объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-462

В.М.Лебеденко

# СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ
# С ОДНИМ ОБРАЗУЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Направлено в "Украинский
математический журнал"

1987

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе нами рассматриваются супералгебры Ли, порождаемые одним элементом, которые ниже называются **циклическими алгебрами.** Будем считать, что характеристика основного поля не равна 2 и 3. При исследовании некоторых супералгебр оказалось, что, в отличие от случая алгебр Ли, существуют нетривиальные циклические алгебры. Циклической, например, является подалгебра $s\ell(2,1)$ с базисом $a$, $a_1$, $b$, $b_1$, где

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Его элементы удовлетворяют соотношениям

$$[b, b] = a_1, \quad [a_1, b] = 0, \quad [a, b] = b_1,$$
$$[a_1, a] = 2a, \quad [a, b_1] = 0, \quad [b_1, b_1] = 0,$$
$$[b, b_1] = -a^*.$$

Отсюда видно, что это четырехмерная супералгебра Ли, порожденная элементами $a$ и $b$**. В то же время и элемент $g = a + b$ порождает ее:

$$a_1 = [g, g] = [b, b], \quad a = \frac{1}{2}[a_1, a] = \frac{1}{2}[[g,g], g],$$
$$b = g - \frac{1}{2}[[g,g], g].$$

В качестве еще одного примера циклической алгебры приведем пятимерную биспинорную супералгебру $s\ell(2)$.

---

* *Здесь и ниже скобками [ , ] будем обозначать произведение в супералгебрах Ли.*

** *Отметим, что это пример разрешимой супералгебры Ли с ненильпотентным коммутантом.*

Эта простая алгебра обладает базисом $e$, $f$, $h$, $x$, $y$, элементы которого удовлетворяют соотношениям

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f,$$

$$[h, x] = x, \quad [x, x] = e, \quad [h, y] = y,$$

$$[y, y] = f, \quad [f, x] = y, \quad [x, y] = \frac{1}{2}h,$$

$$[e, y] = 0, \quad [e, x] = 0$$

(остальные произведения — нули).

Легко заметить, что элементы $f$ и $x$ порождают ее. Элемент $g = f + x$ тоже порождает эту алгебру:

$$[g, g] = [x, x] = e,$$

$$[g, [g, g]] = [f + x, e] = -h, \quad [g, h] = 2f - x,$$

$$\frac{1}{3}(g - [g, [g, [g, g]]]) = f.$$

Далее, в разделе 2, мы приведем еще ряд примеров такого рода, из которых, в частности, видно, что существуют циклические алгебры произвольно большой размерности. Там же приводится пример бесконечномерной циклической алгебры. Еще один пример бесконечномерной циклической алгебры дается в приложениях (см. п. 8.3). Он относится к теории струны. В следующих разделах приводятся результаты нашего исследования некоторых классов циклических алгебр, которое является лишь первым шагом в рассматриваемом направлении. Перечислим основные из этих результатов (обоснование приводится ниже).

Описаны все циклические супералгебры, размерность которых не превосходит четырех (см. п. 4). Оказалось, что трехмерных циклических супералгебр не существует. Двумерные циклические супералгебры исчерпываются алгебрами с соотношениями

$$[b, b] = a, \quad [a, b] = 0. \tag{2}$$

Четырехмерные циклические алгебры исчерпываются супералгебрами с такими соотношениями:

$$G = \{a_1, a_2, b, b_1\},$$

где

$$[b, b] = a_1, \quad [a_2, b] = b_1, \quad [a_1, b] = 0,$$



$$[a_1, a_2] = \alpha a_2, \quad [b, b_1] = -2^{-1}\alpha a_2, \tag{3}$$

$$[a_1, b_1] = \alpha b_1, \quad [b_1, b_1] = 0,$$

$$[a_2, b_1] = 0$$

(тут коэффициент $\alpha \neq 0$).

Каждая такая алгебра порождается элементом $a_2 + b$. Две циклические алгебры типа (3) изоморфны тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha'}{\alpha}$ — полный квадрат в основном поле. Алгебра вида (1) относится к супералгебрам указанного рода ($\alpha = 2$). В разделе 5 показано, что неабелевы нильпотентные циклические и разрешимые ступени 2 циклические алгебры исчерпываются алгебрами типа (2) (Предложения 1 и 2). Далее в разделе 6 доказывается

**Теорема 1**

Разрешимая ступени 3 супералгебра Ли является циклической тогда и только тогда, когда она имеет вид (3) или

$$G = \{a_1, b, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n\}, \quad (n \geq 2),$$

где

$$[b, b] = a_1, \quad [a_1, b] = 0,$$

$$[\alpha_i, b] = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$[a_1, \alpha_i] = \alpha_{i+1} \quad (i \leq n - 1), \tag{4}$$

$$[a_1, \alpha_n] = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \alpha_i \quad (\ell_1 \neq 0),$$

$$[a_1, \beta_i] = \beta_{i+1} (i \leq n - 1), \quad [b, \beta_i] = -2^{-1}\alpha_{i+1} \ (i \leq n - 1),$$

$$[a_1, \beta_n] = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \beta_i, \quad [b, \beta_n] = -2^{-1}\sum_{i=1}^{n} \ell_i \alpha_i,$$

$$[\alpha_i, \alpha_j] = [\beta_i, \beta_j] = [\alpha_i, \beta_j] = 0 \quad (i, j \leq n).$$

Здесь в качестве образующего элемента можно взять элемент $\alpha_1 + b$. Там же дано условие изоморфности двух алгебр этого вида. Показано, что бесконечномерных разрешимых ступени 3 циклических алгебр не существует. Приводится пример циклической разрешимой алгебры ступени 4.

Для случая простых алгебр в разделе 7.2 доказывается

**Теорема 2**

Над любым бесконечным полем характеристики, отличной от 2 и 3, всякая простая супералгебра типа $A(m,n)$ является циклической.

Из этой теоремы вытекает

**Предложение 3.** Над любым бесконечным полем характеристики, отличной от 2 и 3, все линейные супералгебры типа $\ell(m,n)$ $(\neq \ell(1,1))$ являются циклическими (см. п. 7.3).

