сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-572

П.Е.Жидков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КИНК-РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА - ГОРДОНА

1987

В последнее время большой интерес у исследователей вызывает изучение устойчивости нелинейных волн. Подробный перечень физической литературы и результатов численных экспериментов по устойчивости солитонов и подобных им объектов можно найти в обзорах /I-3/. Математический аспект этой проблемы изложен в обзоре /4/.

Исследованию устойчивости кинк-решений посвящены работы /5-7/ (см. также обзор /4/). В работе /5/ доказана устойчивость в некотором смысле (устойчивость "формы") стационарных кинк-решений вещественного нелинейного уравнения Клейна-Гордона, а в работе /6/ - устойчивость "формы" решений вида кинков обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости как стационарных, так и нестационарных кинк-решений для вещественного и комплексного уравнений Клейна-Гордона. Отметим, что это уравнение играет важную роль в квантовой теории поля /8/. Доказана устойчивость с точностью до сдвига и поворота кинк-решений для комплексного уравнения Клейна-Гордона и устойчивость "формы" для вещественного уравнения.

Часть I. Комплексное уравнение Клейна-Гордона

I°. Рассмотрим комплексное нелинейное уравнение Клейна-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = f(|u|^2)u . \qquad (I.I)$$

Оно обладает играющими важную роль в физических исследованиях решениями вида

$$\Phi(x,t) = e^{i\bar{\omega}(bx-t)}A(x-bt) \qquad (I.2)$$

с вещественной функцией A, удовлетворяющей уравнению

$$A'' + \bar{\omega}^2 A = \frac{1}{b^2-1} Af(A^2) \quad , \qquad (I.3)$$

где $\bar{\omega}$, b - вещественные параметры, $b \neq \pm 1$. В настоящем сообщении рассматриваются кинк-решения, т.е. решения уравнения (I.I) вида (I.2) с функцией $A(x)$, удовлетворяющей уравнению (I.3) и монотонной, ограниченной: $A'(x)\neq 0$, $|A(-\infty)|+|A(+\infty)|<\infty$. Основной результат состоит в том, что указанные решения устойчивы в некотором смысле, если $|b|<1$, $A(\pm\infty)>0$.

2^0. Пусть $\Phi(x,t)$ – кинк-решение. Введем следующие обозначения. Положим

$$|g(x)|_C=\sup_{x\in R}|g(x)|,\quad |g|_2=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx\right\}^{1/2},$$

$$\|g\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[q\,|g(x)|^2+|g'(x)|^2\right]dx\right\}^{1/2},\quad \text{где}$$

$$q=1+\left|-\bar\omega^2+\frac{f(A^2)+2A^2f'(A^2)}{b^2-1}\right|_C .$$

Известно, что для любой функции g из пространства Соболева $W_2^1(R)$ имеет место неравенство $|g|_C\le C\,\|g\|$, где $C=\mathrm{Const}>0$.

Пусть A_1, A_2 – постоянные, такие что

(а) $A_1,A_2>0$;

(б) $\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A_i^2)+2A_i^2f'(A_i^2)\right]<0$, $i=1,2$.

Тогда для любого решения $A(x)$ уравнения (I.3), удовлетворяющего условиям $A(-\infty)=A_1$, $A(+\infty)=A_2$, в силу (б) имеет место быстрое убывание $[A(x)-A_i]$ и $A'(x)$ при $|x|\to\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[A(x)-A_1]\,e^{-\gamma x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}[A(x)-A_2]\,e^{\gamma x}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}A'(x)\,e^{-\gamma x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}A'(x)\,e^{\gamma x}=0$$

для некоторого $\gamma>0$ /9/.

Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt}-u_{xx}=f(|u|^2)u,\quad t>0,\quad -\infty<x<\infty,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t'(x,0)=u_1(x). \tag{2.I}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что для любых функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, достаточно близких к $\Phi(x,0)$, $\Phi_t'(x,0)$ соответственно, задача (2.I) имеет глобальное (определенное для всех $t>0$) решение. Более точно, предположим, что если $[\Phi(x,0)-u_0(x)]$, $[\Phi_t'(x,0)-u_1(x)]$ – гладкие, быстро убывающие при $|x|\to\infty$ функции, то существует гладкое решение $u(x,t)$ задачи (2.I), определенное для всех $t>0$, причем равномерно по любому конечному интервалу изменения t вели-

чины

$$u(x,t)-A_1\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},\quad u_x'(x,t)-i\bar\omega bA_1\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},$$

$$u_t'(x,t)+i\bar\omega A_1\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},\quad u_{xt}''(x,t)-\bar\omega^2bA_1\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},$$

$$u_{xx}''(x,t)+\bar\omega^2b^2A_1\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},\quad u_{tt}''(x,t)+\bar\omega^2A_1\exp\{i\bar\omega(bx-t)\}$$

быстро убывают при $x\to-\infty$, а величины

$$u(x,t)-A_2\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},\quad u_x'(x,t)-i\bar\omega bA_2\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},$$

$$u_t'(x,t)+i\bar\omega A_2\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},\quad u_{xt}''(x,t)-\bar\omega^2bA_2\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},$$

$$u_{xx}''(x,t)+\bar\omega^2b^2A_2\exp\{i\bar\omega(bx-t)\},\quad u_{tt}''(x,t)+\bar\omega^2A_2\exp\{i\bar\omega(bx-t)\}$$

быстро убывают при $x\to+\infty$.

