сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-334

А.Б.Яновски

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОРОЖДАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЗАХАРОВА-ШАБАТА

Полюсная калибровка

1987

Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [3]. Поэтому мы не будем вводить заново обозначения, они такие же, что и в указанной работе.

В [3] мы рассмотрели порождающие операторы $\Lambda_\pm$ для обобщенной задачи Захарова-Шабата L и показали что $\Lambda_\pm^*$ можно получить как отношение двух совместных пуассоновых тензоров

$$
\begin{aligned}
P_q^0(\xi) &= [q,\xi] + i\xi_x\,, \quad q \in \mathfrak{g}^*[x] \sim \mathfrak{g}[x],\\
Q_q^0(\xi) &= [J,\xi]\,, \quad \xi \in T_q^*(\mathfrak{g}^*[x]) \sim \mathfrak{g}[x],
\end{aligned}
\tag{I}
$$

предварительно ограничив их на подмногообразие $M_0 \subset \mathfrak{g}[x]$, где Q^0 невырожден - $\ker Q^0/_{M_0} = \{0\}$. Свойства построенной таким образом структуры ($(P-N)$-структуры) дают геометрическую интерпретацию подхода порождающих операторов $\Lambda_\pm$, вернее той ее части, которая непосредственно связана с их применением для исследования нелинейных дифференциальных уравнений (НЭУ), точно решаемых при помощи обобщенной задачи Захарова-Шабата в канонической калибровке. Цель настоящей работы - дать аналогичную интерпретацию порождающих операторов $\tilde{\Lambda}_\pm$, связанных с обобщенной задачей Захарова-Шабата $\tilde{L}$ в полюсной калибровке.

I. $(P-N)$-структуры на группах и алгебрах Ли

Легко заметить, что при конструировании тензоров (I) существенную роль играет Ли-алгебраическая операция. Это не случайно, оказывается, что $(P-N)$-структуры естественно могут возникать на группах Ли, [5,6] и порождают совместные пуассоновы структуры на коалгебре. Имеется и другая причина, по которой мы останавливаемся на групповых структурах. Дело в том, что калибровочное преобразование $L \to \tilde{L} = \psi_0^{-1} L\, \psi_0$, переводящее обобщенную задачу Захарова-Шабата из канонической в полюсную калибровку [3], очевидно, должно иметь групповой смысл ж), и поэтому нельзя ограничиться только алгеброй.

ж) Это преобразование впервые было продемонстрировано Захаровым и Тахтаджяном [2].

Приведем некоторые результаты из работы /6/, которые мы будем использовать.

Теорема I

Пусть G -группа Ли, P^G и Ω – соответственно левоинвариантный пуассонов тензор на G и правоинвариантная предсимплектическая форма, $(P_g^G : T_g^*(G) \mapsto T_g(G))$, $(\Omega_g : T_g(G) \to T_g^*(G))$. Тогда G обладает $(P-N)$-структурой, заданной тензорами

$$P^G, \quad N^G = P^G \Omega. \tag{2}$$

В случае, когда на G существует левоинвариантная симплектическая форма ω, можно, конечно, взять $P^G = \omega^{-1}$. В дальнейшем мы ограничимся именно этим случаем.

Хорошо известно, что условие замкнутости форм ω и Ω на G равносильно выполнению следующих коциклических соотношений для значений ω и Ω в единице $e \in G$:

$$\begin{aligned} &\omega_e([\xi_1,\xi_2],\xi_3) + (cycl) = 0,\\ &\Omega_e([\xi_1,\xi_2],\xi_3) + (cycl) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь ξ_i принадлежат касательному пространству $T_e(G)$ в единице, т.е. алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а через $(cycl)$ обозначены суммы аналогичных членов, которые получаются циклической перестановкой векторов ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Как нетрудно убедиться непосредственно, см. также /6/, соотношения (3) приводят к тому, что на коалгебре $\mathfrak{g}^*$ можно определить совместные пуассоновы тензоры:

$$\begin{aligned} &P_q(\xi) = ad_\xi^* q + \omega_e(\xi), \quad q \in \mathfrak{g}^*, \ \xi \in (\mathfrak{g}^*)^* \sim \mathfrak{g},\\ &Q_q(\xi) = \Omega_e(\xi). \end{aligned} \tag{4}$$

Тензоры P^0 и Q^0, которые мы использовали ранее, получаются из этой конструкции, если выбрать $\Omega_e(\xi) = ad_J \xi$, $\omega_e(\xi) = i\frac{\partial \xi}{\partial x}$, и мы отождествляем $\mathfrak{g}[x]$ и $\mathfrak{g}^*[x]$ при помощи билинейной формы $\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi(x), \eta(x) \rangle dx$, где $\langle\ ,\ \rangle$ – форма Киллинга полупростой алгебры $\mathfrak{g}$. Поэтому 2-формы Ω_e и ω_e записываются как операторы : $\mathfrak{g}[x] \to \mathfrak{g}[x]$.

