

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Б 742

P5-87-354

И.Л.Боголюбский

У

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ
В МОДЕЛИ СКИРМА

1987

I. Топологические солитоны в модели Скирма^{/1/} после появления работ^{/2/} стали объектом интенсивного исследования (см., например, обзоры^{/3,4/}). Большой интерес в последние годы привлекла высказанная еще в^{/1/} идея о том, что топологическому инварианту в этой модели соответствует барионный заряд, так что солитоны с единичным топологическим зарядом ($Q_{\text{top}} = 1$) естественно рассматривать как барионы^{/2,4/}. Следует отметить, что свойства топологических локализованных решений в модели Скирма не могут быть изучены достаточно полно без интенсивного использования ЭВМ. Наиболее перспективным здесь представляется метод исследования, основанный на минимизации функционала энергии E при заданном Q_{top} . Этим методом автором были обнаружены трехмерные топологические солитоны в модели ферромагнетика с конкурирующими взаимодействиями^{/5/}. Подобный подход применялся для получения инстантонов в решеточной квантовой хромодинамике (см.^{/6,7/} и цитированную там литературу) и двумерной σ -модели на решетке^{/8/} как минимумов соответствующих функционалов действия.

В настоящей работе представлена методика численной минимизации разностного аналога функционала энергии в модели Скирма в трехмерном пространстве.

2. Плотность лагранжиана в модели Скирма записывается в виде:

$$L = \frac{1}{16} F_{\pi}^2 \text{Tr} \left[\partial_{\mu} U \partial^{\mu} U^{\dagger} \right] + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left\{ \left[(\partial_{\mu} U) U^{\dagger}, (\partial_{\nu} U) U^{\dagger} \right]^2 \right\}. \quad (1)$$

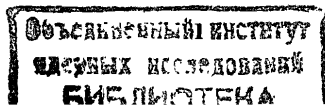
Здесь $U(\mathbf{x}_{\mu})$ - унитарные 2×2 матрицы группы $SU(2)$, $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\mu}}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $\mathbf{x}_0 = t$, $F_{\pi} = 186 \text{ Mev}$ - постоянная распада пиона, e - безразмерный параметр. Используя выражение U через матрицы Паули τ_a , $a = 1, 2, 3$

$$U = \varphi_0 \cdot E + i \tau_a \varphi_a, \quad \varphi_0^2 + \varphi_a^2 = 1, \quad (2)$$

можно получить более удобную для исследования на ЭВМ запись^{/9/}:

$$L = \frac{1}{8} F_{\pi}^2 \partial_{\mu} \varphi_{\alpha} \cdot \partial^{\mu} \varphi_{\alpha} - \frac{1}{4e^2} \left[(\partial_{\mu} \varphi_{\alpha})^2 (\partial_{\nu} \varphi_{\gamma})^2 - (\partial_{\mu} \varphi_{\alpha} \cdot \partial_{\nu} \varphi_{\alpha}) (\partial_{\mu} \varphi_{\gamma} \cdot \partial_{\nu} \varphi_{\gamma}) \right], \quad (3)$$

$$\mu, \nu, \alpha, \gamma = 0, 1, 2, 3.$$



В используемом подходе достаточно рассматривать стационарные конфигурации: $\partial_t \varphi_\alpha = \partial_0 \varphi_\alpha = 0$. Для них

$$H_{CT} = -L_{CT},$$

$$H_{CT} = \frac{1}{8} \frac{F_x^2}{e^2} (\partial_1 \varphi^\alpha \cdot \partial_1 \varphi^\alpha) + \frac{1}{4e^2} [(\partial_1 \varphi^\alpha \cdot \partial_1 \varphi^\alpha)^2 - (\partial_1 \varphi^\alpha \cdot \partial_1 \varphi^\alpha)^2] \quad (4)$$

$i, j = 1, 2, 3$.