Рассмотрим функцию $R(\tau)=\big\|\,|u(x-\tau,t)|-|\Phi(x,t)|\,\big\|$.

Лемма 2.I

Функция $R(\tau)$ достигает своего абсолютного минимума при некотором $\tau=\tau_0(t)$.

Доказательство

Ясно, что $R(\tau)\to+\infty$ при $\tau\to\infty$, поэтому достаточно доказать непрерывность $R(\tau)$. Имеем для произвольного $c>0$:

$$R^2(\tau)=\int_{-c}^{c}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)|-|\Phi(x,t)|\right]^2+\left[|u(x-\tau,t)|_x-|\Phi(x-\tau,t)|_x\right]^2\right\}dx$$

$$+\int_{-\infty}^{-c}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)|-|\Phi(x,t)|\right]^2+\left[|u(x-\tau,t)|_x-|\Phi(x,t)|_x\right]^2\right\}dx+$$

$$+\int_{c}^{+\infty}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)|-|\Phi(x,t)|\right]^2+\left[|u(x-\tau,t)|_x-|\Phi(x,t)|_x\right]^2\right\}dx .$$

Зафиксируем некоторые $\tau_1\in R$, $\varepsilon>0$. Ясно, что можно выбрать $c>0$ так, что

$$\int_{-\infty}^{-c}+\int_{c}^{+\infty}<\varepsilon .$$

для всех $\tau\in(\tau_1-1,\tau_1+1)$. Далее,

$$\lim_{\tau\to\tau_1}\int_{-c}^{c}\left\{q\left[|u(x-\tau,t)|-|\Phi(x,t)|\right]^2+\left[|u(x-\tau,t)|_x-|\Phi(x,t)|_x\right]^2\right\}dx=$$

$$\int_{-c}^{c}\left\{q\left[|u(x-\tau_1,t)|-|\Phi(x,t)|\right]^2+\left[|u(x-\tau_1,t)|_x-|\Phi(x,t)|_x\right]^2\right\}dx ;$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{\tau\to\tau_1}} \left| R^2(\tau) - R^2(\tau_1) \right| \leq \varepsilon .$$

Лемма 2.I доказана.

Введем функцию $U(s) = \int_0^s f(p)\,dp$. Сформулируем необходимое и достаточное условие существования монотонного ограниченного решения уравнения (I.3).

Лемма 2.2

Пусть для определенности $0 < A_1 < A_2$. Для того, чтобы уравнение (I.3) имело монотонное решение $A(x)$, удовлетворяющее условиям $A(-\infty)=A_1$, $A(+\infty) = A_2$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(в) $\bar\omega^2 A_i - \frac{1}{b^2-1}\,(A_i^2)A_i = 0$, $i=1,2$;

(г) $\bar\omega^2 A_1^2 + \frac{U(A_1^2)}{1-b^2} = \bar\omega^2 A_2^2 + \frac{U(A_2^2)}{1-b^2}$;

(д) $\bar\omega^2 s^2 + \frac{U(s^2)}{1-b^2} < \bar\omega^2 A_1^2 + \frac{U(A_1^2)}{1-b^2}$ для всех $s \in (A_1, A_2)$.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 3.I из работы /7/.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены свойства (а)–(д).

Лемма 2.3

Функционал

$$M(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{|u_t|^2 + |u_x|^2 - U(|u|^2) + b(u_t\bar u_x + \bar u_t u_x) + i\bar\omega(b^2-1)(u_t\bar u - u\bar u_t) + C\right\}dx ,$$

где $C = \bar\omega^2(1-b^2)A_1^2 + U(A_1^2)$, определен и не зависит от t на решениях задачи (2.I), удовлетворяющих свойствам (2.2), (2.3).

Доказательство

Подставляя асимптотики u , u_x при $x \to \pm\infty$, легко убедиться, что функционал $I(u)$, понимаемый в смысле главного значения, определен на решениях задачи Коши (2.I) со свойствами (2.2), (2.3). Далее,

$$\frac{dM(u)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{u_{tt}\bar u_t + u_t\bar u_{tt} + u_{xt}\bar u_x + u_x\bar u_{xt} - f(|u|^2)u_t\bar u - f(|u|^2)u\bar u_t +$$
$$+ b(u_{tt}\bar u_x + u_t\bar u_{xt} + \bar u_{tt}u_x + u_{xt}\bar u_t) + i\bar\omega(b^2-1)(u_{tt}\bar u - u\bar u_{tt})\Big\}dx =$$

[В силу равномерности асимптотик (2.2), (2.3) по t этот интеграл сходится равномерно на любом конечном интервале изменения t , поэтому такое дифференцирование под знаком интеграла законно.]