Коциклические соотношения (3) проверяются без труда. Группу, на которой можно распространить ω_e по левоинвариантности, а Ω_e по правоинвариантности, выбирают обычно следующим образом /5,6/. Рассмотрим совокупность функций $g : \mathbb{R} \to G$, где G – связная полупростая группа

Ли, имеющая в качестве алгебры полупростую конечномерную алгебру $\mathfrak{g}$. Тогда группа $G[x]$ состоит из всех функций $g(x)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = e, \tag{5}$$

где e – единица G. Если дополнительно потребовать, чтобы стремление к границам (5) было достаточно быстрым, то в качестве алгебры этой группы мы получим $\mathfrak{g}[x]$ (совокупность функций типа Шварца на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathfrak{g}$).

Вернемся к общему случаю, описанному в условии теоремы I. (Там мы обозначали через $\mathfrak{g}$ некоторую произвольную алгебру Ли, а через G – соответствующую группу Ли) Тензоры P и Q связаны с тензорами P^G и $N^G P^G$ посредством отображения моментов $\phi_\omega : G \to \mathfrak{g}^*$ для ω. Относительно общего определения отображения ϕ_ω, см. /7/, в случае левоинвариантной формы на группе, ϕ_ω определяется из требования

$$\langle d\phi_\omega(X), \xi \rangle_{\mathfrak{g}} = \omega(\xi^r, X), \tag{6}$$

для любого векторного поля X на G и $\xi \in \mathfrak{g}$. (Здесь $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}}$ означает естественное спаривание между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, а через ξ^r обозначено правоинвариантное векторное поле, построенное по $\xi \in \mathfrak{g}$).

Имеют место соотношения /6/:

$$\begin{aligned} &d\phi_\omega \circ P^G \circ [d\phi_\omega]^* = -P,\\ &d\phi_\omega \circ N^G P^G \circ [d\phi_\omega]^* = -Q, \end{aligned} \tag{7}$$

т.е. P, Q и P^G и $N^G P^G$ ϕ_ω– связаны. (Как обычно, через $d\phi_\omega$ мы обозначаем касательное отображение к ϕ_ω, согласно (6) оно будет I-формой со значениями в $\mathfrak{g}^*$).

Известно, что ϕ_ω является $Ad^*(g^{-1})$ -коциклом для группы G, и с его помощью задается левое действие группы G на $\mathfrak{g}^*$, см. /7/:

$$\mathcal{Z}_g q = Ad^*(g^{-1}) q + \phi_\omega(g), \quad q \in \mathfrak{g}^*, \ g \in G. \tag{8}$$

Возвращаясь к структурам на $G[x]$, нетрудно видеть, что если мы хотим получить аналог оператора $N = \Lambda_\pm^* \sim P^0 (Q^0)^{-1}$ (см. /3/), надо построить на группе тензор, обратный к N^G. Однако у Ω, а значит, и у N^G, есть ядро, поэтому N_g^G можно обратить, вообще говоря, только на некотором инвариантном подпространстве $T_g(G[x])$, для чего нужно изучить ядро и образ N_g^G. Оказывается, эти подпространства описываются удобно посредством ϕ_ω и левого действия (8).

Очевидно, что $\ker N_g^G = dR_g \ker \Omega_e$, и ввиду коциклического соотношения $\mathfrak{g}_0 \equiv \ker \Omega_e$ является подалгеброй $\mathfrak{g}$. (Как обычно, R_h означает правый сдвиг на группе: $R_h g = gh$). Пусть G_0 – связная подгруппа группы G с алгеброй $\mathfrak{g}_0$, а $i: G_0 \to G$ каноническое вложение. Положим

$$\hat{\phi}_\omega = [di]^* \circ \phi_\omega \circ i, \tag{9}$$

Тогда $\hat{\phi}_\omega$ является $Ad^*(g^{-1})$ –коциклом для G_0 и определяемое им левое действие $\hat{\mathcal{Z}}_h$ обладает свойством, см. /6/:

$$\hat{\mathcal{Z}}_h \circ [di]^* = [di]^* \circ \mathcal{Z}_{i(h)}, \quad h \in G_0. \tag{10}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать следующий результат, см. /6/.

