сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-508

И.Д.Илиев*, К.П.Кирчев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БЕГУЩИХ ВОЛН ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ БЕНЖАМЕНА - БОНА - МАХОНИ

*Институт математики БАН, София

1987

Илиев И.Д., Кирчев К.П. P5-87-508
Об устойчивости бегущих волн для нелинейных уравнений типа уравнения Бенжамена - Бона - Махони

Доказано, что если нелинейность удовлетворяет некоторым условиям, то уравнение $u_t + (a(u))_x - u_{txx} = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, $t \geq 0$, имеет решения вида бегущей волны в классе убывающих функций, и эти решения являются устойчивыми.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Iliev I.D., Kirchev K.P. P5-87-508
On the Stability of the Travellinge-Wave Solutions to the Equations of Benjamin - Bona - Mahony Type

It is proved, that under some sufficient conditions, the equation $u_t + (a(u))_x - u_{txx} = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, $t \geq 0$, has a bell-shaped travelling-wave solution, which is stable.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987

В настоящей работе исследуется вопрос устойчивости решений вида бегущей волны в классе убывающих функций для обобщенного уравнения Бенжамена - Бона - Махони (GBBM)

$$u_t + (a(u))_x - u_{txx} = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0,$$

$$a(0) = 0, \quad u(x,0) = g(x). \qquad /1/$$

В [1] доказано существование единственного глобального решения уравнения Бенжамена - Бона - Махони /BBM/

$$u_t + u_x + uu_x - u_{txx} = 0.$$

Подобно уравнению Кортевега - де Фриза, уравнение /BBM/ моделирует физические процессы, в которых происходит уравновешивание дисперсии и слабой нелинейности. Отметим работы [2,3], где уравнение (GBBM) рассматривается для больших размерностей пространственной переменной $x \in \mathbf{R}^n$ и исследуется вопрос существования глобального решения в зависимости от поведения функции $a(u)$ /вид нелинейности/.

В работе [4], используя спектральный метод, Бенжамен показал устойчивость формы решения вида уединенной волны для уравнения /BBM/.

Основным результатом настоящей работы является доказательство устойчивости формы решения вида бегущей волны для уравнения (GBBM) в случае, когда нелинейность $a(u)$ удовлетворяет некоторым естественным условиям. В частности, в важном случае степенной нелинейности $(a(u))_x = \pm u^p u_x$ получается устойчивость для любого $p > 0$.

1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Умножая /1/ на оператор $(1 - \partial_x^2)^{-1}$ и интегрируя по частям, получим интегральное уравнение

$$u(x,t) = Au = g + Bu = g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta)\, a(u)\, d\zeta\, d\tau, \qquad /2/$$

где
$K(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \cdot \exp(-|x|), \quad u(x,0) = g(x).$

Обозначим через $\mathcal{C}_T = C_b(R \times [0,T])$ пространство непрерывных функций, равномерно ограниченных в области $R \times [0, T]$.

Лемма 1. Пусть $a(u) \in C^1(R)$ и пусть $g(x)$ - непрерывная функция на R и $\sup\limits_{x \in R} |g(x)| \le b < \infty$. Тогда существует $t_0(b) > 0$, такое, что интегральное уравнение /2/ имеет решение $u(x,t)$, $u(x,0) = g(x)$ и $u(x,t) \in \mathcal{C}_{t_0}$.

Доказательство. Пусть $v_i \in \mathcal{C}_{t_0}$, $\|v_i\|_{\mathcal{C}_{t_0}} \le R$, $i = 1, 2$, /t_0 определим дополнительно/. Тогда

$$|Av_1 - Av_2| = |Bv_1 - Bv_2| \le \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{C}_t}, \quad \alpha(R)\,t, \qquad /3/$$

где $\alpha(R) = \sup\limits_{|x| \le R} |a'(x)|$. Взяв sup в /3/, получим

$$\|Av_1 - Av_2\|_{\mathcal{C}_{t_0}} \le t_0 \alpha(R) \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{C}_{t_0}}, \quad t_0 \alpha(R) \le \theta < 1. \qquad /4/$$

В частности, $\|Bv\|_{\mathcal{C}} \le \theta \|v\|_{\mathcal{C}}$ и отсюда

$$\|Av\|_{\mathcal{C}} \le b + \theta \|v\|_{\mathcal{C}} \le b + \theta R \le R, \quad b \le (1-\theta)R. \qquad /5/$$

Теперь мы можем положить $\theta = 1/2$ и $R = 2b$, что дает

$$t_0 \le \frac{1}{2\alpha(2b)}. \qquad /6/$$

Тогда услрвия /4/ и /5/ обеспечивают неподвижную точку $u(x,t) \in \mathcal{C}_{t_0}$ оператора A. Лемма доказана.