На основе этого доказывается

**Теорема 3**

Всякая конечномерная супералгебра Ли над любым бесконечным полем характеристики, отличной от 2 и 3, изоморфно вкладывается в циклическую супералгебру (см. п. 7.4).

Это утверждение в некоторой степени характеризует широту класса циклических алгебр.

В приложениях нами приводится ряд утверждений о цикличности прямых сумм супералгебр Ли. В частности, доказано, что прямая сумма двух циклических супералгебр, разрешимой и простой, является циклической (см. п. 8.1, предложение 5).

**Обозначения.** Ниже будем применять, в основном, обозначения, принятые в работе /6/. $\{M\}$ будет означать линейную оболочку множества $M$, $\langle M\rangle$ — подалгебру, порожденную множеством $M$. В частности, $\langle g\rangle$ — циклическая алгебра с образующим элементом $g$.

## 2. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ АЛГЕБР

### 2.1. Алгебра $s\ell(2.1)$

Эта простая супералгебра имеет базис, состоящий из четырех четных элементов:

$$a=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad a_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$a_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad a_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

и четырех нечетных элементов:

$$b=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad b_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$b_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad b_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$



Она порождается своими элементами $a$ и $b$, так как

$$a_1=[b,b],\quad [a,a_1]=a_2,\quad [a,a_2]=a_3,$$

$$[a,b]=b_1,\quad [a_2,b]=b_2,\quad [a,b_2]=b_3.$$

Элемент $g=a+b$ порождает $s\ell(2.1)$, поскольку

$$[[g,g],[g,[g,g]]]=-4a,\quad \text{т.е.}\quad a,b\in\langle g\rangle.$$

### 2.2. Серия разрешимых циклических алгебр

Рассмотрим супералгебры виды

$$G=\{a,b,a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n\},\tag{5}$$

где

$$[b,b]=a,\quad [a,b]=0,$$

$$[a_i,a_j]=[b_i,b_j]=[a_i,b_j]=0\quad (i,j\le n,\ \ n\ge 2),$$

$$G_{\bar 0}=\{a,a_1,\ldots,a_n\},\quad G_{\bar 1}=\{b,b_1,\ldots,b_n\},$$

$$[a,a_i]=\lambda_i a_i,\quad [a_i,b]=b_i,$$

$$[b,b_i]=-2^{-1}\lambda_i a_i,$$

$$[a,b_i]=\lambda_i b_i.$$

Здесь $\lambda_i$ $(\lambda_i\neq 0)$ — попарно различные элементы основного поля. Всякая такая супералгебра $G$ порождается элементом $g=a_1+\ldots+a_n+b$. Действительно, так как $[g,g]=[b,b]=a$ и в силу известных свойств определителя Вандермонда элементы

$$g_k=(\mathrm{ad}\,a)^k g=(\mathrm{ad}\,a)^k(a_1+\ldots+a_n)=$$

$$=\lambda_1^k a_1+\ldots+\lambda_n^k a_n\quad (k=1,2,\ldots,n)$$

линейно независимы, то

$$\{g_1,\ldots,g_k\}=G_{\bar 0}\subset\langle g\rangle.$$

Следовательно, $a_1,\ldots,a_n\in\langle g\rangle$ и $b\in\langle g\rangle$. Далее все $b_i=[a_i,b]\in\langle g\rangle$. Этот пример показывает, что существуют циклические алгебры произвольно большой размерности $(2n+2)$.

2.3. Бесконечномерная циклическая алгебра

Рассмотрим счетномерную супералгебру $\mathrm{End}(V)$, где пространства $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$, $V_{\bar 0} = \{x_1, x_2, \dots\}$, $V_{\bar 1} = \{y_1, y_2, \dots\}$, и введем в ней новую операцию $[\,,]$, аналогично тому, как это делается при построении алгебр $\ell(m,n)$.

Определим теперь операторы A и B так:

$$x_i A = x_{i+1}, \quad y_i A = y_{i+1} \ (i = 1,2, \dots),$$

$$x_i B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{i-1}\, y_i, \quad y_i B = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{i-1}\, x_i.$$

Тогда

$$x_i B^2 = \frac{1}{2}(i-1) x_i, \quad y_i B^2 = \frac{1}{2}(i-1) y_i.$$

Положив $A_1 = [B, B] = 2B^2$, получаем, что

$$[A, A_1] = A.$$

Подалгебра (относительно операции $[\,,]$) $\mathrm{End}(V)$, порожденная операторами A и B, равна $\langle g \rangle$, где $g = A + B$, так как $A = [g,[g,g]]$. Она бесконечномерна, поскольку ее элементы $(\mathrm{ad}\,A)^k(B)$ $(k = 1,2,\dots)$ линейно независимы.

## 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

3.1. В силу тождества Якоби и того, что характеристика поля не равна 3, получаем, что для любого нечетного элемента $b$ некоторой супералгебры

$$[b,[b,b]] = [[b,b],b] = 0.$$

3.2. Если элемент $g = a+b$, где $a$ — четный элемент, $b$ — нечетный, то $[g,g] = [b,b]$ и $[g,[g,g]] = [a,[b,b]]$.

3.3. Если $G = G_{\bar 0} + G_{\bar 1}$ — циклическая алгебра и $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = 0$, то $G$ как алгебра Ли, порожденная одним элементом, не более чем одномерна. Поэтому фактор-алгебра произвольной циклической супералгебры $G$ по любому ее идеалу, содержащему $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}]$, не более чем одномерна. Такими, в частности, являются следующие идеалы:

$$G^{(1)} = [G_{\bar 0}, G_{\bar 0}] \oplus [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \oplus [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}],$$

$$J_1 = [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \oplus G_{\bar 1},$$



$$J_2 = [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \oplus [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}],$$

$$J_3 = [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \oplus [[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}], G_{\bar 1}]$$

(легко заметить, что тут $[G_{\bar 0}, G_{\bar 0}] \subseteq [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}]$). Каждый из приведенных идеалов или совпадает с $G$, или равен $J_3$.