<u>Теорема 2</u>

А) $\ker \Omega_g \cap \operatorname{im} N_g^G$ натягивается правоинвариантными полями ξ_g^r ($\xi_g^r \equiv dR_g \xi$), такими, что ξ принадлежит алгебре группы изотропии

$$H_q = \{k,\ k \in G_0,\ \hat{\mathcal{Z}}_k [di]^* q = [di]^* q\}, \quad q = \phi_\omega(g). \tag{11}$$

Б) Подпространство $\operatorname{im} N_g^G$ натягивается векторами, лежащими в ядре отображения $[di]^* \circ d\phi_\omega|_g$:

$$\operatorname{im} N_g^G = \ker [di]^* \circ d\phi_\omega|_g, \tag{12}$$

или, другими словами, интегральные многообразия распределения $g \mapsto \operatorname{im} N_g^G$ суть поверхности уровня отображения $[di]^* \circ \phi_\omega$.

Применим теорему для нашего конкретного случая. Отображение моментов ϕ_ω для $\omega_e = i\frac{\partial}{\partial x}$ было вычислено в /6/ (впрочем, это легко сделать и непосредственно), оно имеет вид

$$\phi_\omega(g) = -i(\partial_x g)g^{-1}. \tag{13}$$

Тогда левое действие $\mathcal{Z}_h$ есть не что иное, как так называемое калибровочное действие, см. /1/,

$$\mathcal{Z}_h q = hqh^{-1} - ih_x h^{-1}. \tag{14}$$

Из теоремы 2 с учетом того, что $[di]\xi = (1-\pi_0)\xi$ (напомним, что $1-\pi_0$ есть проекция на подалгебру Картана $\mathfrak{h}$.), можно получить

$$\ker N_g^G \oplus \operatorname{im} N_g^G = T_g(G[x]),$$
$$\ker N_g^G = \ker \Omega_g, \quad \operatorname{im} N_g^G = \{\xi_g^r : (1-\pi_0)(i\xi_x + [q,\xi]) = 0\}. \tag{15}$$

Отсюда видно, что если ϕ_ω^{-1} определено корректно на $\mathcal{M}_0 = \{q : q \in \mathfrak{g}[x],\ (1-\pi_0)q = 0\}$, то $\phi_\omega^{-1}(\mathcal{M}_0)$ является интегральным подмногообразием для $\operatorname{im} N_g^G$, и на нем можно построить $(N^G)^{-1}$. Однако рассмотрение только таких групповых элементов $g(x)$, для которых $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = e$, мешает выполнению этой программы, так как если $q \in \mathcal{M}_0$, то $g = \phi_\omega^{-1}(q)$ должно находиться как решение дифференциального уравнения:

$$i g_x + q g = 0. \tag{16}$$

Если потребовать, чтобы $g(+\infty) = e$, это будет как раз решением Йоста ψ_0 для обобщенной задачи Захарова-Шабата, см. /4/, и в общем случае $g(-\infty) \neq e$. Поэтому желательно расширить группу таким образом, чтобы ψ_0 тоже был групповым элементом.

Определим группу $G^c[x]$ как совокупность функций $g(x): \mathbb{R} \to G$, которые удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$g(+\infty) = e, \quad g(-\infty) = \exp H_g, \quad H_g = const, \quad H_g \in \mathfrak{h}, \tag{17}$$

(сравни с /3/, формула (17)).