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{u_{tt}\bar u_t + u_t\bar u_{tt} - (u_t\bar u_{xx} + u_{xx}\bar u_t) + (u_t\bar u_x + u_x\bar u_t)_x -$$
$$- f(|u|^2)(u_t\bar u + u\bar u_t) + b\Big[(u_{xx} + f(|u|^2)u)\bar u_x + (\bar u_{xx} + f(|u|^2)\bar u)u_x +$$
$$+ (|u_t|^2)_x\Big] + i\omega(b^2-1)\Big[(u_{xx} + f(|u|^2)u)\bar u - (\bar u_{xx} + f(|u|^2)\bar u)u\Big]\Big\}dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\bar u_t(u_{tt} - u_{xx} - f(|u|^2)u) + u_t(\bar u_{tt} - \bar u_{xx} - f(|u|^2)\bar u) +$$
$$+ b(|u_x|^2 + U(|u|^2))_x + b(|u_t|^2)_x + i\omega(b^2-1)(u_x\bar u - u\bar u_x)_x\Big\}dx =$$

[используем асимптотики (2.2), (2.3)]

$$= b\left[(A_2^2 - A_1^2)\bar\omega^2(1-b^2) + U(A_2^2) - U(A_1^2)\right] =$$
$$= 0$$

в силу свойства (д) и лемма 2.3 доказана.

Положим $v(x,t) = u(x - \tau_0(t), t)$, где τ_0 – функция из леммы 2.I. Ясно, что в силу того, что $A(x,t) \geqslant \min\{A_1; A_2\} > 0$, для всех u_0 , достаточно близких к $\Phi(x,0)$, найдется окрестность нуля O такая, что для любого $t \in O$ и всех x $|v(x,t)| \neq 0$. Запишем $\Phi(x,t)$ в виде $\Phi(x,t) = A(x,t)e^{i\varphi(x,t)}$, где $\varphi = \bar\omega(bx - t)$. Далее, положим $a = |v| - A$. Определим $\omega(x,t)$ как разность произвольной непрерывной ветви многозначной функции $\operatorname{Arg} v(x,t)$ и $\varphi(x,t)$. В силу того, что $|v(x,t)| \neq 0$ при $t \in O$, эта функция определена. Имеем: $v = (A+a)e^{i(\varphi+\omega)}$. Заметим еще, что

$a = a(x, x - \tau_0(t), t)$, $\omega = \omega(x, x - \tau_0(t), t)$.

Для функции $v(x,t)$, очевидно, определен и не зависит от t функционал

$$M_1(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + |v_x|^2 - U(|v|^2) + b\left(\frac{\partial v}{\partial t}\bar v_x + \frac{\partial \bar v}{\partial t}v_x\right) + i\bar\omega(b^2-1)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\bar v - v\frac{\partial \bar v}{\partial t}\right) + C\right\}dx ,$$

в котором $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u(x - \tau_0(t), t)}{\partial t}$. После несложных преобразований получаем

$$\Delta M=M_1(v)-M(\Phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{(a_t+ba_x)^2+(1-b^2)a_x^2+a^2\left[\bar{\omega}^2(b^2-1)-f(A^2)-2A^2f'(A^2)\right]+$$
$$+(\omega_t+b\omega_x)^2\cdot(A+a)^2+(1-b^2)\omega_x^2(A+a)^2+\frac{1}{2}a^2\Big[f((A+\theta a)^2)-f(A^2)+2(A+\theta a)^2\cdot \tag{2.4}$$
$$f'((A+\theta a)^2)-2A^2f'(A^2)\Big]\Big\}dx\,,$$

где $\theta=\theta(x,t)\in(0,1)$.

Здесь также $a_t=\dfrac{\partial a(x,x-\tau_0(t),t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=\dfrac{\partial\omega(x,x-\tau_0(t),t)}{\partial t}$,

т.е. дифференцирование ведется по третьему аргументу.

Ясно, что если будет доказана малость $\|a\|$ для всех t, то будет мала и $|a|_C$, поэтому справедливо представление $v=(A+a)e^{i(\varphi+\omega)}$ и (2.4).

Сформулируем основной результат первой части работы.

Теорема I

Пусть $b^2<1$, $f\in C^1_{loc}(R)$ и пусть выполнены свойства (а)-(д). Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для произвольного решения $u(x,t)$ задачи Коши (2.I) такого, что $\|a\|_{t=0}<\delta$, $|\omega_x|_2\big|_{t=0}<\delta$ и $\Delta M<\delta$, для всех $t>0$ имеют место неравенства

$$\|a\|<\varepsilon\,,\quad |\omega_x|_2<\varepsilon\,.$$

Поясним смысл этой теоремы. Из нее вытекает следующее более слабое утверждение, из которого следует устойчивость кинк-решения с точностью до сдвига и поворота.