3.4. Если супералгебра Ли

$$G = \langle g \rangle$$

и

$$[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \subseteq Z(G_{\bar 0})$$

(центр $G_{\bar 0}$), то алгебра $G$ не более чем двумерна. Действительно, пусть $g = a+b$, где $a \in G_{\bar 0}$, $b \in G_{\bar 1}$. Тогда $[g,g] = [b,b] \in Z(G_{\bar 0})$ и $[g,[g,g]] = [a,[b,b]] = 0$. Далее по индукции получаем, что любые неассоциативные одночлены от элемента $g$, содержащие более двух скобок, равны нулю.

Отметим два частных случая выполнимости этого условия:

1) $G_{\bar 0}$ абелева алгебра,
2) $[G_{\bar 1}, [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}]] = 0$.

3.5. Если алгебра $G = G_{\bar 0} + G_{\bar 1}$ циклическая, то

$$\dim(G_{\bar 0}/[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}]) \leq 1$$

(см. п. 3.3). В частности, если $\dim(G_{\bar 1}) = 1$, то $\dim(G) \leq 2$. Это вытекает из того, что трехмерные супералгебры Ли не являются циклическими (см. п. 4.2).

3.6. Циклические супералгебры, порождаемые одним однородным элементом, или одномерны, или двумерны (тип (2)).

3.7. **Лемма 1.** Если супералгебра Ли

$$G = \langle S \rangle + N^2,$$

где $N$ — нильпотентная подалгебра $G$, то $G = \langle S \rangle$.

Эта лемма является обобщением известного утверждения о нильпотентных алгебрах Ли (см. /3, 5/) и может быть доказана аналогично.

3.8. **Лемма 2.** Если фактор-алгебра $G/\langle c \rangle = \langle \bar g \rangle$ и $G$ — нерасщепляемое расширение (в частности, центральное) $\langle \bar g \rangle$ с помощью одномерной подалгебры $\langle c \rangle$, то для любого элемента $g \in \bar g$ алгебра $G = \langle g \rangle$. Действительно, если бы $\langle g \rangle \neq G$, то расширение было бы расщепляемым.

## 4. ЦИКЛИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

### 4.1. Двумерные циклические алгебры

Легко показать, что двумерная неабелева супералгебра должна быть либо типа (2), либо иметь вид $G = \{a, b\}$, $[b, b] = 0$, $[a, b] = b$. Эта алгебра не является циклической, так как $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = 0$ (см. п.3.3). Итак, все циклические алгебры размерности 2 исчерпываются алгебрами типа (2).

### 4.2. О трехмерных супералгебрах Ли

Покажем, что не существует трехмерных циклических алгебр. Предположим, что $\dim G = 3$ и $G = \langle g \rangle$, $g = a + b$, $a \in G_{\bar 0}$, $b \in G_{\bar 1}$. Тогда $G_{\bar 0}$ — неабелева двумерная алгебра Ли /см. п. 3.4), а $\dim G_{\bar 1} = 1$, $0 \neq [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = \{[b, b]\} = G_{\bar 0}^{(1)}$ — одномерный идеал в $G$ и $G/G_{\bar 0}^{(1)}$ — двумерная алгебра Ли с одним образующим элементом. Это приводит нас к противоречию.

### 4.3. Описание четырехмерных циклических алгебр

Пусть $G$ — четырехмерная циклическая алгебра. Тогда (см. п. 3.4 и 3.5) $G_{\bar 0}$ — неабелева двумерная алгебра Ли и $\dim G_{\bar 1} = 2$, $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \neq 0$. Существует такой элемент $b \in G_{\bar 1}$, что $0 \neq [b, b] \in G_{\bar 0}^{(1)}$. Иначе $G_{\bar 0}^{(1)}$ — одномерный идеал и $G/G_{\bar 0}^{(1)}$ — трехмерная циклическая алгебра, чего не может быть (см. п. 4.2). Пусть теперь $[b, b] = a_1$, $G_{\bar 0}^{(1)} = \{a_2\}$, $[a_1, a_2] = \alpha a_2$ (коэффициент $\alpha \neq 0$). Если $[a_2, b] = b_1$, то $b_1$ не кратен $b$. Иначе элементы $a_1$ и $a_2$ будут пропорциональными. Итак,

$$G = \{a_1, a_2, b, b_1\}, \quad a_1 = [b, b], \quad [a_1, a_2] = \alpha a_2, \quad [a_2, b] = b_1.$$

В силу тождества Якоби получаем, что

$$[a_1, b] = 0, \quad [b, b_1] = -2^{-1} \alpha a_2, \quad [a_1, b_1] = \alpha b_1.$$

Теперь легко заметить, что $G$ — разрешимая супералгебра Ли, а следовательно, — разрешимая ступени 3 (по тем же соображениям, что и в п. 4.2). Окончательно получаем, что элементы выбранного базиса удовлетворяют соотношениям (3).

Пусть теперь даны супералгебры типа (3) $G = \{a_1, a_2, b, b_1\}$ и $G' = \{a'_1, a'_2, b', b'_1\}$ с константами, соответственно, $\alpha$ и $\alpha'$. Они изоморфны тогда и только тогда, когда элемент $\frac{\alpha'}{\alpha}$ является полным квадратом в основном поле. Действительно, если есть соответствующий изоморфизм $G'$ на $G$, то при нем элемент $b'$ переходит в элемент $kb$, $a'_2$ — в $\ell a_2$ и $[[kb, kb], \ell a_2] = \alpha'(\ell a_2) = k^2 \alpha(\ell a_2)$. Дальнейшее очевидно.



## 5. О ЦИКЛИЧЕСКИХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ И РАЗРЕШИМЫХ СТУПЕНИ 2 АЛГЕБРАХ

### 5.1. Предложение 1

Нильпотентные циклические алгебры или одномерны, или типа (2). Действительно, пусть $G = \langle g \rangle$ — такая алгебра ($g = a + b$, $a \in G_{\bar 0}$, $b \in G_{\bar 1}$). Тогда абелева алгебра $G/G^2 = G/G^{(1)} = \langle \bar g \rangle$ порождается или элементом $\bar a$, или элементом $\bar b$ ($\bar a, \bar b, \bar g$ — образы соответствующих элементов в $G/G^2$). Поэтому в силу леммы 1 $G = \{a\}$ или $G = \{b\}$, то есть $G$ или абелева алгебра, или алгебра типа (2).