Очевидно, решение $u(x,t)$ интегрального уравнения /2/ непрерывно дифференцируемо по t, и для $T \le t_0$

$$u_t = (Au)_t = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta)\, a(u)\, d\zeta \in \mathcal{C}_T.$$

Отсюда видно, что u_t непрерывно дифференцируема по x и

$$u_{tx} = a(u) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\zeta|} a(u)\, d\zeta \in \mathcal{C}_T. \qquad /7/$$

Теперь, если допустим, что $g(x)$ - ограниченная функция класса $C^1(R)$, то из /2/ вытекает, что $u(x,t)$ - непрерывно дифференцируема по x. Следовательно, мы можем продифференцировать /7/ по x. Получим

$$u_{txx} = (a(u))_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta)\, a(u)\, d\zeta = (a(u))_x + u_t.$$

Таким образом, мы получим следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $a(u) \in C^1(R)$, $g(x) \in C^1(R)$, $\sup\limits_{x \in R} |g(x)| < \infty$ и пусть $u(x,t) \in \mathcal{C}_T$ - решение интегрального уравнения /2/, существующее в силу леммы 1. Тогда $u(x,t)$ является решением уравнения /1/, $x \in R$, $t \in [0,T]$ и $u_x, u_t, u_{tx}, u_{txx} \in \mathcal{C}_T$.

Следствие. Если $\lim g(x) = 0$ при $x \to \pm\infty$, то $\lim u = \lim u_t = \lim u_{tx} = 0$ при $x \to \pm\infty$.

Утверждения следствия вытекают из того факта, что если функция $v(\zeta)$ - непрерывная и $\lim v(\zeta) = 0$ при $\zeta \to \pm\infty$, то такое же свойство имеют и функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\zeta|} v(\zeta)\, d\zeta, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta.$$

Кроме того, нужно учесть, что $u(x,t)$ является пределом последовательности Пикара $u_n = Au_{n-1}$, $u_0 = g$.

Пусть теперь $g(x) \in C^1(R) \cap H^1(R)$ /здесь и в дальнейшем $H^s(R)$, $s \ge 1$ - пространство Соболева со стандартной нормой $\|\cdot\|_s$/. Помножим /1/ на $u(x,t)$ и проинтегрируем по x и t в области $[-N, N] \times [0, t]$. Получим

$$\int_{-N}^{N} (u^2 + u_s^2)\, dx - \int_{-N}^{N} (g^2 + g'^2)\, dx = \qquad /8/$$

$$= \int_0^t \left[-2ua(u) - P(u) + 2uu_{tx} \right]\Big|_{-N}^{N} d\tau,$$

где

$$P(\phi) = -2 \int_0^{\phi} a(s)\, ds.$$

Устремляя в /8/ N к бесконечности, в силу того, что $g(x) \in C^1(R) \cap H^1(R)$ и утверждения леммы 2, получим

$$Q(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + u_x^2)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (g^2 + g'^2)\, dx \quad \text{при} \quad t \in [0, t\ ].$$

Отсюда, применяя неравенство Соболева

$$\sup_{x \in R} |u(x, t_0)| \le \|u(x, t_0)\| = Q^{1/2}(u) = Q^{1/2}(g)$$

и возвращаясь к оценке /6/, можно утверждать, что, повторяя рассуждения, приведенные в лемме 1, получим глобальное по времени решение $u(x,t)$ уравнения /1/. Мы получили следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $a(u)\in C^1(R)$, $g(x)\in C^1\cap H^1$. Тогда уравнение /1/ имеет единственное глобальное решение /в классическом смысле/ $u(x,t)$, $x\in R$, $t\ge 0$, u_x, u_t, u_{tx}, $u_{txx}\in \mathcal{C}_\infty$.