Теорема I'

Пусть $b^2<1$, $f\in C^1_{loc}(R)$ и пусть выполнены свойства (а)-(д). Тогда для любых $\varepsilon>0$ и $d>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого решения $u(x,t)$ задачи Коши, для которого $\|a\|\big|_{t=0}<\delta$, $|\omega_x|\big|_{t=0}<\delta$ и $\Delta M<\delta$, найдется $\tau_0=\tau_0(t)$ и для любого $x_0\in R$ найдется $\varphi_0=\varphi_0(t)$, такие, что

$$\left\|u(x-\tau_0,t)e^{i\varphi_0}-\Phi(x,t)\right\|_{W_2^1(x_0-d,\,x_0+d)}<\varepsilon\,.$$

Следующая лемма устанавливает достаточные условия того, что $\|a\|\big|_{t=0}\to0$, $|\omega_x|_2\big|_{t=0}\to0$, $\Delta M\to0$ при $u_0\to\Phi(x,0)$, $u_1(x)\to\Phi'_t(x,0)$.

Лемма 2.4

$\|a\|\big|_{t=0}\to0$, $|\omega_x|_2\big|_{t=0}\to0$, $\Delta M\to0$ при $u_0(x)\to\Phi(x,0)$, $u_1(x)\to\Phi'_t(x,0)$ так, что $\|u_0-\Phi(\cdot,0)\|\to0$, $|u_1-\Phi'_t(\cdot,0)|_2\to0$.

Доказательство

Сначала докажем, что $\tau_0(0)\to0$ при $u_0\to\Phi(x,0)$ так, что $\|u_0-\Phi(\cdot,0)\|\to0$. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность $\{u_0^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$, что $u_0^{(k)}\to\Phi(x,0)$ при $k\to\infty$, но соответствующая последовательность $\tau_0(0)=\tau_0^{(k)}$ удовлетворяет условию $|\tau_0^{(k)}|\geqslant\tau'>0$. Как нетрудно проверить, $\big\|\,|u_0^{(k)}|-|\Phi(\cdot,0)|\,\big\|\to0$ при $k\to\infty$. Следовательно,

$$R(\tau_0^{(k)})=\big\|\,|u_0^{(k)}|-|\Phi(\cdot+\tau_0^{(k)},0)|\,\big\|=\big\|\,|u_0^{(k)}|-|\Phi(\cdot,0)|+|\Phi(\cdot,0)|-|\Phi(\cdot+\tau_0^{(k)},0)|\,\big\|\geqslant$$
$$\big\|\,|\Phi(\cdot,0)|-|\Phi(\cdot+\tau_0^{(k)},0)|\,\big\|-\big\|\,|u_0^{(k)}|-|\Phi(\cdot,0)|\,\big\|\geqslant\mathrm{Const}>0$$

для всех достаточно больших k. Но это противоречит выбору $\tau_0^{(k)}$. Тем самым доказано, что $\tau_0(0)\to0$ при $u_0\to\Phi(x,0)$ так, что $\|u_0-\Phi(\cdot,0)\|\to0$.

Положим $v_0(x)=u_0(x-\tau_0(t))$, $v_1(x)=u_1(x-\tau_0(0))$. Нетрудно убедиться в том, что $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to0$, $|v_1-\Phi'_t(\cdot,0)|_2\to0$, при $u_0\to\Phi(x,0)$, $u_1\to\Phi_t(x,0)$, как в условиях леммы.

Пусть $v_1=\mathrm{Re}\,v$, $v_2=\mathrm{Im}\,v$, $\Phi_1=\mathrm{Re}\,\Phi$, $\Phi_2=\mathrm{Im}\,\Phi$. Рассмотрим

$$|a|_2^2\big|_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{\Phi_1^2+\Phi_2^2}\right)^2dx\,\Big|_{t=0}=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{v_1^2-\Phi_1^2+v_2^2-\Phi_2^2}{2(A+\theta_1a)}\right]^2dx\,\Big|_{t=0}\,,$$

где $\theta_1=\theta_1(x)\in(0,1)$.

Отсюда

$$|a|_2^2\big|_{t=0}\leqslant\left\{\left|\frac{v_1^2-\Phi_1^2}{2(A+\theta_1a)}\right|_2\Big|_{t=0}+\left|\frac{v_2^2-\Phi_2^2}{2(A+\theta_1a)}\right|_2\Big|_{t=0}\right\}^2\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\left|\frac{v_1+\Phi_1}{2(A+\theta a)}\right|_C\cdot|v_1-\Phi_1|_2\Big|_{t=0}+\left|\frac{v_2+\Phi_2}{2(A+\theta_1a)}\right|_C|v_2-\Phi_2|_2\Big|_{t=0}\right\}^2\,,$$

следовательно, $|a(\cdot,0)|_2\to0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to0$.

Аналогично $|a_x(\cdot,0)|_2\to0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to0$.

Рассмотрим $\|v(\cdot,0)-\Phi(\cdot,0)\|^2=$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{q\left|(A+a)e^{i(\varphi+\omega)}-Ae^{i\varphi}\right|^2+\left|(A_x+a_x)e^{i(\varphi+\omega)}-A_xe^{i\varphi}+i(\varphi_x+\omega_x)(A+a)e^{i(\varphi+\omega)}-i\varphi_xAe^{i\varphi}\right|^2\Big\}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{q\left|A+a-Ae^{-i\omega}\right|^2+\left|A_x+a_x-A_xe^{-i\omega}+i(\varphi_x+\omega_x)(A+a)-i\varphi_xAe^{-i\omega}\right|^2\Big\}dx\,.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|^2\geqslant q\left|A+a-Ae^{-i\omega}\right|_2^2\Big|_{t=0}\geqslant qA_1^2\left\{|1-e^{-i\omega}|_2\Big|_{t=0}-|a(\cdot,0)|_2\right\}^2,$$

и следовательно, $|1-e^{i\omega}|_2\to0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to0$.