### 5.2. Предложение 2

Циклические разрешимые алгебры ступени 2 исчерпываются алгебрами типа (2). Действительно, пусть $G$ — циклическая разрешимая супералгебра ступени 2. Тогда (см. п. 3.3)

$$\dim G/G^{(1)} = 1, \quad [G_{\bar 0}, G_{\bar 0}] \subseteq [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}],$$

$$0 \neq G^{(1)} = [G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] \oplus [G_{\bar 0}, G_{\bar 1}] \text{ —}$$

абелева алгебра. В силу этого либо $G_{\bar 0} \subseteq G^{(1)}$, либо $G_{\bar 1} \subseteq G^{(1)}$. Если $G_{\bar 0} \subseteq G^{(1)}$, то $G_{\bar 0}$ абелева, и поэтому $G$ двумерна (см. п. 3.4). Если же $G_{\bar 1} \subseteq G^{(1)}$, то $[G_{\bar 1}, G_{\bar 1}] = 0$, и получаем, что $G$ одномерна. Итак, $G$ — алгебра типа (2).

### 5.3. Следствие 1

Неодномерные циклические алгебры с нильпотентным коммутантом двумерны. Действительно, пусть циклическая алгебра $G = \langle g \rangle$, $g = a + b$ ($a \in G_{\bar 0}$, $b \in G_{\bar 1}$), $G^{(1)}$ нильпотентна и $\dim G \neq 1$. Тогда

$$G^{(2)} = (G^{(1)})^2$$

и $G/G^{(2)}$ — циклическая разрешимая ступени 2 алгебра. Поэтому $G/G^{(2)}$ — алгебра типа (2), то есть

$$G/G^{(2)} = \{\bar b\}, \quad G = \{\langle b \rangle, G^{(2)}\} \quad (\bar b = b + G^{(2)}),$$

и в силу леммы 1 $G = \{b\}$ — алгебра типа (2).

### 5.4. Следствие 2

Всякая неодномерная разрешимая циклическая алгебра является расщепляемым расширением двумерной алгебры типа (2) с помощью второго коммутанта $G^{(2)}$ ($G^{(2)} = G^3 = \ldots = G^{\omega} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G^k$).

## 6. ОПИСАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАЗРЕШИМЫХ СТУПЕНИ 3 АЛГЕБР

**Доказательство теоремы 1**

Все алгебры типа (4) разрешимы ступени 3 и являются циклическими. В каждой такой алгебре элемент $g = \alpha_1 + b$ является образующим (об алгебрах типа (3) см. п. 4.3):

$$[g, g] = [b, b] = a_1, \quad (\mathrm{ad}\, a_1)^k g = \alpha_k \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$\frac{1}{\ell_1}\Big([a_1, \alpha_n] - \sum_{i=1}^{n} \ell_i \alpha_i\Big) = \alpha_1, \quad g - \alpha_1 = b,$$

$$[\alpha_i, b] = \beta_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Покажем, что любая конечномерная циклическая разрешимая ступени 3 алгебра должна иметь вид (3) или (4). Пусть супералгебра $G = \langle g \rangle$, $g = a + b$, $a \in G_{\bar 0}$, $b \in G_{\bar 1}$, $G^{(2)} \neq 0$, $G^{(3)} = 0$. Тогда (см. п. 5.2) $G/G^{(2)}$ — алгебра типа (2), и можно считать, что $a \in G^{(2)}$. Пусть $[b, b] = a_1$ ($a_1 \neq 0$, $[b, b] = [g, g]$). Так как $[[g,g],g] = [a_1, a]$, то легко заметить, что $[a_1, a] \neq 0$. Пусть $\alpha_k = (\mathrm{ad}\, a_1)^k a$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — максимальная, линейно независимая в $G^{(2)}$ система элементов такого рода. Если $n = 1$, то мы получаем четырехмерную алгебру типа (3) (см. п. 4.3). Пусть $n > 1$. Тогда $[a_1, \alpha_n] = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \alpha_i$, где $\ell_i$ — какие-то коэффициенты (ограничения на них приводятся ниже). Далее, пусть

$$\beta_i = [\alpha_i, b] \quad (i = 1, \dots, n).$$

Тогда

$$[a_1, \beta_i] = \beta_{i+1} \ (i = 1, \dots, n-1), \quad [a_1, \beta_n] = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \beta_i.$$

Так как $\alpha_i, \beta_i$ — элементы $G^{(2)}$, то (при $i, j \le n$) $[\alpha_i, \beta_j] = [\alpha_i, \alpha_j] = [\beta_i, \beta_j] = 0$. Из тождества Якоби получаем, что

$$[b, b_i] = -2^{-1} \alpha_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad [b, \beta_n] = -2^{-1} \sum_{i=1}^{n} \ell_i \alpha_i.$$

Отсюда видно, что множество $H = \{b, a_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ — подалгебра G. Аналогично, легко заметить, что $\{a, [a, b], H\}$ как подалгебра G, содержащая ее образующие элементы a и b, совпадает с G. Алгебра G содержит идеал

$$H_1 = \{[a, b], H\},$$



фактор-алгебра по которому $G/H_1 = \{\bar a\}$ ($\bar m, k, b \in H$) абелева, $H_1 \supset G^{(1)} \supset G^{(2)}$, и, следовательно, $a \in (H_1)_{\bar 0} = \{a_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. То есть $a \in H$, $G = H$ и $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Поэтому в разложении $[a_1, \alpha_n] = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \alpha_i$ коэффициент $\ell_1 \neq 0$. Иначе бы $\alpha_1 \in \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, так как $\alpha_1 = [a_1, a]$, $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, что противоречит линейной независимости элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Итак, мы получили в нашем случае, что G — алгебра типа (4).

**Замечание 1.** Для алгебр типа (4) линейное пространство $G_0^{(2)} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ является циклическим относительно действия оператора $\mathrm{ad}\, a_1$ (см. /4/). Минимальный многочлен этого оператора имеет вид

$$\lambda^n - \ell_n \lambda^{n-1} - \dots - \ell_2 \lambda - \ell_1 \quad (\ell_1 \neq 0).$$

Коэффициенты $\ell_i$ могут быть любыми (для произвольной алгебры типа (4)) элементами основного поля, при условии, что $\ell_1 \neq 0$. Отсюда видно, что алгебры типа (5) составляют лишь узкий подкласс алгебр вида (4) (см. п. 2.2).