Будем считать, что g стремится к пределам (17) достаточно быстро, так что алгебра этой группы – $\mathfrak{g}^c[x]$ состоит из функций $\xi\ \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\xi(+\infty) = 0, \quad \xi(-\infty) \in \mathfrak{h}. \tag{18}$$

Однако рассмотрение группы $G^c[x]$ сразу приводит к существенным трудностям, так как определенные ранее структуры не продолжаются на $G^c[x]$ (и на $\mathfrak{g}^c[x]$). Действительно, легко видеть, что хотя форма ω_e определена корректно и на $\mathfrak{g}^c[x]$:

$$\omega_e(\xi,\eta) = i\langle\langle \xi_x, \eta \rangle\rangle, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}^c[x], \tag{19}$$

тем не менее она уже не антисимметрична и не выполняется коциклическое соотношение (3)[ж)]. Тем не менее, так как ω_e определена хорошо на подалгебре $\mathfrak{g}[x] \subset \mathfrak{g}^c[x]$, которая лежит всюду плотно в $\mathfrak{g}^c[x]$, мы попрежнему будем считать что ω определена на $G^c[x]$, тем более что в конечном счете **определяющим** окажется существование ω не на всей группе $G^c[x]$, а только на некотором подмногообразии

$$\mathcal{M}_0^G \equiv \phi_\omega^{-1}(\mathcal{M}_0) \subset G^c[x]. \tag{20}$$

Очевидно, многообразие $\mathcal{M}_0^G$ есть совокупность функций Йоста, отвеча-

ж) Форма Ω продолжается на $G^c[x]$ тривиально.

щих потенциалам $q \in \mathcal{M}_0$, и оно диффеоморфно $\mathcal{M}_0$. Найдем для начала касательное пространство $T_g(\mathcal{M}_0^G)$. Согласно (6) имеем

$$d\phi_\omega(\xi_g^r) = -Ad^*(g^{-1})\,\omega_2\, Ad(g^{-1})\xi, \tag{21}$$

и учитывая, что ввиду полупростоты группы $Ad^*(g^{-1}) \sim Ad(g)$, получаем:

$$d\phi_\omega(\xi_g^r) = -(i\xi_x + [q,\xi]), \quad q = \phi_\omega(g). \tag{22}$$

Поэтому $d\phi_\omega(\xi_g^r) \in T_q(\mathcal{M}_0)$ равносильно условию $(1-\pi_0)\,d\phi_\omega(\xi_g^r)=0$ (ср. с (I5)). Следовательно, учитывая ограничение, которое мы наложили на кокасательные векторы (см. /3/, формула (38)), имеем

$$\begin{gathered}\xi_g^r \in T_g(\mathcal{M}_0^G) \Leftrightarrow (1-\pi_0)\xi = \int_{-\infty}^{x}(1-\pi_0)[q,\xi]\,dy, \\ \xi \in \mathcal{G}[x], \quad q = \phi_\omega(g).\end{gathered} \tag{23}$$

Теперь нетрудно видеть, что, как и прежде,

$$T_g(G^c[x]) = \ker \Omega_g \oplus T_g(\mathcal{M}_0^G), \tag{24}$$

т.е. подмногообразие $\mathcal{M}_0^G$ трансверсально к слоению, заданному распределением $g \mapsto \ker \Omega_g$. Как хорошо известно, интегральными многообразиями этого распределения являются правые классы смежности по связной подгруппе G_0 с алгеброй $\mathcal{G}_0 = \ker \Omega_e$. Очевидно,

$$\ker \Omega_e = \{\xi : \xi \in \mathcal{G}^c[x], \ \pi_0\xi = 0\} \equiv h^c[x], \tag{25}$$

т.е. $h^c[x]$ состоит из функций, принимающих значения в подалгебре Картана h, которые на $+\infty$ быстро стремятся к нулю, а на $-\infty$ – к константе. Тогда

$$G_0 = \{\exp\xi, \ \xi \in h^c[x]\}. \tag{26}$$

$\mathcal{M}_0^G$ обладает еще одним замечательным свойством: оно пересекается с каждым классом смежности не более одного раза. Действительно, допустим, что g и kg ($k = \exp\beta$, $\beta \in h^c[x]$) принадлежат $\mathcal{M}_0^G$. Имеем

$$(1-\pi_0)\phi_\omega(kg) = -i(1-\pi_0)[k_x k + k(g_x g^{-1})k^{-1}] = i\beta_x = 0. \tag{27}$$

Учитывая граничное условие $\beta(+\infty)=0$, получаем, что $\beta = 0$, $k = e$.