3. На трехмерной решетке интеграл энергии $E_{CT} = \int H_{CT} d^3x$ аппроксимируется суммой по всем узлам $M(x_c, y_c, z_c)$, расстояние между которыми h выберем одинаковым по всем осям Ox , Oy , Oz . Будем использовать шаблон из 24 точек, являющихся соседями центрального узла M . Пронумеруем этих соседей следующим образом:

$$\begin{aligned} N(x_c+h, y_c, z_c) &= 2, & N(x_c+2h, y_c, z_c) &= 6, \\ N(x_c-h, y_c, z_c) &= 4, & N(x_c-2h, y_c, z_c) &= 8, \\ N(x_c, y_c, z_c+h) &= 15, & N(x_c+h, y_c, z_c+h) &= 19, \\ N(x_c-h, y_c, z_c+h) &= 20, & N(x_c, y_c, z_c+2h) &= 16, \\ N(x_c, y_c, z_c-h) &= 14, & N(x_c+h, y_c, z_c-h) &= 18, \\ N(x_c-h, y_c, z_c-h) &= 17, & N(x_c, y_c, z_c-2h) &= 13, \\ N(x_c, y_c+h, z_c) &= 3, & N(x_c, y_c+h, z_c-h) &= 22, \\ N(x_c, y_c+h, z_c+h) &= 23, & N(x_c, y_c+2h, z_c) &= 7, \\ N(x_c, y_c-h, z_c) &= 1, & N(x_c, y_c-h, z_c-h) &= 21, \\ N(x_c, y_c-h, z_c+h) &= 24, & N(x_c, y_c-2h, z_c) &= 5, \\ N(x_c-h, y_c+h, z_c) &= 11, & N(x_c+h, y_c+h, z_c) &= 10, \\ N(x_c+h, y_c-h, z_c) &= 9, & N(x_c-h, y_c-h, z_c) &= 12. \end{aligned} \quad (5)$$

Заменяя производные в соотношении (4) конечными разностями и выполняя в бесконечной сумме несложные перегруппировки членов, получим для энергии E локализованного распределения поля Скирма выражение в виде суммы по всем узлам M трехмерной кубической решетки (нетрудно показать, что оно дает дискретную аппроксимацию $O(h^2)$ исходного непрерывного гамильтониана $E = \int H d^3x$ (см. (4)),

$$E = h^3 \sum_M H_M^{dis}; \quad H_M^{dis} = \frac{F_x^2}{8h^2} \left[c + (\varphi_c \cdot v) \right], \quad (6)$$

$$c = 6 + \frac{1}{2h^2 e^2 F_x^2} (6 - \frac{1}{8} D),$$

$$D = c_{fz} (\varphi_{23} - \varphi_{24}) \varphi_7 + c_{uy} (\varphi_{23} - \varphi_{24}) \varphi_{16} - c_{bz} (\varphi_{24} - \varphi_{21}) \varphi_5 - c_{dy} (\varphi_{22} - \varphi_{21}) \varphi_{13} + c_{rz} (\varphi_{19} - \varphi_{18}) \varphi_6 + c_{ux} (\varphi_{19} - \varphi_{20}) \varphi_{16} - c_{lz} (\varphi_{20} - \varphi_{17}) \varphi_8 - c_{dx} (\varphi_{18} - \varphi_{17}) \varphi_{13} + c_{ry} (\varphi_{10} - \varphi_9) \varphi_6 + c_{fx} (\varphi_{10} - \varphi_{11}) \varphi_7 - c_{ly} (\varphi_{11} - \varphi_{12}) \varphi_8 - c_{bx} (\varphi_9 - \varphi_{12}) \varphi_5,$$

$$\begin{aligned} c_{ry} &= (\varphi_{10} - \varphi_9) (\varphi_6 - \varphi_c), & c_{fx} &= (\varphi_{10} - \varphi_{11}) (\varphi_7 - \varphi_c), \\ c_{ly} &= (\varphi_{12} - \varphi_{11}) (\varphi_8 - \varphi_c), & c_{bx} &= (\varphi_{12} - \varphi_9) (\varphi_5 - \varphi_c), \\ c_{rz} &= (\varphi_{19} - \varphi_{18}) (\varphi_6 - \varphi_c), & c_{ux} &= (\varphi_{19} - \varphi_{20}) (\varphi_{16} - \varphi_c), \\ c_{lz} &= (\varphi_{17} - \varphi_{20}) (\varphi_8 - \varphi_c), & c_{dx} &= (\varphi_{17} - \varphi_{18}) (\varphi_{13} - \varphi_c), \\ c_{fz} &= (\varphi_{23} - \varphi_{22}) (\varphi_7 - \varphi_c), & c_{uy} &= (\varphi_{23} - \varphi_{24}) (\varphi_{16} - \varphi_c), \\ c_{bz} &= (\varphi_{21} - \varphi_{24}) (\varphi_5 - \varphi_c), & c_{dy} &= (\varphi_{21} - \varphi_{22}) (\varphi_{13} - \varphi_c), \end{aligned} \quad (7)$$