Аналогично $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|^2\geqslant$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|A_x+a_x-A_xe^{-i\omega}+i(\varphi_x+\omega_x)(A+a)-i\varphi_xAe^{-i\omega}\right|^2\Big|_{t=0}dx \geqslant$$
$$\left\{|a_x(\cdot,0)|_2+|\omega_x(\cdot,0)(A(\cdot,0)+a(\cdot,0))|_2-|A_x(1-e^{-i\omega})+i\varphi_xA(1-e^{-i\omega})+i\varphi_xa|_2\big|_{t=0}\right\}^2.$$

Заметим, что $\varphi_x=\bar\omega b=const$, поэтому и в силу предыдущего $|A_x(1-e^{-i\omega})+i\varphi_xA(1-e^{-i\omega})+i\varphi_xa|_2\to 0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|^2\to 0$,

следовательно, имеем $|a_x(\cdot,0)|_2\to 0$, $|\omega_x(A+a)|_2\big|_{t=0}\to 0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to 0$. Поскольку из доказанного вытекает, что $\|a\|\big|_{t=0}\to 0$, имеем $|a|_C\big|_{t=0}\to 0$, и следовательно, (т.к. $A\geqslant const>0$), $|\omega_x(\cdot,0)|_2\to 0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to 0$.

Докажем, что $\Delta M\to 0$ при $u_0\to\Phi(x,0)$, $u_1\to\Phi_t'(x,0)$, как в условиях леммы. Так же, как было доказано, что $|a_x|_2\big|_{t=0}\to 0$, $|\omega_x|_2\big|_{t=0}\to 0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to 0$, можно доказать, что $|a_t(\cdot,0)|_2\to 0$, $|\omega_t(\cdot,0)|_2\to 0$ при $\|v_0-\Phi(\cdot,0)\|\to 0$, $|v_1-\Phi_t'(\cdot,0)|_2\to 0$. Но тогда из представления (2.4) вытекает утверждение леммы.

Из доказанной леммы вытекает

Теорема I''

Пусть $b^2<1$, $f\in C^1_{loc}(R)$ и пусть выполнены свойства (а)-(д). Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для произвольного решения задачи Коши (2.I) такого, что $\|u_0-\Phi(\cdot,0)\|<\delta$, $|u_1-\Phi_t'(\cdot,0)|_2<\delta$, для всех $t>0$ выполнены неравенства $\|a\|<\varepsilon$, $|\omega_x|_2<\varepsilon$.

3°. В этом пункте будет доказана теорема I.

Лемма 3.I

$\|a\|$ – непрерывная функция t.

Доказательство

Для произвольных t_1, t_2 имеем

$$\|a(\cdot,t_1)\|-\|a(\cdot,t_2)\| = \|A(x+\tau_0(t_1),t_1)-|u(\cdot,t_1)|\|-\|A(x+\tau_0(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\|$$
$$\leq \|A(x+2b(t_1-t_2)+\tau_0(t_2),t_1)-|u(\cdot,t_1)|\|-\|A(x+\tau_0(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\| =$$
$$\|A(x+\tau_0(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_1)|\|-\|A(x+\tau_0(t_2),t_2)-|u(\cdot,t_2)|\| \leq$$
$$\||u(\cdot,t_1)|-|u(\cdot,t_2)|\|.$$

Отсюда в силу произвольности t_1, t_2 и предположении о свойствах решения $u(x,t)$ вытекает утверждение леммы 3.I.

Рассмотрим функционал
$$J(g)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(1-b^2)g_x^2+g^2\left[\bar\omega^2(b^2-1)-f(A^2)-2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx.$$
Оценим его снизу.

Лемма 3.2

Существует не зависящая от g и t постоянная $c_1>0$ такая, что $J(g)\geqslant c_1|g|_2^2$ для всех функций $g\in W_2^1(R)$, удовлетворяющих условию $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)A'_x(x,t)dx=0$.
(3.I)

Доказательство

Рассмотрим оператор $L\varphi=-(1-b^2)\varphi''+q(x)\varphi$, $-\infty<x<\infty$, где $q(x)=\bar\omega^2(b^2-1)-f(A^2)-2A^2f'(A^2)$. Положим

$q_i=\bar\omega^2(b^2-1)-f(A_i^2)-2A_i^2f'(A_i^2)$, $i=1,2$.

В силу условия (б) $q_i>0$, $i=1,2$.