Объединяя сказанное, сформулируем следующее

Предложение I

Подмногообразие $\mathcal{M}_0^G$ трансверсально к слоям G_g (к классам смежности) и пересекается с каждым из них не более одного раза. Проектор, проектирующий на $T_g(\mathcal{M}_0^G)$, имеет вид

$$\Pi_g = dR_g\{1 + i(1-\pi_0)\int_{-\infty}^{x} dy\,[\phi_\omega(g), \cdot\,]\}\,\pi_0 \circ dR_g^{-1}. \tag{28}$$

Учитывая вид этого проектора, определим на $\mathcal{M}_0^G$ тензорные поля $\bar{N}^G$ и Q^G:

$$Q^G \equiv dR_g\{ad_J^{-1} + i(1-\pi_0)\int_{-\infty}^{x} dy\,[\phi_\omega(g), ad_J^{-1}\,\cdot\,]\}\,\pi_0\, dR_g^{-1}, \tag{29}$$

$$\bar{N}^G \equiv Q^G \circ \omega. \tag{30}$$

Нетрудно заметить, что Q^G сконструировано так, чтобы его образ принадлежал $T_g(\mathcal{M}_0^G)$, а оператор $\bar{N}^G$ по существу обратен к N^G на $T_g(\mathcal{M}_0^G)$.

Имеет место следующее утверждение, связывающее тензоры $\bar{N}^G$ и Q^G с тензорами $N = \Lambda_x^*$ и $Q = ad_J$ на $\mathcal{M}_0$, см. /3/.

Предложение 2

Тензоры Q^G и $N^2 Q$ и соответственно тензоры N^G и N ϕ_ω-связаны, т.е.

$$d\phi_\omega \circ \bar{N}^G \circ d\phi_\omega^{-1} = N, \tag{31}$$

$$d\phi_\omega \circ Q^G \circ d\phi_\omega^* = N^2 Q. \tag{32}$$

Доказательство этого утверждения проводится прямым вычислением. Кроме того, как мы уже отмечали, учитывая результат теоремы 2 и то, что $N \sim P^0(Q^0)^{-1}$, его можно было ожидать заранее.

Далее, ясно, что $\bar{N}^G$ и Q^G задают на $\mathcal{M}_0^G$ $(P\text{-}N)$-структуру. Отметим также сдвиг в иерархии $(P-N)$-структур – Q^G отвечает не Q, а $N^2 Q$.

Мы теперь воспользуемся предложением I, чтобы отобразить структуры с $\mathcal{M}_0^G$ на орбиту группы $G^c[x]$. Рассмотрим отображение ϕ_Ω: $\phi_\Omega(g) = Ad^*(g)J = Ad(g^{-1})J$. (Напомним, что J – регулярный элемент из подалгебры Картана $h \subset \mathcal{G}$, тот самый, что и в обобщенной задаче Захарова–Шабата (см. /3/, формула (2б)). При $g = \psi_0$, $\phi_\Omega(\psi_0) \equiv S(x)$ – потенциал обобщенной задачи Захарова–Шабата в полюсной калибровке, см. /3/, формула (5а). (Отображение $q \to \phi_\Omega \circ \phi_\omega^{-1}(q)$ сопоставляет потенциалу $q(x)$ потенциал $S(x)$). Как известно, ϕ_Ω является проекцией для слоения, заданного классами смежности по подгруппе G_0, т.е. ϕ_Ω отображает каждый класс смежности ровно в одну точку. Образ $G^c[x]$ при отображении ϕ_Ω будем называть орбитой и обозначать через $\mathcal{O}_J[x]$. Как легко видеть, $\mathcal{O}_J[x]$ состоит из функций f:

$R \to \mathcal{O}_J$, где $\mathcal{O}_J$ – классическая орбита элемента $J \in k$ под действием присоединенного представления. Кроме того, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = J$ (сравни с /3/, формула (I6)).

То обстоятельство, что M_0^G пересекается с каждым классом смежности не более одного раза, обеспечивает инъективность ϕ_ω на M_0^G. Поэтому на $\mathcal{O}_J[x]$ можно определить $(P\text{-}N)$-структуру следующим образом:

$$\tilde N \equiv d\phi_\Omega \circ \tilde N^G \circ d\phi_\Omega^{-1}, \tag{33}$$

$$\tilde Q \equiv d\phi_\Omega \circ Q^G \circ [d\phi_\Omega]^*. \tag{34}$$

Предложение 3

Имеют место соотношения:

$$\tilde N_s = Ad^*(g) \circ N_q \circ Ad^*(g^{-1}) = Ad(g^{-1}) \circ N_q \circ Ad(g), \tag{35}$$

$$\tilde Q_s = ad_s , \qquad s = \phi_\Omega(g), \quad q = \phi_\omega(g). \tag{36}$$