Доказательство. Единственность решения вытекает из следующих стандартных рассуждений. Допустим противное и положим $w=u_1-u_2$, где $u_1(x,0)=u_2(x,0)=g(x)$. Для w имеем уравнение

$$w_t+[(a(u_1))_x-(a(u_2))_x]-w_{txx}=0,\quad w(x,0)=0. \qquad /9/$$

Умножим /9/ на w и проинтегрируем по x в интервале $[-N,N]$:

$$\int_{-N}^{N}(ww_t+w_xw_{tx})\,dx-\int_{-N}^{N}(a(u_1)-a(u_2))w_x\,dx+$$

$$+[(a(u_1)-a(u_2))w-ww_{tx}]\Big|_{-N}^{N}=0.$$

Устремляя $N\to\infty$ и опять пользуясь леммой 2 и тем, что $w_{tx}=w_{xt}$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}(ww_t+w_xw_{xt})\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}(a(u_1))-a(u_2))\,w_x\,dx=0.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a(u_1)-a(u_2))\,w_x\,dx\le C(t)\int_{-\infty}^{\infty}|w|\,|w_x|\,dx\le C(t)\,Q(w).$$

Здесь $C(t)=\sup\limits_{a\in[-A,A]}|a'(s)|$, где $A=A(t)=\max(\sup\limits_{x\in R}|u_1|,\ \sup\limits_{x\in R}|u_2|)$.

Тогда

$$\frac{dQ}{dt}=2\int_{-\infty}^{\infty}(ww_t+w_xw_{xt})\,dx\le 2C(t)\,Q,$$

$$Q(w)\le[Q(w)]_{t=0}\cdot\exp\Big(\int_0^t C(\tau)\,d\tau\Big).$$

Отсюда мы получаем, что $Q(w)=0$, так как $[Q(w)]_{t=0}=0$. Следовательно, $w=0$.

Возвращаясь к интегральному уравнению /2/, несложно получить следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $a(u)\in C^s(R)$, $g(x)\in H^s(R)$, где $s\ge 1$. Тогда существует единственное глобальное решение $u(x,t)$ уравнения /1/. При этом $u(x,t)\in C([0,\infty);H^s(R))$, $u\,(x,t)\in C([0,\infty);H^{s+1}(R))$ и $Q(u)=\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+u^2)\,dx$ не зависит от $t\in[0,\infty)$.

Отметим, что при $s>1$ $u(x,t)$ является классическим решением уравнения /1/, а при $s=1$ $u(x,t)$ является L_2 - решением /1/ /т.е. для любого $t\ge 0$ /1/ удовлетворяется почти всюду по x/.

Положим $v(x,t)=\int_{-\infty}^{x}u_t(y,t)\,dy$. Тогда /1/ запишется в виде

$$v_x-v_{xxx}+(a(u))_x=0. \qquad /10/$$

Умножая /10/ на v и интегрируя по x, получим

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}(a(u))_x\,v\,dx=-\int_{-\infty}^{\infty}a(u)\,v_x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}P'(u)\,u_t\,dx, \qquad /11/$$

где $P(\phi)=-2\int_0^{\phi}a(z)\,dz$.

Введем нелинейный функционал

$$E(u)=Q(u)+\int_{-\infty}^{\infty}P(u)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+u^2+P(u))\,dx,$$

который не зависит от t /в силу /11//. $E(u)$ будет играть существенную роль в доказательстве устойчивости.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ВИДА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ /1/

Зафиксируем константу c, такую, что $\frac{a'(0)}{c}<1$, и будем искать решения /1/ в виде бегущей волны:

$$u(x,t)=\Phi(x-ct),\quad \Phi(y)\in C^3(R),$$

$$\Phi(y)=\Phi'(y)=\Phi''(y)=0 \quad \text{при} \quad y=\pm\infty. \qquad /12/$$

Подставляя /12/ в /1/ и два раза интегрируя, получаем уравнение $\Phi'^2=U(\Phi,c)$, где $U(s,c)=s^2-\frac{2}{c}\int_0^s a(z)\,dz$. Допустим, что функция U удовлетворяет условию:

/H1/ Существует константа $A=A(c)>0$, такая, что $U(A,c)=0$, $\frac{\partial U}{\partial s}(A,c)\ne 0$, $U(s,c)>0$ для $0<s<A$.

