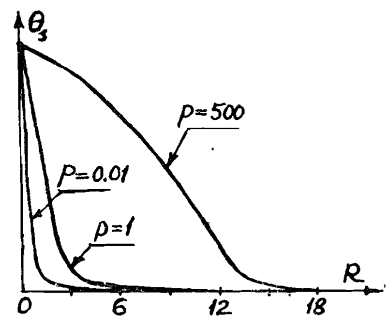

Рис. I

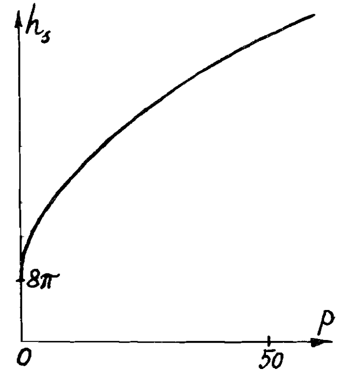

Рис. 2

Зависимость безразмерной энергии солитона $h_s=\alpha^{-2}H_s$ от p представлена на рис. 2. Кривую $h_s(p)$ при малых p можно описать формулой

$$h=A+B\,p^{\varkappa}\quad, \tag{I5}$$

где $A=8\pi$, $B\approx 37$, $\varkappa\approx 0{,}4$.

Соотношение (I5) можно рассматривать как численный ориентир при поисках аналитической оценки снизу энергии локализованных распределений H через Q и p.

Полученные в данной работе численно солитонные решения $\Theta_s(R)$ при малых p могут быть исследованы аналитически с помощью теории возмущений по параметру p, причем решениями уравнений нулевого приближения являются солитоны Белавина-Полякова в изотропном магнетике /8/.

Представляется интересным исследование в модели (I) солитонов с зарядом $Q=2$, ему будет посвящена следующая работа.

Авторы выражают благодарность проф. Е.П.Жидкову и В.Г.Маханькову, а также участникам семинара ЛВТА по вычислительной и прикладной математике за обсуждение результатов данной работы.

Литература

I. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", Киев, I983.
2. Фаддеев Л.Д. В поисках многомерных солитонов. В сборнике материалов IУ Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, I976, Д2-9788. Дубна; ОИЯИ, с. 207-223.
3. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-482, Дубна, I985.
4. Derrick G.H. J.Math Phys.,1964,5 ,1252 .
5. Skyrme T.H.R. Proc.Roy.Soc.,1961,A260 ,127 .
6. de Vega H.J. Phys.Rev.1978,D18 ,2945 .
7. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, Р5-85-588, Дубна, I985.
8. Белавин А.А., Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, I975, 22, 503.
9. Иванов Б.А., Стефанович В.А. ЖЭТФ, I986, 9I, 638.
IO. Rybakov Yu.P.,Sanyuk V.I. NBI,University of Copenhagen, NBI - ME - 81 - 49 ,Copenhagen , 1981 .

Рукопись поступила в издательский отдел
22 октября I987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Боголюбская А.А., Боголюбский И.Л. Р5-87-761

Двумерная модель анизотропного магнетика с устойчивыми топологическими солитонами

Показано, что в рамках двумерных гейзенберговских моделей магнетиков с различными типами анизотропии существование солитонов невозможно. Включение в гамильтониан слагаемого, аналогичного члену Скирма, делает возможными существование и устойчивость топологических солитонов. С помощью ЭВМ получены и исследованы солитоны с топологическим зарядом Q=1 в модели с анизотропией типа "легкая ось".

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Bogolubskaya A.A., Bogolubsky I.L. P5-87-761

Two-Dimensional Model of the Anisotropic Magnet with Stable Topological Solitons

It is proved that solitons do not exist within the frameworks of two-dimensional Heisenberg models with different anisotropy types. Inclusion of the addendum analogous to the Skyrme term in the Hamiltonian makes the existence and the stability of the topological solitons possible. By means of a computer solitons with the topological charge Q=1 have been obtained and investigated in the model with the "easy-axis" anisotropy.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987