объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-36

В.О.Нефедьев, В.Л.Мазо*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКИХ ТЕРМОАКТИВНЫХ СРЕД

Направлено в журнал
"Прикладная математика и механика"

*Институт географии АН СССР, Москва

1987

I. Введение

Вопросом устойчивости плоскопараллельных неизотермических движений жидкости посвящено много теоретических работ. Обычно выделяют два физических механизма возникновения неустойчивости: гидродинамическая неустойчивость, вызванная перераспределением кинетической энергии между основным течением и возмущением [I], и конвективная неустойчивость, возникающая в неравномерно нагретой жидкости при подводе тепловой энергии извне [2]. Взаимовлияние этих механизмов составляет основной предмет исследования неизотермической теории[3], базирующейся на анализе уравнений Обербека – Буссинеска [4].

Данная математическая модель исключает из рассмотрения ряд факторов, существенно влияющих на общую физическую картину. Одним из них является процесс диссипации, связанный с переходом кинетической энергии в тепловую за счет внутреннего трения среды. Выделение диссипативного тепла вызывает неравномерное изменение сдвиговой вязкости и перераспределение градиента скорости. Это приводит к докритической бифуркации стационарного течения [5]. В данной работе обсуждается ряд математических вопросов, связанных с этой бифуркацией.

2. Основные уравнения

Рассмотрим плоский слой вязкой несжимаемой ($\rho = const$) жидкости толщиной H в поле сил тяжести $\vec{g}$ на наклоненной под углом γ к горизонту плоскости (рис.I). Твердая граница подвергается постоянному нагреву с потоком тепла $\vec{q}$. На свободной поверхности поддерживается температура T_H. Величина динамической вязкости среды меняется с температурой согласно уравнению Аррениуса

$\mu = \mu_0 \exp(Q/RT)$, $\mu_0 = const$,

где R – газовая постоянная и Q – энергия активации при сдвиге.

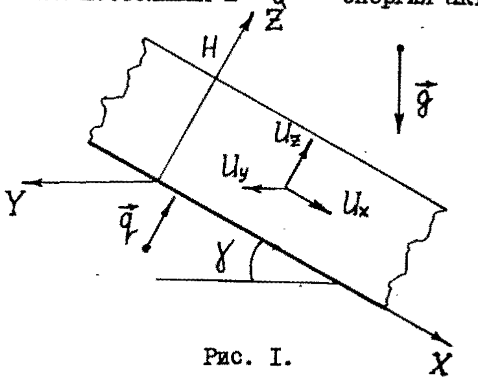

Рис. I.

Данная система описывается уравнениями:

$\nabla \cdot \vec{U} = 0$ непрерывности,

$\rho\left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U}\right] = (\nabla\mu\nabla)\vec{U} - \nabla p + \rho\vec{g}$ Навье – Стокса,

$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U}\nabla T\right] = \lambda\Delta T + \mu 2\dot{\varepsilon}^2$ теплопроводности.

Здесь c_p и λ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности, соответственно, $2\dot{\varepsilon}^2 = \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ – 2-й инвариант тензора скоростей деформаций

$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$.

Предположим, что амплитуда x – компоненты скорости доминирует над y- и z – компонентами ($U_x \gg U_y$, U_z) и в уравнениях ограничимся учетом только главных членов. Выберем в качестве единиц расстояния, скорости, давления и времени, соответственно

H, $gH^2/2\nu_0$, $\rho g H/2$, $H^2/\varkappa$,

где $\nu_0 = \mu_0/\rho$ – кинематическая вязкость и $\varkappa = \lambda/\rho c_p$ – температуропроводность. Для температуры в безразмерной форме примем выражение

$T^* = \frac{Q}{RT_H}\frac{T - T_H}{T_H}$

и будем рассматривать случай малых градиентов $T - T_H \ll T_H$. Тогда исходные уравнения и выражения для граничных условий в параметризованном виде можно представить следующим образом:

$$\partial U_x/\partial x = 0, \tag{2.I}$$

$$-\partial p/\partial z - 2\cos\gamma = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{P_r}\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial U_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial U_x}{\partial z}\right) + 2\sin\gamma, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + B\nu\left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z}\right)^2\right], \tag{2.4}$$

$$U_x = 0, \quad \partial T/\partial z = -\beta, \quad z = 0, \tag{2.5}$$
$$\partial U_x/\partial z = 0, \quad T = 0, \quad p = 0, \quad z = 1.$$

Здесь $P_r = \nu_0/\varkappa$ (число Прандтля), $B = P_r\frac{U^2}{c_p T_H}\frac{Q}{RT_H}$ (число Бринкмэна), $\beta = qHQ/RT_H^2$. Функция $\nu(T)$ имеет вид $\nu(T) = \exp(-T)$. Приближения, сделанные при выводе уравнений (2.I)-(2.5), ограничивают область применения этих уравнений малыми значениями чисел Рейнольдса $Re = \frac{UH}{\nu_0}$ и Пекле $P_e = \frac{UH}{\varkappa}$.