Известно /I0/, что непрерывный спектр оператора L совпадает с полупрямой $[b,+\infty)$, где $b=\frac{1}{1-b^2}\min\{q_1;q_2\}$. Далее, дифференцируя (I.3) по x, убеждаемся, что, поскольку $A'(x)\in L_2(R)$, $\varphi_0=A'_x(x,t)$ является собственной функцией оператора L (как функция x), отвечающей собственному значению $\lambda_0=0$, причем поскольку φ_0 сохраняет знак, λ_0 – наименьшее и простое собственное значение. Из спектрального разложения самосопряженного в $L_2(R)$ расширения оператора L /I0/ вытекает для всех g, удовлетворяющих (3.I):
$$J(g)=(Lg,g)\geqslant c_1|g|_2^2,$$
где $c_1=b$, если у оператора L нет положительных собственных значений, либо равно наименьшему из этих значений.

Лемма 3.2 доказана.

Величина $\tau_0(t)$ была определена как точка минимума функции $R(\tau)$. Следовательно,
$$(R^2(\tau))'\big|_{\tau=\tau_0}=2\int_{-\infty}^{\infty}aA'_x\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx=0. \quad (3.2)$$

Положим
$$K=\frac{|A'|_2\left|A'\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}\right|_2}{\int_{-\infty}^{\infty}A'^2\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx}.$$

Лемма 3.3

В классе функций $g \in W_2^1(R)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)A_x'(x,t)\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx = 0, \qquad (3.3)$$

справедлива оценка $J(g) \geqslant C_2|g|_2^2$, где $C_2=C_1/(1+K)^2$.

Доказательство

Представим g в виде $g=\alpha A_x'+\varphi$, где $\int_{-\infty}^{\infty} A_x'\varphi\,dx=0$.

Тогда $J(g)=J(\varphi)\geqslant C_1|\varphi|_2^2$. Из условия (3.3) получаем

$$\alpha\int_{-\infty}^{\infty} A_x'^2\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx \; +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi A_x'\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx = 0 .$$

Отсюда получаем

$$|\alpha|\cdot|A_x|_2=|A_x'|_2\left|\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi A_x'\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx}{\int_{-\infty}^{\infty}A_x'^2\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx}\right| \leqslant$$

$$|A_x'|_2\,|\varphi|_2\cdot\frac{\left|A_x'\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}\right|_2}{\left|\int_{-\infty}^{\infty}A_x'^2\left\{q+\bar\omega^2-\frac{1}{b^2-1}\left[f(A^2)+2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx\right|}=K|\varphi|_2 .$$

Далее имеем $|g|_2\leqslant|\alpha|\cdot|A_x'|_2+|\varphi|_2\leqslant(1+K)|\varphi|_2$. Следовательно, $J(g)=J(\varphi)\geqslant C_1|\varphi|_2^2\geqslant C_2|g|_2^2$, где $C_2=C_1/(1+K)^2$, и лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4

В классе функций $g\in W_2^1(R)$, удовлетворяющих условию (3.2), справедлива оценка $J(g)\geqslant C_3\|g\|^2$ с некоторой положительной постоянной C_3.

Доказательство

Для произвольного K имеем

$$J(g)=(1-K)\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(1-b^2)g_x^2+g^2\left[\bar\omega^2(b^2-1)-C_2-f(A^2)-2A^2f'(A^2)\right]\right\}dx \; +$$

$$+K(1-b^2)\int_{-\infty}^{\infty}g_x^2dx+(1-K)C_2\int_{-\infty}^{\infty}g^2dx+K\int_{-\infty}^{\infty}g^2\left[\bar\omega^2(b^2-1)-f(A^2)-2A^2f'(A^2)\right]dx .$$

Здесь первое слагаемое в правой части неотрицательно в силу леммы 3.3. Кроме того, найдется $k=k_0>0$ такое, что

$$k_0\max_{x\in R}\left|\bar\omega^2(b^2-1)-f(A^2)-2A^2f'(A^2)\right|\leqslant(1-k_0)C_2/2 .$$

Поэтому окончательно получаем

$$J(g)\geqslant(1-b^2)k_0\int_{-\infty}^{\infty}g_x^2dx+\frac{(1-k_0)C_2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}g^2dx\geqslant C_3\|g\|^2 .$$

Лемма 3.4 доказана.

Оценим теперь последнее слагаемое в выражении для ΔM. Имеет место

Лемма 3.5.

Существует определенная на полупрямой $s\geqslant 0$ неотрицательная функция $L(s)$ такая, что $\lim_{s\to+0}L(s)=0$ и справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}a^2\left[f((A+\theta a)^2)-f(A^2)+2(A+\theta a)^2f'((A+\theta a)^2)-2A^2f'(A^2)\right]dx\right|\leqslant\|a\|^2L(\|a\|).$$

Доказательство

По теореме вложения Соболева $|g|_C\leqslant C_4\|g\|$ для любой $g\in W_2^1(R)$, где $C_4=\mathrm{const}>0$. Положим $L(0)=0$, для любого $s>0$

$$L(s)=\sup_{\substack{|\varphi|\leqslant C_4 s\\ A_1<\psi<A_2}}\left|f((\varphi+\psi)^2)-f(\psi^2)+2(\varphi+\psi)^2f'((\varphi+\psi)^2)-2\psi^2f'(\psi^2)\right| .$$

Свойство $\lim_{s\to+0}L(s)=0$ вытекает из равномерной непрерывности функции f, f' на любом конечном интервале, и лемма доказана.