Если /H1/ выполняется, то искомое решение $\Phi=\Phi(y,c)$ определяется при помощи формулы $\int_{\Phi}^{A}\frac{ds}{\sqrt{U(s,c)}}=|y|$. Как в [5], можно показать, что $\Phi(y,c)$ является четной функцией от y, $\Phi(0,c) = A$, $0 < \Phi(y,c) < A$ $y \neq 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y,c) = 0 \iff y = 0$. Далее, $\Phi(y,c)$ дифференцируема по параметру c и производные

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial y^j \partial c^k}\Phi(y,c), \quad j+k \le 2, \quad k \le 1, \qquad \text{экспоненциально убывают}$$

при $|y| \to \infty$.

Цель настоящего параграфа - доказательство устойчивости решения $\Phi(x-ct)$ уравнения /1/ относительно псевдометрики

$$d(u,\Phi) = \inf_{\zeta \in R} \| u(x,t) - \Phi(x-\zeta-ct) \|_1. \qquad /13/$$

Второе основное предположение:

/H2/ $\frac{1}{c}\frac{d}{dc}Q(\Phi) > 0$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 3. Пусть выполняются условия /H1/ и /H2/ и пусть $u(x,t) \in C([0,\infty); H^1(R))$ - решение уравнения /1/ с начальными данными $u(x,0) = g(x) \in H^1(R)$, существующее в силу теоремы 2. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $d(g,\Phi) < \delta$, то $d(u,\Phi) < \epsilon$ для всех $t \in [0,\infty)$.

Доказательство теоремы 3 основывается на следующем утверждении.

Предложение 1. Существуют положительные постоянные δ_0, m, не зависящие от t, такие, что если $d(u,\Phi) < \delta_0$ и

$$Q(g) = Q(\Phi), \qquad /14/$$

то

$$\frac{1}{c}\Delta E \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{c}(E(u) - E(\Phi)) \ge m d^2(u,\Phi). \qquad /15/$$

При помощи предложения 1 теорема 3 доказывается так же, как в [5].

Теперь докажем предложение 1.

Зафиксируем $t \ge 0$. Можно показать [6,7], что inf в /13/ достигается в конечной точке $\zeta = \zeta(t)$. Положим $h(x,t) = u(x,t) - \Phi(x-\zeta-ct)$, так что $d(u,\Phi) = \|h\|_1$. Перепишем равенство /14/ в виде

$$2(\Phi - \Phi'', h) + \|h\|_1^2 = 0. \qquad /16/$$

При помощи тождества

$$-c\Phi - \frac{1}{2}P'(\Phi) + c\Phi'' = 0 \qquad /17/$$

выводим равенство

$$\frac{1}{c}\int P'(\Phi)\,h\,dx = \|h\|_1^2. \qquad /18/$$

Теперь, используя /18/, получаем

$$\frac{1}{c}\Delta E = \frac{1}{c}\int (P(u) - P(\Phi))dx =$$

$$= \frac{1}{c}\int \left(P'(\Phi)h + \frac{P''(\Phi+\theta h)}{2}h^2\right)dx = (Lh,h) + I,$$

где

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{a'(\Phi)}{c} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{U''(\Phi)}{2},$$

$$I = \int \frac{1}{c}(a'(\Phi) - a'(\Phi+\theta h))h^2 dx, \quad 0 \le \theta \le 1. \qquad /19/$$

Зафиксируем y и продифференцируем по c тождество /17/, а потом положим $y = x - \zeta - ct$. Получим

$$\Phi'' - \Phi = cL\Phi_c \quad \left(\Phi_c = \frac{\partial \Phi}{\partial c}\right). \qquad /20/$$

Следовательно, $(L\Phi_c, \Phi_c) = \frac{1}{c}(\Phi''-\Phi, \Phi_c) = -\frac{1}{2c}\frac{d}{dc}Q(\Phi)$. Учитывая условие /H2/, отсюда выводим, что

$$(L\Phi_c, \Phi_c) < 0. \qquad /21/$$

С другой стороны, из /16/ и /20/ вытекает

$$(L\Phi_c, h) = \frac{1}{2c}\|h\|_1^2. \qquad /22/$$

В дальнейшем при получении оценки для $\frac{1}{c}\Delta E$ мы будем существенно использовать спектральные свойства оператора /19/ и соотношения /21/ и /22/. Из-за инвариантности L относительно сдвига аргумента $x \to x + r$ спектр L не зависит от t. Так как потенциал $\frac{1}{2}U''(\Phi)$ стремится к пределу $\sigma = \frac{1}{2}U''(0) = 1 - \frac{a'(0)}{c} > 0$ при $|x| \to \infty$, то оператор L имеет непрерывный спектр $\sigma_{ess} = [\sigma^2, \infty)$. Обозначим через $\ell > 0$ самое малое положительное собственное число оператора L /если L не имеет положительных собственных чисел, положим $\ell = \sigma^2$/. Из равенства $L\Phi' = 0$ и свойства Φ вытекает, что неположительная часть спектра L содержит две точки $\lambda_- < 0$ и $\lambda_0 = 0$. Обозначим через ϕ_- нормированную собственную функцию, соответствующую собственному числу λ_-.