Доказательство. Действительно, $d\phi_\Omega|_g = Ad^*(g) \circ ad_J \circ dR_g^{-1}$.
Имея в виду (28), можно вычислить и $d\phi_\Omega^{-1}|_s$:

$$d\phi_\Omega|_{s = g^{-1}Jg} = dR_g \{ ad_J^{-1} \cdot + i(\theta - \pi_0) \int_{-\infty}^{x} dy\, [\phi_\omega(g), ad_J^{-1} \cdot] \} \circ Ad(g),$$

откуда сразу следует (35). Соотношение (36) доказывается аналогично, учитывая, что $Ad(g^{-1}) \circ ad_J \circ Ad(g) = ad_s$.

Из определений (33) и (34) теперь вытекает, что $\tilde N$ и $\tilde Q$ определяют на $\mathcal{O}_J[x]$ $(P\text{-}N)$-структуру и имеет место:

Следствие I

$$\tilde N = d(\phi_\Omega \circ \phi_\omega^{-1}) \circ N \circ d(\phi_\omega \circ \phi_\Omega^{-1}), \tag{37}$$

$$\tilde Q = ad_s = d(\phi_\Omega \circ \phi_\omega^{-1}) \circ N^2 Q \circ d(\phi_\Omega \circ \phi_\omega^{-1})^*. \tag{38}$$

Можно видеть, что $\tilde N_s^* = Ad(g^{-1}) \circ N_q^* \circ Ad(g)$, или, в других обозначениях, $\tilde\Lambda_\pm = Ad(\Psi_0^{-1}) \circ \Lambda_\pm \circ Ad(\Psi_0)$ – формула, через которую определялись порождающие операторы для задачи Захарова-Шабата в полюсной калибровке, см. /3/. Таким образом, именно описанная $(P\text{-}N)$-структура на $\mathcal{O}_J[x]$ обслуживает задачу в полюсной калибровке.

Ниже мы получим также известную связь между симплектическими формами на M_0 и $\mathcal{O}_J[x]$. Действительно, согласно общей теории иерархия симплектических форм на M_0 задается формулой $\Omega^{(m)} =$

$= ad_J^{-1} N^m, m = 0, \pm 1, ..$ а так как $N^* = ad_J^{-1} N\, ad_J$, из (35) следует, что $\tilde N^* = ad_s^{-1} \tilde N\, ad_s$. Поэтому иерархия симплектических форм на $\mathcal{O}_J[x]$ задается соответственно формулой $\tilde\Omega^{(m)} = ad_s^{-1} \tilde N^m$. Тогда соотношение (38) показывает, что

$$F^* \Omega^{(m)} = \tilde\Omega^{(m+2)}, \qquad F \equiv \phi_\omega^{-1} \circ \phi_\Omega . \tag{39}$$

Сравнение этой формулы с формулой (2I) из /3/ показывает, однако, что мы имеем совпадение с точностью до членов, содержащих интегралы движения. На самом деле это различие кажущееся. Нетрудно проверить, что ввиду наложенного нами дополнительного условия на ковекторы $\alpha \in T_q^*(M_0)$, $q = \phi_\omega(g)$, –

$$(\theta - \pi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_\omega(g), \alpha]\, dx = 0 , \tag{40}$$

эти дополнительные члены равны нулю. Итак, связь между $(P\text{-}N)$-структурами на M_0, M_0^G и $\mathcal{O}_J[x]$ описывается диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
(\ldots, Q^G, \tilde N^G Q^G, \ldots)\, M_0^G & \xrightarrow{\ id\ } & M_0^G\, (\ldots, Q^G, \tilde N^G Q^G, \ldots) \\
\downarrow \phi_\omega & & \downarrow \phi_\Omega \\
(\ldots, N^2 Q, N^3 Q, \ldots)\, M_0 & \xrightarrow{\ F^{-1}\ } & \mathcal{O}_J[x]\, (\ldots, \tilde Q, \tilde N \tilde Q, \ldots).
\end{array}$$

Для того, чтобы иметь полную геометрическую картину, надо показать, что НЭУ, связанные с задачей Захарова-Шабата в полюсной калибровке, см. /3/,

$$-i\, ad_s^{-1} S_t + \tilde\Lambda_\pm^m \tilde\pi_0 H = 0, \quad H \in h , \quad \tilde\pi_0 = ad_s^{-1} ad_s ; \quad n = 1, 2, \cdots , \tag{4I}$$

порождены фундаментальными полями $(P\text{-}N)$-структуры на $\mathcal{O}_J[x]$.