Теперь все готово для доказательства теоремы I. Из выражения (2.4) для ΔM, лемм 3.4 и 3.5 вытекает следующая оценка:

$$\Delta M\geqslant C_3\|a\|^2-\|a\|^2L(\|a\|). \qquad (3.4)$$

Положим $H(s)=C_3s^2-s^2L(s)$. По лемме 3.7 найдется $\delta_1>0$ такое, что для любого s : $0<s\leqslant\delta_1$ справедливо неравенство $H(s)\geqslant\frac{C_3}{2}s^2$. Зафиксируем любое $\delta_2<\delta_1$ и пусть $\Delta M<\frac{C_3}{4}\delta_2^2$, $\|a\|\leqslant\delta_2$ для $t=0$. Тогда в силу леммы 3.I очевидно, что $\|a\|\leqslant\delta_2$ для всех $t\geqslant 0$. Тем самым доказано, что $\|a\|\to 0$ равномерно по $t\geqslant 0$ при $\Delta M\to 0$, $\|a\|\,\big|_{t=0}\to 0$. Для доказательства аналогичного утверждения для $|\omega_x|_2$ достаточно заметить, что

$$0 \leq (1-b^2)|\omega_x(A+a)|_2^2 \leq \Delta M - J(a) -$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} a^2\left[f((A+\theta a)^2)-f(A^2)+2(A+\theta a)^2 f'((A+\theta a)^2)-2A^2 f'(A^2)\right] dx \quad .$$

Теорема I доказана.

Часть II. Вещественное уравнение Клейна–Гордона

4^0. Вещественное уравнение Клейна–Гордона рассматривалось в работе /5/ (см. также /4/)

$$u_{tt} - u_{xx} = f(u) \cdot \qquad (4.I)$$

Здесь f – гладкая вещественная функция. Подстановка $u=\phi(x-bt)$, где $b=\mathrm{const}\neq \pm 1$, приводит к следующему уравнению для функции ϕ:

$$\phi'' = \frac{1}{b^2-1}\phi \quad . \qquad (4.2)$$

При некоторых предположениях относительно функции f оно обладает монотонными ограниченными решениями. В этом случае решение $\phi(x-bt)$ уравнения (4.I) называется кинком.

Устойчивость стационарных $(b=0)$ кинк-решений доказана в работе /5/. В этой же работе изучалась устойчивость нестационарных кинков. Было показано, что преобразование Лоренца переводит их в стационарные при сохранении вида уравнения. Заметим, однако, что отсюда еще не вытекает устойчивость исходных решений.

5^0. Сформулируем основные результаты, касающиеся вещественного уравнения Клейна–Гордона и его кинк-решений. Доказательство этих утверждений либо совпадает с комплексным случаем, либо проще и поэтому не приводится.

Рассмотрим уравнение (4.2). Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in R$.

Лемма 5.I

Пусть $b^2 \neq 1$. Для того, чтобы уравнение (4.2) имело монотонное решение $\Phi(x)$ такое, что $\Phi(-\infty)=\Phi_1$, $\Phi(+\infty)=\Phi_2$, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

(а$'$) $f(\Phi_i) = 0$, $i=1,2$;

(б$'$) $U(\Phi_1)=U(\Phi_2)$, где $U(\Phi)=\int_0^{\Phi} f(p)dp$;

(в$'$) $\frac{1}{1-b^2}U(\Phi) < \frac{1}{1-b^2}U(\Phi_1)$ для всех $\Phi\in(\Phi_1,\Phi_2)$.

Пусть выполнены условия (а$'$)–(в$'$) и пусть, кроме того, выполнено условие

(г$'$) $\frac{1}{b^2-1} f'(\Phi_i) > 0$, $i=1,2$.

Тогда решение $\Phi(x)$, существование которого гарантируется леммой 5.I, удовлетворяет для некоторого $\gamma > 0$ условиям

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\gamma x}[\Phi(x)-\Phi_1] = 0 , \quad \lim_{x\to+\infty} e^{\gamma x}[\Phi(x)-\Phi_2] = 0 ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\gamma x}\Phi'(x) = 0 , \quad \lim_{x\to+\infty} e^{\gamma x}\Phi'(x)=0 .$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &u_{tt}-u_{xx}=f(u) , \quad x\in R , \quad t>0 , \\ &u(x,0)=u_0(x) , \quad u_t'(x,0)=u_1(x) . \end{aligned} \qquad (5.I)$$

Здесь u_0, u_1 – вещественные функции. Будем предполагать, что если

$$[\Phi(x,0)-u_0(x)] \in W_2^1(R) , \quad [\Phi_t'(x,0)-u_1(x)] \in L_2(R)$$

и эти величины достаточно малы в указанных пространствах, то существует глобальное (определенное для всех $t>0$) решение $u(x,t)$ задачи Коши, причем для любого $t_0 \geq 0$ выполнено условие

$$\lim_{t\to t_0} \|u(\cdot,t)-u(\cdot,t_0)\| = 0 ,$$

и не зависит от t функционал

$$M(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{u_t^2+u_x^2-2U(u)+2bu_t u_x+C\right\}dx ,$$

где $C=2U(\Phi_1)$. Оправданием последнему предположению (о функционале M) служит то обстоятельство, что если предположить, что для решения $u(x,t)$ величина $[u(x,t)-\Phi(x,t)]$ и ее производные быстро убывают при $x\to\infty$, то, как и в части I, можно доказать равенство $\frac{dM(u)}{dt} = 0$ прямым дифференцированием по t .