Теперь представим h и Φ_c в виде

$$h = h_- + h_0 + h_+, \quad \Phi_c = f_- + f_0 + f_+,$$

где

$$h_- = (h, \phi_-)\phi_-, \quad h_0 = \frac{(h, \Phi')}{||\Phi'||^2}\Phi',$$

$$f_- = (\Phi_c, \phi_-)\phi_-, \quad f_0 = \frac{(\Phi_c, \Phi')}{||\Phi'||^2}\Phi'.$$

Используя ортогональности, получаем

$$(L\Phi_c, h) = \lambda_-(f_-, h_-) + (Lf_+, h_+),$$

$$(Lh, h) = \lambda_- ||h_-||^2 + (Lh_+, h_+), \qquad /23/$$

$$(L\Phi_c, \Phi_c) = \lambda_- ||f_-||^2 + (Lf_+, f_+).$$

При помощи введенных функций запишем /21/ и /22/ в виде

$$(Lf_+, f_+) < -\lambda_- ||f_-||^2, \qquad /24/$$

$$(Lf_+, h_+) = \frac{1}{2c}||h||_1^2 - \lambda_-(f_-, h_-). \qquad /25/$$

Спектральное разложение оператора L дает

$$(Lh_+, h_+) \geq \ell ||h_+||^2. \qquad /26/$$

На основе соотношений /23/-/26/, следуя рассуждениям в [5], придем к неравенству

$$(Lh, h) \geq m_2||h||^2 - m_3||h||_1^3 + m_4||h||_1^4, \qquad /27/$$

где постоянные $m_j > 0$, $j = 2,3,4$, не зависят от t. Из-за непрерывности $a'(z)$ в сегменте $[-\delta_0, A+\delta_0]$ при $|h| \leq ||h||_1 \leq \delta_0$ имеем

$$|I| \leq \frac{m_2}{2}||h||^2. \qquad /28/$$

Из /27/, /28/ и непосредственной оценки

$$\frac{1}{c}\Delta E \geq ||h||_1^2 - m_1||h||^2, \quad m_1 = \max_{z\in[-\delta_0, A+\delta_0]} \left|\frac{1}{c}a'(z)\right|$$

следует, что при $d(u, \Phi) = ||h||_1 < \delta_0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{c}\Delta E \geq m||h||_1^2 = md^2(u, \Phi).$$

Здесь константы δ_0, m не зависят от t. Предложение 1, а вместе с ним теорема 3 доказаны.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u_t \pm u^p u_x - u_{txx} = 0. \qquad /1\pm/$$

Условие /H1/ выполняется при $c > 0$ для /1+/ и при $c < 0$ для /1-/. Решение $u(x,t) = \Phi(x-ct)$ имеет вид

$$\Phi(y) = \left(\frac{|c|(p+1)(p+2)}{2}\operatorname{sech}^2\frac{py}{2}\right)^{1/p}.$$

Тогда $Q(\Phi) = c^{2/p}M$, где $M > 0$, не зависит от c. Отсюда $\frac{1}{c}\frac{dQ(\Phi)}{dc} > 0$ и, следовательно, Φ является устойчивым для любого $p > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T.B.,Bona J.L.,Mahony J.J. - Phil.Trans.Roy.Soc. Lond. A, 1972, v.272, p.47.
2. Goldstein J.A., Wichnoski B. _ Nonlinear Analysis, 1980, 4, p.665.
3. Arvin J. - Nonlinear Analysis, 1987, v.11, No.1, p.139.
4. Benjamin T.B. - Proc.R.Soc.Lond., 1972, A328, p.153.
5. Илиев И.Д., Кирчев К.П. ОИЯИ, Р5-86-801, Дубна, 1986.
6. Bona J.L. - Proc.R.Soc.Lond., 1975, A344, p.363.
7. Жидков Е.П., Кирчев К.П. - ЭЧАЯ, 1985, т.16, вып.3, с.597.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июля 1987 года.