2. Фундаментальные поля $(P\text{-}N)$ – структур на многообразиях M_0, M_0^G и $\mathcal{O}_J[x]$

Ниже мы покажем, что введенные $(P\text{-}N)$-структуры на многообразиях M_0, M_0^G и $\mathcal{O}_J[x]$ инвариантны относительно действия конечномерной группы Ли, поэтому фундаментальные поля действия этой группы будут фундаментальными полями и для $(P\text{-}N)$-структур, а то, что отображения ϕ_ω и ϕ_Ω эквивариантны, позволяет работать только на одном из этих многообразий.

Введем на $G^c[x]$ диффеоморфизм:

$$F_H^G(g) = \exp H\, g\, \exp(-H), \quad H \in h. \tag{42}$$

Отметим, что хотя $H \notin h^c[x]$, тем не менее $G^c[x]$ инвариантна под действием F_H^G, так как сохраняются граничные условия (I7).

Аналогично определим на алгебре диффеоморфизм:

$$F_H^A(g) = Ad(\exp H)g, \quad g \in \mathfrak{g}^c[x]. \tag{43}$$

Несложно видеть, что таким образом определено действие группы

$$\mathcal{H} = \{\exp H,\ H \in h\} \tag{44}$$

на $G^c[x]$, $\mathfrak{g}^c[x]$, $\mathcal{O}_J[x]$ и что $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_0^G$ инвариантны относительно этого действия.

<u>Лемма I</u>. Отображения ϕ_ω и ϕ_Ω эквивариантны относительно действия $\mathcal{H}$, т.е. следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
G^c[x] \arrow[r, "F_H^G"] \arrow[d, "\phi_\omega,\ \phi_\Omega"'] & G^c[x] \arrow[d, "\phi_\omega,\ \phi_\Omega"] \\
\mathfrak{g}^c[x] \arrow[r, "F_H^A"'] & \mathfrak{g}^c[x]
\end{tikzcd} .$$

<u>Доказательство</u>. Докажем, например, эквивариантность ϕ_Ω:

$$\phi_\Omega(F_H^G(g)) = Ad^*(\exp H g \exp(-H))J = Ad^*(\exp -H)\, Ad^*(g)J =$$
$$= Ad(\exp H)\, Ad(g^{-1})J = F_H{}^A(\phi_\Omega(g)).$$

Теперь мы можем сформулировать следующее

<u>Предложение 3</u>. $(P\text{-}N)$-структуры на $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_0^G$ и $\mathcal{O}_J[x]$ инвариантны относительно действия $\mathcal{H}$.

<u>Доказательство</u>. Достаточно доказать инвариантность $(P\text{-}N)$-структуры на $\mathcal{M}_0^G$, ввиду эквивариантности ϕ_ω и ϕ_Ω то же самое будет иметь место и для $(P\text{-}N)$-структур на $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{O}_J[x]$. Мы проверим только инвариантность Q^G, инвариантность N^G устанавливается аналогично. Если через L_h и R_h обозначать левые и правые сдвиги на группе, то, как нетрудно убедиться,

$$dF_H^G|_g = dL_{F_H^G(g)} \circ Ad(\exp H) \circ dL_g^{-1} = dR_{F_H^G(g)} \circ Ad(\exp H) \circ dR_g^{-1}.$$

Поэтому

$$dF_H^G|_g \circ Q_g^G \circ (dF_H^G|_g)^* = dR_{F_H^G(g)} \circ Ad(\exp H)\Big[ad_J^{-1} + i(\theta - \pi_0)\int_{-x}^{x} dy\,[\phi_\omega(g), ad_J^{-1}\cdot]\Big] \circ$$
$$\circ\, \pi_0 \circ Ad(\exp(-H)) \circ dR^*_{F_H^G(g)} = dR_{F_H^G(g)}\Big[ad_J^{-1} + i(\theta - \pi_0)\int_{-x}^{x} dy\,[Ad(\exp H)\phi_\omega(g),$$
$$, ad_J^{-1}\cdot]\Big]\pi_0 \circ dR^*_{F_H^G(g)}.$$

Ввиду того, что $Ad(\exp H)\phi_\omega(g) = \phi_\omega(F_H^G(g))$, отсюда получаем

$$dF_H^G|_g \circ Q_g^G \circ (dF_H^G|_g)^* = Q^G_{F_H^G(g)},$$

т.е. Q^G действительно инвариантен.