Как и в части I, введем функцию $R(\tau)=\inf_{\tau\in R}\|u(x-\tau,t) - \Phi(x,t)\|$.

Имеет место

Лемма 5.2

Функция $R(\tau)$ достигает своего абсолютного минимума при некотором $\tau = \tau_0(t)$.

Положим $v(x,t)=u(x-\tau_0(t),t)$. Функцию v можно представить в виде $v=\Phi+h$, где $h=v-\phi$. Нетрудно видеть, что $h=h(x,x-\tau_0(t),t)$.

Сформулируем основной результат об устойчивости.

Теорема 2

Пусть $b^2<1$, $f\in C^1_{loc}(R)$ и пусть выполнены условия (а')-(г'). Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для произвольного решения $u(x,t)$ задачи Коши (5.I) такого, что $\|h\|\big|_{t=0}<\delta$ и $\Delta M=M(u)-M(\phi)<\delta$, для всех $t>0$ имеет место неравенство $\|h\|<\varepsilon$. Имеет место также утверждение, аналогичное теореме I''.

Теорема 2'

Пусть $b^2<1$, $f\in C^1_{loc}(R)$ и пусть выполнены свойства (а')-(г'). Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $\|u_0-\Phi(\cdot,0)\|<\delta$, $|u_1-\Phi_t'(\cdot,0)|_2<\delta$, то $\|h\|<\varepsilon$ для всех $t>0$.

Замечание

В части I для комплексного уравнения Клейна-Гордона было сделано предположение $A_1,A_2>0$, а в части II такого предположения для Φ_1, Φ_2 нет. Такое предположение связано с представлением для возмущенного решения $v=(A+a)e^{i(\varphi+\omega)}$. Если его отбросить, то такое представление для функции v, вообще говоря, невозможно. Действительно, если предположить, что оно справедливо, причем $a(x,t)\to 0$ при $x\to\infty$, то из него вытекает, что функция v обращается в нуль при некотором $x_0\in R$, что для произвольной комплексной функции неверно.

Заметим, что для комплексного уравнения Клейна-Гордона с кубической нелинейностью $f(s)=|s|$ неустойчивость кинка, для которого $A_1=-A_2\neq 0$, доказана в работе /II/.

В заключение автор выражает благодарность И.В.Барашенкову и В.Г.Маханькову за полезное обсуждение работы.

Литература

I. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A., Rubenchik A.M. Soliton stability. Препринт ин-та автоматики и электрометрии СО АН СССР, № I99, 62 с., Новосибирск, I983.
2. Makhankov V.G. Dynamics of classical solitons(in non-integrable systems). Phys. Reports, 1978, vol.35, No1,p.1-128.
3. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. ЭЧАЯ, I983, т.I4, № I, с. I23-I80.

4. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики. ЭЧАЯ, I985, т.I6, № 3, с. 597-648.
5. Henri D.B., Perez J.F., Wreszinski W.F. Stability theory for solitary wave solutions of scalar field equation. Commun. Math. Phys., 1982, vol. 85, No3, p.351-361.
6. Илиев И.Д., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида кинков для некоторых нелинейных уравнений, подобных уравнению Кортевега-де Фриза. ОИЯИ, Р5-86-47, Дубна, I986.
7. Жидков П.Е. Об устойчивости решений вида кинков для нелинейного уравнения Шредингера. ОИЯИ, Р5-87-77, Дубна, I987.
8. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. Мир, М., I985.
9. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, М., I954.
I0. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, т.2, Спектральная теория. Мир, М., I966.
II. Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Gauge-field non-topological solitons in three space dimensions(II). Nuclear Physics, 1976, vol.B115, p.32-47.

Рукопись поступила в издательский отдел
2I июля I987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,

если они не были заказаны ранее.

Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р.00 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р.55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р.00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р.50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р.30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р.50 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р.50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р.75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р.80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р.75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р.50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. /2 тома/	13 р.50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/	7 р.35 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Жидков П.Е. Р5-87-572

Об устойчивости кинк-решений нелинейного уравнения Клейна - Гордона

Доказана устойчивость в специальном смысле кинк-решений комплексного уравнения Клейна - Гордона и устойчивость формы кинк-решений вещественного уравнения Клейна - Гордона. Развиваются идеи метода Бенжамина, основанного на доказательстве положительности второй вариации закона сохранения системы при некоторых специальных ограничениях на класс допустимых функций.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Zhidkov P.E. P5-87-572

On the Stability of Kink-Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon Equation

The stability in the special sense of the kink-solutions for the complex Klein-Gordon equation and the "form stability" of the kink-solutions for the real Klein-Gordon equation are proved. The ideas of the Bemjamin method are developed which are based on proving the positiveness of the second variation of the conservation law of the system under conditions on a class of admissible functions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987