**Замечание 2.** Так же, как и в случае алгебр типа (3), можно установить, что алгебры вида (4) с константами $\ell_1, \dots, \ell_n$ и $\ell'_1, \dots, \ell'_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\ell'_i = k^{2(n+1-i)} \ell_i$, k — некоторый элемент основного поля.

**Замечание 3.** Бесконечномерных циклических разрешимых супералгебр ступени 3 не существует. Действительно, поступая так же, как и в конечномерном случае, получаем, что подпространство

$$G^{(2)} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots; [a, b]\} \quad (\alpha_k = (\mathrm{ad}\, a_1)^k a, \quad \beta_k = [\alpha_k, b]).$$

Но тогда $a \notin G^{(2)}$, так как иначе элементы $\alpha_i$ были бы линейно зависимы.

**Следствие 3.** Разрешимая супералгебра G с нильпотентной подалгеброй $G^{(2)} \neq 0$ является циклической тогда и только тогда, когда фактор-алгебра $G/G^{(3)}$ — типа (4) (см. лемму 1).

**Замечание 4.** На основе полученного результата можно проводить дальнейшие исследования разрешимых циклических алгебр. Приведем пока лишь пример циклической разрешимой алгебры ступени 4:

$$G = \{a_1, a_2, b, b_1, x, y\},$$

где

$$[b, b] = a_1, \quad [a_2, b] = b_1, \quad [b_1, b_1] = x,$$

$$[a_2, b_1] = y, \quad [a_1, b] = 0, \quad [a_1, a_2] = 2a_2,$$

$$[a_1, b_1] = 2b_1, \quad [b, b_1] = -a_2, \quad [x, x] = [x, y] = [y, y] = 0,$$

$$[a_2, x] = [a_2, y] = 0, \quad [b_1, x] = [b_1, y] = 0,$$

$$[b, x] = -2y, \quad [b, y] = -x, \quad [a_1, x] = -4x, \quad [a_1, y] = 4y.$$

Здесь есть образующий элемент $g = a_2 + b$.

## 7. ЦИКЛИЧНОСТЬ АЛГЕБР $A(m,n)$ И $\ell(m,n)$. ВЛОЖИМОСТЬ В ЦИКЛИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

### 7.1. Предварительные сведения

Следуя обозначениям, принятым в работе /6/, через $\ell(m,n)$ будем обозначать общую линейную супералгебру, через $s\ell(m,n)$ — подалгебру всех матриц из $\ell(m,n)$ с нулевым суперследом. Алгебры

$$A(m,n) = s\ell(m+1, n+1) \quad \text{для} \quad m \neq n, \quad m,n \geq 0,$$

$$A(n,n) = s\ell(n+1, n+1)/\{I_{2n+2}\}, \quad n > 0.$$

В работе /6/ указаны все корни супералгебр $A(m,n)$: четные $\epsilon_i - \epsilon_j$ и нечетные $\pm(\epsilon_i - \delta_j)$, $\delta_j = \epsilon_{m+1+j}$. Для дальнейших построений удобно пользоваться обычным матричным базисом $E_{ij}$ и функциональным базисом $\epsilon_k$: $\epsilon_k(E_{\ell\ell}) = \delta_{k\ell}$. При этом четному корню $\epsilon_i - \epsilon_j$ соответствует корневой вектор $\ell_{\epsilon_i - \epsilon_j} = E_{ij}$ и диагональная матрица $h_{\epsilon_i - \epsilon_j} = E_{ii} - E_{jj}$. Условимся, что все рассмотрения для алгебр $A(m,n)$ будем проводить в $s\ell(m+1, n+1)$, так как для алгебр $A(n,n)$ соотношения, полученные в $s\ell(n+1, n+1)$, сохраняются при факторизации по центру. Перефразируем известный результат, полученный в работе /2/.

**Лемма 3.** Если дана расщепляемая полупростая алгебра Ли G и основное поле $K(\mathrm{char}(K) \neq 2,3)$ бесконечно, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — фундаментальная система корней алгебры G, $0 \neq \mu_1$ — такие элементы основного поля, что $[e_{\alpha_i}, \mu_1 h_{\alpha_1} + \dots + \mu_n h_{\alpha_n}] = \beta_i e_{\alpha_i} (h_{\alpha_i} = [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}])$, все коэффициенты $\beta_i$ попарно различны, $\beta_i \neq 0$, то два элемента

$$\mu_1 e_{\alpha_1} + \dots + \mu_n e_{\alpha_n} \quad \text{и} \quad e_{-\alpha_1} + \dots + e_{-\alpha_n}$$

порождают алгебру G.

Далее будем считать, что наши супералгебры определены над такими полями.

Еще одно утверждение.

**Лемма 4.** Пусть супералгебра $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ и $b \in G_{\bar 1}$, $0 \neq [b,b] = a_1 \in G_{\bar 0}$. Тогда фиттингова 1-компонента $G_1 \subset G$ для оператора $A = \mathrm{ad}\, a_1$ порождает идеал G и

$$(G_1)_{\bar 1} = [b, (G_1)_{\bar 0}].$$



**Доказательство.** Первая часть утверждения доказывается так же, как и аналогичное утверждение для алгебр Ли (см. /5/). Докажем его вторую часть. Пусть $G_1 \neq 0$. По определению,

$$G_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A^k G = A^t G = (A^t G_{\bar 0}) \oplus (A^t G_{\bar 1}),$$

$$(A^t G_{\bar 0}) = (G_1)_{\bar 0}, \quad A^t G_{\bar 1} = (G_1)_{\bar 1}).$$

Очевидно, что оператор $\mathrm{ad}\, b$ перестановочен с оператором A и переводит

$$(G_1)_{\bar 0} \quad \text{внутрь} \quad (G_1)_{\bar 1},$$

и наоборот. Покажем, что ядро этого отображения равно нулю. Пусть $x$ — однородный элемент $G_1$ и $x = A^t y$, $0 = [b, x] = [b, A^t y] = A^t [b, y]$, тогда

$$0 = [b, [b, x]] = [b, A^t [b, y]] = A^t [b, [b, y]] = 2^{-1} A^t (Ay) = 2^{-1} Ax.$$

А это противоречит определению $G_1$, то есть оператор $\mathrm{ad}\, b$ определяет автоморфизм линейного пространства $G_1$. Отсюда получаем, что

$$(G_1)_{\bar 1} = [b, (G_1)_{\bar 0}],$$

что и требовалось доказать. Легко заметить, что алгебры типа $A(m,n)$ просты над любым из полей характеристики, отличной от 2 и 3 (будем еще считать, что основное поле бесконечно).