$$v = v^{(2)} - (\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_{14} + \varphi_{15}), \quad (8)$$

$$v^{(2)} = c_5 \varphi_5 + c_6 \varphi_6 + c_7 \varphi_7 + c_8 \varphi_8 + c_{13} \varphi_{13} + c_{16} \varphi_{16} + \frac{1}{8} (c_9 \varphi_9 + c_{10} \varphi_{10} + c_{11} \varphi_{11} + c_{12} \varphi_{12} + c_{17} \varphi_{17} + c_{18} \varphi_{18} +$$

$$c_{19} \varphi_{19} + c_{20} \varphi_{20} + c_{21} \varphi_{21} + c_{22} \varphi_{22} + c_{23} \varphi_{23} + c_{24} \varphi_{24}),$$

$$\begin{aligned} c_5 &= (\varphi_9 \varphi_{12} + \varphi_{21} \varphi_{24}) \cdot \frac{1}{2} - 2, & c_6 &= (\varphi_9 \varphi_{10} + \varphi_{19} \varphi_{18}) \cdot \frac{1}{2} - 2, \\ c_7 &= (\varphi_{10} \varphi_{11} + \varphi_{22} \varphi_{23}) \cdot \frac{1}{2} - 2, & c_8 &= (\varphi_{11} \varphi_{12} + \varphi_{20} \varphi_{17}) \cdot \frac{1}{2} - 2, \\ c_{13} &= (\varphi_{21} \varphi_{22} + \varphi_{17} \varphi_{18}) \cdot \frac{1}{2} - 2, & c_{16} &= (\varphi_{23} \varphi_{24} + \varphi_{19} \varphi_{20}) \cdot \frac{1}{2} - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_9 &= -c_{bx} - c_{ry}, & c_{10} &= c_{ry} + c_{fx}, & c_{11} &= -c_{ly} - c_{fx}, \\
c_{12} &= c_{ly} + c_{bx}, & c_{17} &= c_{lz} + c_{dx}, & c_{18} &= -c_{dx} - c_{rz}, \\
c_{19} &= c_{rz} + c_{ux}, & c_{21} &= c_{bz} + c_{dy}, & c_{20} &= -c_{lz} - c_{ux}, \\
c_{22} &= -c_{dy} - c_{fz}, & c_{23} &= c_{fz} + c_{uy}, & c_{24} &= -c_{bz} - c_{uy}
\end{aligned}
\tag{9}$$

Здесь φ , v , $v^{(2)}$ – четырехкомпонентные изотопические векторы, $|\varphi_i| = 1$, $i = 1, \dots, 24$, $|\varphi_c| = 1$, их парные произведения понимаются как скалярные, индекс 'с' соответствует "центральному" узлу \mathbf{M} . Величина n^{dis} является полиномом второй степени по компонентам вектора φ_c . Поэтому для построения алгоритма минимизации энергии E была выбрана следующая итерационная процедура: для вычисления коэффициентов c_{ry} , c_{fx}, \dots, c_{dy} (формулы (7)) использовалось значение φ_c до обновления. Далее из линейного относительно φ_c^{new} выражения для n^{dis} находилась величина

$$\varphi_c^{new} = -\frac{v}{|v|}, \tag{10}$$

соответствующая минимальному значению

$$n_{min}^{dis} = \frac{F_{\pi}^2}{8h^2} [c(\varphi_c) - |v|] \tag{11}$$

при фиксированных значениях φ_i , $i = 1, \dots, 24$. Локальная минимизация выполнялась последовательно во всех узлах решетки (итерация). Для численного нахождения минимума функционала следует выполнить необходимое число итераций.