3. Невозмущенное движение

В стационарном невозмущенном состоянии решение уравнений (2.I)-(2.5) описывает плоскопараллельное движение со скоростью $U_x = U_{x0}(z)$ и распределением температуры в слое $T = T_0(z)$. Уравнения для этих величин имеют вид [6]

$$(\nu U_{x0}')' + 2\sin\gamma = 0, \tag{3.I}$$

$$T_0'' + 8\nu (U_{x0}')^2 = 0 \qquad (3.2)$$

$$U_{x0}(0) = 0\ ,\ T_0'(0) = -\beta\ ,\ U_{x0}'(1) = 0\ ,\ T_0(1) = 0 \qquad (3.3)$$

Система (3.I)-(3.3) разделяется относительно U_{x0} и T_0 :

$$T_0'' + \delta(1-z)^2 \exp T_0 = 0$$

$$T_0'(0) = -\beta\ ,\ T_0(1) = 0\ , \qquad (3.4)$$

$$U_{x0}' = 2\sin\gamma\,(1-z)\exp T_0$$

$$U_{x0}(0) = 0\ , \qquad (3.5)$$

где $\delta = 4B\sin^2\gamma$.

Уравнение (3.4) хорошо известно в теории "теплового взрыва". Проекция поверхности равновесия задачи (3.4)-(3.5) (рис.2) на плоскость управляющих параметров (δ , β) имеет особенность типа складки. Бифуркационные значения параметров δ и β лежат на кривой $\beta = \beta_Б(\delta)$ [7] . Отсутствие стационарного решения при $\beta > \beta_Б(\delta)$ соответствует условию бесконечного роста температуры.

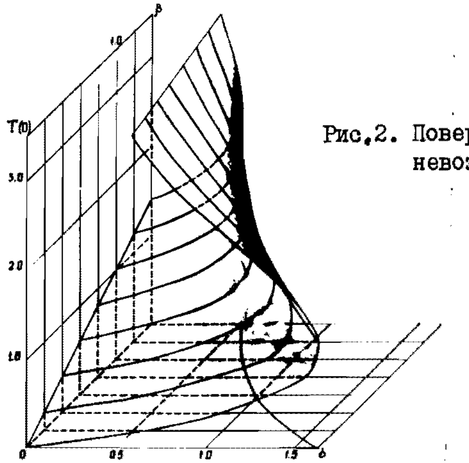

Рис.2. Поверхность равновесия стационарного невозмущенного состояния.

4. Уравнения для возмущений

Рассмотрим бесконечно малые по амплитуде возмущения $\vec{U}_1$ и T_1 стационарного состояния. Тогда систему (2.3)-(2.5) в линеаризованном виде можно представить:

$$\frac{\partial U_{x1}}{\partial t} = P_r\left\{\zeta\left[\Delta U_{x1} - \chi\frac{\partial U_{x1}}{\partial z}\right] + 2\left[T_1 - (1-z)\frac{\partial T_1}{\partial z}\right]\right\}, \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \Delta T_1 + \delta(1-z)\left[\frac{\partial U_{x1}}{\partial z} - (1-z)\zeta^{-1} T_1\right]. \qquad (4.2)$$

Здесь $\zeta(z) = \exp(-T_0)$, $\chi(z) = T_0'$, а Δ – плоский лапласиан в переменных (y , z). На границах слоя выполняются условия

$$U_{x1} = 0\ ,\ \partial T_1/\partial z = 0\ ,\ z = 0,$$

$$\partial U_{x1}/\partial z = 0\ ,\ T_1 = 0\ ,\ z = 1\ . \qquad (4.3)$$

При выводе уравнений (4.I)-(4.3) использовались выражения (3.I)-(3.5).

Система (4.I)-(4.2) с граничными условиями типа (4.3) имеет решение в виде нормальных возмущений

$$U_{x1} = v(z)\exp(-\lambda t + iky)\ ,\ T_1 = \theta(z)\exp(-\lambda t + iky)\ . \qquad (4.4)$$

После непосредственной подстановки (4.4) в (4.I)-(4.3) придем к системе обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений:

$$-\lambda v = P_r\{\zeta[-k^2 v + v'' - \chi v'] + 2[\theta - (1-z)\theta']\}, \qquad (4.5)$$

$$-\lambda\theta = -k^2\theta + \theta'' + \delta(1-z)[v' - (1-z)\zeta^{-1}\theta]\ . \qquad (4.6)$$

Совместно с граничными условиями вида (4.3) для v и θ эта система определяет задачу о собственных значениях для $\lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda = \lambda(k, \delta, \beta, P_r)$. Интегрирование (4.5)-(4.6) производилось численно: уравнения записывались в виде разностных схем, после чего дискретная задача решалась методом приведения матрицы жесткости к верхней форме Хессенберга. Собственные значения приведенной матрицы вычислялись с использованием QR-алгоритма [8].