### 7.2. Доказательство теоремы 2

Так как $A(m,n) \cong A(n,m)$ (см. /6/), то достаточно провести построения для $A(m,n)$ с $m > n > 0$. Результат для всех остальных случаев получается путем естественной модификации приведенных построений. Рассмотрим еще одно утверждение.

**Лемма 5.** Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+n}$ — система корней четной части супералгебры $A(m,n)$,

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_m = \epsilon_m - \epsilon_{m+1},$$

$$\alpha_{m+1} = \epsilon_{m+2} - \epsilon_{m+3}, \dots, \alpha_{m+n} = \epsilon_{m+n+1} - \epsilon_{m+n+2}, \quad (m > n),$$

$$h_{\alpha_i} = [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}].$$

Здесь

$$h_{\alpha_i} = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, m \quad \text{и}$$

$E_{i+1,\, i+1} - E_{i+2,\, i+2}$ при $i = m+1, \dots, m+n$.

Тогда существуют такие коэффициенты $k_i \neq 0\ (2 \leq i \leq m)$ и $k'\ (j \geq m+2)$ из основного поля, что при

$$h = h_{\alpha_1} + k_2 h_{\alpha_2} + \dots + k_m h_{\alpha_m} + h_{\alpha_{m+1}} + k'_2 h_{\alpha_{m+2}} + \dots +$$

$$+ k'_{m+n} h_{\alpha_{m+n}}, \quad [e_{\alpha_i}, h] = \beta_i e_{\alpha_i} \ (i = 1, \dots, m+n)$$

все коэффициенты $\beta_i$ отличны от нуля и попарно различны. В справедливости утверждения легко убедиться в силу простоты структуры получающихся здесь уравнений.

Теперь перейдем к непосредственному доказательству теоремы.

Если взять корни $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n}$, такие, как в лемме 5, то это фундаментальная система корней четной части $A(m,n)$. Пусть

$$h = \mu_1 h\alpha_1 + \dots + \mu_{m+n} h_{m+n},$$

где в силу леммы 5 коэффициенты $\mu_i \neq 0$ можно выбрать так, что $\mu_1 = 1 = \mu_{m+1}$ при $[e_{\alpha_i}, h] = \beta_i e_{\alpha_i}\ (\neq 0)$, все элементы основного поля $\beta_i$ попарно различны. Тогда в силу леммы 3 элементы

$$e_{\alpha_1} + \mu_2 e_{\alpha_2} + \dots + \mu_m e_{\alpha_m} + e_{\alpha_{m+1}} + \mu_{m+2} e_{\alpha_{m+2}} + \dots +$$

$$+ \mu_{m+n}\, e_{\alpha_{m+n}}$$

и $e_{-\alpha_1} + \dots + e_{-\alpha_{m+n}}$ порождают четную часть $A(m,n)$. Пусть $b$ — нечетный элемент из $A(m,n)$, $b = E_{1,\, m+2} + E_{m+2,\, 1}$. Тогда

$$[b, b] = 2(E_{11} + E_{m+2,\, m+2}).$$

Покажем, что элемент

$$g = s_1 e_{\alpha_1} + \dots + s_n e_{\alpha_n} + s_{m+1} e_{\alpha_{m+1}} + \dots + s_{m+n} e_{\alpha_{m+n}} + e_{\alpha_{n+1}} + \dots + e_{\alpha_m} +$$

$$+ e_{-\alpha_{n+1}} + \dots + e_{-\alpha_m} + t_1 e_{-\alpha_1} + \dots + t_n e_{-\alpha_n} + t_{m+1} e_{-\alpha_{m+1}} + t_{m+n}\, e_{-\alpha_{m+n}} + b,$$

где

$$s_1 = s_{m+1} = t_1 = t_{m+1} = 1, \quad s_2 = -\mu_2, \quad s_{m+2} = -\mu_{m+2}, \quad t_2 = t_{m+2} = 1,$$

а при всех

$$3 \leq k \leq n, \qquad s_k = \frac{-\mu_k}{\mu_{k-1}},$$



$$s_{m+k} = \frac{-\mu_{m+k}}{\mu_{m+k-1}},$$

$$t_k = \mu_{k-1}^{-1} \ (k \leq n), \qquad t_{m+k} = \mu_{m+k-1}^{-1}$$

порождает $A(m,n)$.

Действительно,

$$\frac{1}{2}[g, g] = a_1 = E_{11} + E_{m+2,\, m+2},$$

$$2^{-1}[[g, g] g] = [a_1, g - b] = e_{\alpha_1} + e_{\alpha_{m+1}} - (e_{-\alpha_1} + e_{-\alpha_{m+1}}),$$

$$2^{-2}[[gg],[[gg],g]] = [a_1, [a_1, g]] = e_{\alpha_1} + e_{\alpha_{m+1}} + (e_{-\alpha_1} + e_{-\alpha_{m+1}}).$$

Поэтому элементы

$$e_{\alpha_1} + e_{\alpha_{m+1}}, \quad e_{-\alpha_1} + e_{-\alpha_{m+1}} \in \langle g \rangle.$$

Пусть элементы из $\langle g \rangle$

$$h_1 = [e_{\alpha_1} + e_{\alpha_{m+1}},\ e_{-\alpha_1} + e_{-\alpha_{m+1}}] =$$

$$= E_{11} - E_{22} + E_{m+1,\, m+1} - E_{m+2,\, m+2}.$$

Тогда

$$[h_1, b] = 0,$$

и тем более для всех элементов

$$h_i = [\mu_i e_{\alpha_i} + \mu_{m+i} e_{\alpha_{m+i}},\quad e_{-\alpha_i} + e_{-\alpha_{m+i}}]$$