4. В ходе вычислительных экспериментов с топологическими солитонами на решетке важно контролировать сохранение топологического заряда Q_{top} , который, вообще говоря, в решеточных вычислениях может не сохраняться^{5/}. Величина Q_{top} в модели Скирма определяет степень отображения на единичную сферу S^3 трехмерного пространства R^3 с условием $\varphi(|\vec{r}| \rightarrow \infty) = \varphi_{\infty} = const$. Мы использовали для вычисления Q_{top} методику работы^{10/}. Однако в нашем случае необходимо позаботиться, чтобы значение пробного вектора^{10/} на сфере S^3 не совпадало со значениями векторов в узлах решетки. Такое совпадение происходит, например, если пробный вектор имеет вид $(0, \ell_1)$, ℓ_1 – единичные орты осей Ox, Oy, Oz , например, $(0, 0, 0, 1)^{1,2/}$ ("скирмион"), см. ниже (13)).

5. Обсудим далее постановку граничных условий. "Внешние" граничные условия, аппроксимирующие на решетке конечного размера, $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|, |\mathbf{z}| \leq R_{max}$, условие на пространственной бесконечности, $\varphi(\infty) = \varphi_{\infty}$ формулировалось следующим образом: в узлах, окружающих конечную расчетную решетку, $\varphi_{\mathbf{M}} = \varphi_{\infty}$.

Вычислительные эксперименты с целью экономии ресурсов ЭВМ целесообразно проводить на четверти решетки, находящейся внутри двугранного угла между плоскостями Oxz и Oyz , проходящими через ось симметрии Oz . При этом на плоскостях Oxz и Oyz задаются "внутренние" граничные условия, отражающие предполагаемую симметрию исследуемого решения относительно поворотов на 90° вокруг оси Oz . При исследовании большинства задач в модели Скирма следует, кроме того, дополнительно учитывать симметрию относительно срединной плоскости Oxy , что позволяет еще почти вдвое сократить число расчетных узлов.

6. Введем удобные для численных расчетов безразмерные переменные

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1, \tilde{r}, \tilde{h}, \tilde{E}, \tilde{R}_{max} : \\
x_1 = eF_{\pi} \tilde{x}_1, \quad r = eF_{\pi} \tilde{r}, \quad h = eF_{\pi} \tilde{h}, \quad E = \frac{F_{\pi}}{e} \tilde{E} \\
R_{max} = eF_{\pi} \tilde{R}_{max}.
\end{aligned}
\tag{12}$$

На основе описанного в п.п. 3-5 алгоритма был создан комплекс программ на фортране и проведены контрольные расчеты. Было проверено, что вакуумное состояние, например, $\varphi_{\mathbf{M}} = (1, 0, 0, 0)$ для всех узлов \mathbf{M} , заложенное в качестве начального распределения для последующей численной минимизации, сохраняется в итерационном процессе. Далее было проверено, что различные пробные распределения с топологическими зарядами $Q_{top} = 0, 1, 2$, не являющиеся минимумами энергии при заданном Q_{top} , в процессе вычислений монотонно уменьшают свою энергию E .

Вопрос о минимальных допустимых размерах решетки решался заданием в качестве начального распределения скирмиона с $Q_{top} = 1^{1,2/}$.

$$\begin{aligned}
U_{sol} = \exp [iF(\mathbf{r})\vec{c} \cdot \vec{n}] = \cos F(\mathbf{r}) + i\vec{c} \cdot \vec{n} \sin F(\mathbf{r}), \\
\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad F(0) = \pi, \quad F(\infty) = 0,
\end{aligned}
\tag{13}$$

Здесь $F(\mathbf{r})$ – профильная функция солитона, найденная численно в^{2b/}. Доказано^{11/}, что на распределении (13) достигается абсолютный минимум функционала E в классе функций с $Q_{top} = 1$. В наших расчетах использовалась трехмерная кубическая решетка с числом узлов по осям вида

$$L_x = N+1, \quad L_y = N+1, \quad L_z = 2N+1 \tag{14}$$

(если предполагается симметрия относительно плоскости Oxy , то $L_z = N+1$). Оказалось, что при $\tilde{R}_{\max} = 5, N=12$ солитон (I3) быстро разрушается в итерационном процессе, причем энергия распределения уменьшается, стремясь к нулю. При увеличении числа N скорость уменьшения энергии быстро падает: при $N = 15$ относительное изменение E за четыре итерации составило 0.007. При $\tilde{R}_{\max} = 5, N = 15$ в узлах внешних граничных плоскостей решетки, например, $\tilde{x} = \tilde{x}_{\max} = 5$ при задании начального распределения (I3) в первой итерации возникают значения $n_M^{\text{dis}} < 0$, что объясняется возникающим вследствие малости \tilde{R}_{\max} большим разрывом значений ψ на границе. Действительно, увеличение \tilde{R}_{\max} до $\tilde{R}_{\max} = 6,5$ при прежнем $N = 15$ сразу более чем на порядок уменьшает этот эффект конечного размера решетки.