5. Анализ спектра задачи

Нормальные возмущения (4.4) затухают, если действительная часть декремента затухания $Re\,\lambda > 0$. В случае низкотемпературного движения это условие выполняется при любых k и движение устойчиво.

Иная ситуация возникает при исследовании спектра возмущений высокотемпературного решения: существует критическое волновое число $k_{кр} = k(\delta, \beta)$, соответствующее стационарному состоянию $\lambda = 0$, такое, что при $k < k_{кр}$, $Re\,\lambda < 0$ и движение неустойчиво. В результате воздействия возмущений $k > k_{кр}$ установившимся режимом оказывается периодический режим с $k = k_{кр}$. Возмущения с волновым вектором $k >$ 0,523 затухают при любых значениях (δ , β) в области существования стационарного решения.

Численное исследование уравнений (2.3)-(2.5) при помощи явного разностного метода на равномерной сетке [9] позволило распространить результаты линейной теории на случай возмущений конечной амплитуды. При "мягком" возбуждении колебаний $k < k_{кр}$, когда их амплитуда невелика, система плавно переходит с высокотемпературного на низкотемпературное решение. При возмущениях значительной амплитуды этот переход осуществляется скачком (т.н. "жесткая" потеря устойчивости). Низкотемпературное движение глобально и монотонно устойчиво [I0] .

Анализ возможных состояний (рис.3) исследуемой физической системы подтверждает первоначальные эмпирические предположения. Пренебрежение диссипационными членами ($2\varepsilon^2 \ll 1$) в исходных уравнениях приводит к вырождению спектра ($k_{кр}=0$) и отсутствию докритической бифуркации стационарного движения, что согласуется с данными изотермической теории. Учет конвективных процессов в рамках линейной теории снимает это вырождение (при $\beta>0$).

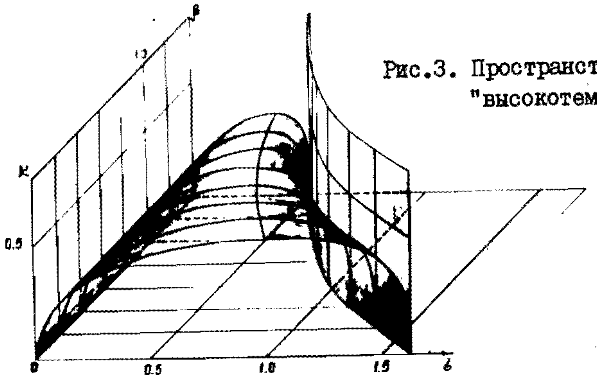

Рис.3. Пространство возможных состояний "высокотемпературного" режима.

Авторы глубоко благодарны Е.П.Жидкову за поддержку при выполнении работы.

Литература

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. "ИЛ", М., 1958.
2. Rayleigh. Phil. Mag., 1916, 32, N6, p. 529.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. "Наука", М., 1972.
4. Mihaljan J.M. Astrophys. J., 1962, 136, p. 1126.
5. Франк-Каменский Д.А. ЖФХ, 1939, 13, №6, с.738.
6. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды, М.,"Наука", 1962.
7. Божинский А.И., Григорян С.С. ДАН СССР, 1973, 212, №3, с.577.
8. Уилкинсон Д.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. "Наука", М., 1970.
9. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. "Наука", М.,1973.
10. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. "Мир", М., 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 января 1987 года.

Нефедьев В.О., Мазо В.Л. P5-87-36

Устойчивость плоскопараллельных течений вязких термоактивных сред

В рамках теории "мелкой воды" рассматривается течение подогреваемого слоя вязкой несжимаемой жидкости. Обсуждается ряд математических вопросов, связанных с докритической бифуркацией решения. Влияние конвективных процессов не учитывается. Среда предполагается термоактивной, т.е. ее вязкость существенно зависит от температуры.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Nefediev V.O., Mazo V.L. P5-87-36

Stability of Plane Parallel Flows of Viscous Thermoactive Fluids

The heat flow of viscous non-pressure fluid is investigated in a "shallow water" approximation. A number of mathematical problems connected with before-critical bifurcation of solution are discussed. The influence of connection processes is not taken into account. The fluid is supposed to be thermoactive, i.e. its viscosity is a function of temperature.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987