будет

$$[h_i, b] = 0 \quad (i > 1).$$

Вычитая компоненту

$$e_{\alpha_1} + e_{\alpha_{m+1}} + e_{-\alpha_1} + e_{-\alpha_{m+1}}$$

из $g$, получаем элемент

$$g_1 = s_2 e_{\alpha_2} + \dots + s_m e_{\alpha_m} + s_{m+2} e_{\alpha_{m+2}} + \dots + s_{m+n}\, e_{\alpha_{m+n}} +$$

$$+ t_2 e_{-\alpha_2} + \dots + t_m e_{-\alpha_m} + t_{m+2}\, e_{\alpha_{m+2}} + \dots + t_{m+n} e_{-\alpha_{m+n}} +$$

$+ e_{\alpha_{n+1}} + \dots + e_{\alpha_m} + e_{-\alpha_{n+1}} + \dots + e_{-\alpha_m} + b.$

Далее,

$$[h_1, g_1] = -s_2 e_{\alpha_2} - s_{m+1} e_{\alpha_{m+2}} + t_2 e_{-\alpha_2} + t_{m+2} e_{-\alpha_{m+2}} =$$

$$= \mu_2 e_{\alpha} + \mu_{m+2} e_{\alpha_{m+2}} + e_{-\alpha_2} + e_{-\alpha_{m+2}}$$

( в силу выбора констант $s_i$ и $t_i$ ).

Аналогично предыдущему получаем порознь компоненты

$$\mu_2 e_{\alpha_2} + \mu_{m+2} e_{\alpha_{m+2}}$$

и

$$e_{-\alpha_2} + e_{-\alpha_{m+2}},$$

если мы не исчерпали всех компонент, то продолжаем этот процесс дальше. Из этих компонент получаем элемент

$$h_2 = \mu_2 (E_{22} - E_{33}) + \mu_{m+2} (E_{m+2,m+2} - E_{m+3,m+3}).$$

Вычитая элемент

$$\mu_2 e_{\alpha_2} + \mu_{m+1} e_{\alpha_{m+2}} + e_{-\alpha_2} + e_{-\alpha_{m+2}}$$

из $g_1$, получаем элемент

$$g_2 = s_3' e_{\alpha_3} + \dots + s_n e_{\alpha_n} + s_{m+3} e_{\alpha_{m+3}} + \dots + b.$$

Далее получаем, что

$$[h_2, g_2] = -\mu_2 s_3 e_{\alpha_3} - \mu_{m+2} s_{m+3} e_{\alpha_{m+3}} +$$

$$+ \mu_3 t_3 e_{-\alpha_3} + \mu_{m+2} t_{m+3} e_{-\alpha_{m+3}} =$$

$$= \mu_3 e_{\alpha_3} + \mu_{m+3} e_{\alpha_{m+3}} + e_{-\alpha_3} + e_{-\alpha_{m+3}}$$

( в силу выбора констант $s_i$, $t_i$ ).

Дальнейшее продолжение этого процесса очевидно. Когда он закончится, мы получим из элемента $g$ компоненты

$$\mu_1 e_{\alpha_1} + \mu_{m+1} e_{\alpha_{m+1}}, \quad e_{-\alpha_1} + e_{-\alpha_{m+1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu_n e_{\alpha_n} + \mu_{m+n} e_{\alpha_{m+n}}, \quad e_{-\alpha_n} + e_{-\alpha_{m+n}},$$

$$\mu_{n+1} e_{\alpha_{n+1}}, \; e_{-\alpha_{n+1}}, \dots, \mu_m e_{\alpha_m}, \; e_{-\alpha_m}.$$



В результате получается два образующих элемента четной части $A(m,n)$ (см. лемму 3) :

$$\mu_1 e_{\alpha_1} + \dots + \mu_{m+n} e_{\alpha_{m+n}} \quad \text{и} \quad e_{-\alpha_1} + \dots + e_{-\alpha_{m+n}},$$

то есть подалгебра $\langle g \rangle$ содержит элемент $b$ и два образующих элемента четной части $A(m,n)$ . В силу леммы 4 подалгебра $\langle g \rangle$ содержит некоторый идеал ( $\neq 0$) $A(m,n)$ , но так как последняя проста, то подалгебра $\langle g \rangle$ совпадает с $A(m,n)$. Построение закончено.

### 7.3. Доказательство предложения 3

В силу леммы 2 и предложения 4 достаточно доказать цикличность $\bar{G} = \ell(m+1, n+1)/\{I\}$ ( $I$ — единичная матрица). Возвращаясь к построениям для алгебр $A(m,n)$, рассмотрим элемент $\bar{G}$:

$$\bar{g}' = \bar{E}_{11} + \bar{g} : \frac{1}{2}[\bar{g}', \bar{g}'] = \frac{1}{2}[\bar{b}, \bar{b}] = \bar{a}_1 = \bar{E}_{11} + \bar{E}_{m+2,m+2},$$

$$([\bar{a}_1, \bar{E}_{11}] = 0, \quad [\bar{h}_i, \bar{E}_{11}] = 0).$$

Отсюда видно, что $\langle \bar{g}' \rangle$ содержит четную часть

$$\overline{s\ell(m+1, n+1)} \ni \bar{x} = \bar{E}_{m+2,m+2} - \bar{E}_{m+3,m+3}$$

и

$$[\bar{x}, \bar{E}_{11}] = 0, \quad [\bar{x}, [\bar{x}, \bar{b}]] = \bar{b}$$

$(\langle \bar{g}' \rangle \ni \bar{E}_{11} + \bar{b}, \bar{b})$. Поэтому $\langle \bar{g}' \rangle = \bar{G}$.