Далее, рассмотрим значения \tilde{E}_{sol} , вычисляемые по начальному распределению (I3) на решетках вида (I4) при фиксированном $N = 15$ с различными \tilde{R}_{\max} : при $\tilde{R}_{\max} = 5, \tilde{E}_{\text{sol}} = 35,7$, при $\tilde{R}_{\max} = 6,5, \tilde{E}_{\text{sol}} = 33,2$. Сравнение их с величиной $\tilde{E}_{\text{sol}} \approx 37$, полученной вычислением на ЭВМ одномерного интеграла E по солитонной профильной функции $F(r)$ (см. (I3)), показывает, что шаг решетки $\tilde{h} = \tilde{R}_{\max}/N$ во всяком случае не должен быть больше, чем $5/15=1/3$.

Приведенные выше оценки позволяют сделать заключение, что для исследования на ЭВМ солитонов в модели Скирма трехмерные решетки должны иметь шаг $\tilde{h} \geq 1/3$ и линейный размер по осям $\tilde{R}_{\max} \geq 6,5$.

Когда это сообщение готовилось к печати, автору стало известно, о работах [12, I3], также посвященных численному исследованию модели Скирма, применяемые в них подходы существенно отличаются от использованного в настоящей работе.

Автор благодарен профессорам М.Г.Мещерякову, Е.П.Жидкову, В.Г.Маханькову за интерес к работе, Н.В.Махалдиани, М.Мюллер-Пройскеру, В.А.Николаеву и М.Х.Ханхасаеву за полезные обсуждения, А.А.Боголюбской за помощь в численных исследованиях.

Литература

1. Skyrme T.H.R., Proc.Roy.Soc., 1961, A260, 127.
2. а) Witten E. Nucl.Phys., 1983, B223, 422, 433.
- б) Adkins G., Nappi C., Witten E. Nucl.Phys., 1983, B228, 552.
3. Dyakonov D.I., Petrov V.Yu. LNPI preprint №967, Leningrad, 1984.
4. Balanchandran A.P. Syracuse University, SU-4222-314, Syracuse, 1985.
5. Боголюбский И.Л. ОИЯИ, РЭ-85-482, Р5-85-588, Дубна, 1985.
6. Ilgenfritz E.-M., Iaurson M.L., Müller-Preussker M., Schierholz G., Schiller H. Nucl.Phys., 1986, B268, 693.

7. Веселов А.И., Поликарпов М.И. Письма в ЖЭТФ, 1987, 45, 113.
8. Iwasaki Y., Yoshiè. Phys.Lett., 1983, B125, 197.
9. Фаддеев Л.Д. В поисках многомерных солитонов. В сборнике материалов IX Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, 1976. ОИЯИ, Д-29788, Дубна, 1976, с.207-223.
10. Woit P. Phys.Rev.Lett., 1983, 51, 638.
11. Rybakov Yu.P., Sanyuk V.I. NBI, University of Copenhagen, NBI-HE-81-49, Copenhagen, 1981.
12. Зенкин С.В., Копелиович В.Б., Штерн Б.Е. ЯФ, 1986, 45, 165.
13. Klebanov I. Princeton University preprint, Princeton, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 мая 1987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 15 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р. 50 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Боголюбский И.Л.

P5-87-354

Численный метод исследования топологических солитонов в модели Скирма

Построен разностный аналог статического функционала энергии в модели Скирма на трехмерной кубической решетке. Разработан алгоритм последовательной локальной минимизации этого функционала. Найдено, каким необходимым условиям должны удовлетворять размеры решетки для проведения численных исследований с солитонами ("скирмионами") в этом подходе.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Bogolubsky I.L.

P5-87-354

A Numerical Method for Investigation of Topological Solitons in Skyrme Model

The difference analogue of a static functional in the Skyrme model is constructed on the three-dimensional lattice. An algorithm of the successive local minimization of this functional is elaborated. Necessary conditions imposed on the lattice sizes are found for carrying out numerical investigations of these solitons ("skyrmons") in this approach.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987