### 7.4. Доказательство теоремы 3

Утверждение теоремы вытекает из предложения 3 и теоремы Адо-Ивасавы о точном представлении. Доказательство этой теоремы для случая основного поля характеристики нуль дано в работе /7/. Для случая характеристики $g > 0$ можно несколько видоизменить доказательство, данное для алгебр Ли в работе /3/ следующим образом. Сохраним способ выбора центральных элементов $y_i$ для четных элементов $e_i$ ($i = 1, \dots, n$) супералгебры $G$. Если $e_{n+1}, \dots, e_{n+m}$ — базис нечетной части $G$, то получаем базис обертывающей алгебры $U(G)$, состоящей из элементов

$$e_1^{\ell_1} \dots e_n^{\ell_n} \cdot e_{n+1}^{\ell_{n+1}} \dots e_{n+m}^{\ell_{n+m}} \; y_1^{s_1} \dots y_n^{s_n},$$

где $0 \le \ell_i \le d_i$, $s_i \ge 0$ при $i = 1, \dots, n$, $0 \le \ell_{n+k} \le 1$ при $k = 1, \dots, m$. Сохраняя все дальнейшие рассуждения цитируемого доказательства, мы придем к построению требуемого точного конечномерного представления исходной супералгебры Ли $G$.

## 8. ПРИЛОЖЕНИЯ

8.1. **Предложение 4.** Прямая сумма $G$ разрешимой циклической алгебры и циклической алгебры $B$ с $B^{(1)} = B$ ( в частности, простой) является циклической.

Доказательство. Пусть

$$G = A \oplus B \qquad \text{и} \qquad A^{(n)} = 0$$

$$A = \langle g_1 \rangle, \quad B = \langle g_2 \rangle,$$

тогда при $g = g_1 + g_2$ $G = \langle g \rangle$. Рассмотрим, например, случай $n = 2$ (дальнейшее обобщение очевидно). Так как $B^{(1)} = B$, то $B$ порождается всевозможными одночленами вида

$$\phi(g_2) = [[\phi_1(g_2), \phi_2(g_2)], [\phi_3(g_2), \phi_4(g_2)]],$$

где $\phi_i(g_2)$ — неассоциативные одночлены от $g_2$.

В то же время все одночлены вида

$$\phi(g_1) = 0,$$

то есть $\langle g \rangle \supseteq B$, а следовательно, и $A \subset \langle g \rangle$.

8.2. Приведем еще (без доказательства) три утверждения о цикличности прямых сумм циклических алгебр:

а) прямая сумма нескольких попарно неизоморфных простых циклических алгебр является циклической;

б) если $A$ — простая циклическая алгебра, $B$ — циклическая и $\dim A > \dim B$, то прямая сумма $A \oplus B$ — циклическая алгебра;

в) если $A = \langle g_1 \rangle$, $B = \langle g_2 \rangle$ — две простые изоморфные алгебры и есть такой многочлен $\phi$, что $\phi(g_1) = 0$, $\phi(g_2) \neq 0$, то прямая сумма $A \oplus B$ порождается элементом $g = g_1 + g_2$.

8.3. О цикличности одной супералгебры струнной теории

Рассмотрим супералгебру струнной теории (модель Рамона), задаваемую соотношениями

$$[G_n, G_m]_- = (n-m)\,G_{n+m} + (D/8)\,n^3 \delta_{n+m,0},$$

$$[H_n, H_m]_+ = 2G_{n+m} + (D/2)\,n^2 \delta_{n+m,0},$$

$$[G_n, H_m]_- = [(n/2) - m]\,H_{n+m}$$

(см. /1/, с.152).

Очевидно, что элементы $G_{-2}$, $G_1$, $G_2$ порождают четную часть этой алгебры. Они содержатся в линейной оболочке элементов



$$(\mathrm{ad}\,G_0)^k\,(G_{-2} + G_1 + G_2) \qquad (k = 1,2,3).$$

Так как элемент $[H_0, H_0]$ кратен $G_0$, то в силу наших результатов (см. п. 3.8, лемма 2) и соотношений, задающих эту алгебру, элемент

$$G_{-2} + G_1 + G_2 + H_0$$

порождает ее.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность всем товарищам, принявшим участие в обсуждении этой работы.

*ЛИТЕРАТУРА*

1. *Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоиздат, 1987.*
2. *Бахтурин Ю.А., Ольшанский А.Ю. Об аппроксимации и характеристических подалгебрах свободных алгебр Ли. Труды семинара им. И.Г.Петровского, вып. 2. М.: МГУ, 1976, с.147.*
3. *Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.*
4. *Гантмахер Ф.Г. Теория матриц. М.: Наука, 1967.*
5. *Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.*
6. *Kac.V.G. Lie Superalgebras. Advancis in Mathematics, 1977, 26, 8-96.*
7. *Scheunert M. The Theory of Superalgebras. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1987 года.

# ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

| Индекс | Тематика |
| --- | --- |
| 1. | Экспериментальная физика высоких энергий |
| 2. | Теоретическая физика высоких энергий |
| 3. | Экспериментальная нейтронная физика |
| 4. | Теоретическая физика низких энергий |
| 5. | Математика |
| 6. | Ядерная спектроскопия и радиохимия |
| 7. | Физика тяжелых ионов |
| 8. | Криогеника |
| 9. | Ускорители |
| 10. | Автоматизация обработки экспериментальных данных |
| 11. | Вычислительная математика и техника |
| 12. | Химия |
| 13. | Техника физического эксперимента |
| 14. | Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами |
| 15. | Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях |
| 16. | Дозиметрия и физика защиты |
| 17. | Теория конденсированного состояния |
| 18. | Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники |
| 19. | Биофизика |

Лебеденко В.М. Р5-87-462
Супералгебры Ли с одним образующим элементом

Исследуются циклические алгебры, то есть супералгебры Ли с одним (неоднородным) образующим элементом. Описаны циклические алгебры малых размерностей и разрешимые циклические алгебры ступени 2 и 3 над полями характеристики, отличной от 2 и 3. Показано, что над бесконечным полем такой характеристики любая простая алгебра типа A(m,n) является циклической и что любая супералгебра Ли изоморфно вкладывается в циклическую алгебру.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Lebedenko V.M. P5-87-462
Lie Subalgebras with One Generating Element

Cyclic algebras that is Lie subalgebras with one (inhomogeneous) generating element are investigated. Cyclic algebras of small dimensions and solvable cyclic algebras of 2 and 3 degrees over fields of characteristic different from 2 and 3 are described. It is shown that over infinite field of such characteristic any simple algebra of A(m,n) type is cyclic and that any Lie subalgebra is isomorphically imbedded into cyclic algebra.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987