<u>Следствие I</u>

Перечисленные ниже поля фундаментальны:

I) для $(P\text{-}N)$-структуры на $\mathcal{M}_0$: $g \to [H, g]$, $H \in h$;

2) для $(P\text{-}N)$-структуры на $\mathcal{M}_0^G$: $g \to H_g^r - H_g^l = Hg - gH$, $H \in h$;

3) для $(P\text{-}N)$-структуры на $\mathcal{O}_J[x]$: $S \to [H, S]$, $H \in h$.

Действительно, из предложения следует, что фундаментальные поля действия группы $\mathcal{H}$ будут фундаментальными и для $(P\text{-}N)$-структур. Для этих полей имеем

на алгебре: $\frac{d}{dt} Ad(\exp tH)g\,|_{t=0} = [H, g]$;

на группе: $\frac{d}{dt}(\exp(tH)\, g\, \exp(-tH))|_{t=0} = H_g^r - H_g^l$;

на орбите: $\frac{d}{dt} Ad(\exp tH)S\,|_{t=0} = [H, S]$.

<u>Следствие 2</u>

А. При любом $H \in h$ и целом n поля $\tilde{N}^n[H, S]$ находятся в инволюции на $\mathcal{O}_J[x]$.

Б. При любом $H \in h$ и целом n I-формы $(\tilde{N}^*)^n ad_S^{-1}[S, H] = \tilde{\Lambda}_\pm \tilde{\pi}_0 H$ находятся в инволюции на $\mathcal{O}_J[x]$, относительно целой иерархии симплектических форм: $\tilde{\Omega}^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\tilde{\Omega}^{(m)} = ad_S^{-1}\tilde{N}^m$.

В. Уравнения (4I) гамильтоновы относительно указанной иерархии симплектических форм.

Следствия I и 2 дают геометрическую интерпретацию тех результатов подхода порождающих операторов, которые связаны с задачей Захарова-Шабата в полюсной калибровке. НЗУ (4I)-это как раз те уравнения, которые решаются методом обратной задачи рассеяния при помощи $\mathcal{L}$, см. /4,3/.

Автор выражает благодарность В.Г.Маханькову за поддержку и интерес к работе, а также В.С.Герджикову и П.П.Кулишу за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. Наука, М., 1986.
2. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А.-ТМФ, 1979, т. 38, № 1, с. 26–35.
3. Яновски А.Б. ОИЯИ, Р5-87-333, Дубна, 1987.
4. Gerdjikov V.S.-Inv.Probl., 1986, v.2, p.51-74.
5. Magri F., Morosi C., Ragnisco O.-Comm.Math.Phys., 1985, v.99, p.115-140.
6. Magri F., Morosi C. Preprint Universita di Milano, Dipartamento di Matematica, Quaderno S/19, Milano, 1984.
7. Souriau J.M. Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 мая 1987 года.

Яновски А.Б. Р5-87-334

Геометрический смысл порождающих операторов для обобщенной задачи Захарова-Шабата. Полюсная калибровка

Порождающие операторы для обобщенной задачи Захарова-Шабата в полюсной калибровке ($\tilde{L}$) отождествлены с сопряженными операторами Нейнхейса для некоторой геометрической структуры – структуры Пуассона-Нейнхейса на многообразии потенциалов задачи $\tilde{L}$. Эта структура связана с аналогичными структурами на многообразии потенциалов задачи Захарова-Шабата в канонической калибровке (L) и на многообразии решений Йоста задачи L. Во всех этих случаях сконструирована алгебра из фундаментальных полей и таким образом дана геометрическая интерпретация многих замечательных фактов относительно нелинейных эволюционных уравнений, связанных с задачами L и $\tilde{L}$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой.

Yanovski A.B. P5-87-334

Geometrical Interpretation of the Generating Operators for Generalized Zakharov-Shabat System. Pole Gauge

The generating operators for generalized Zakharov-Shabat system in pole gauge ($\tilde{L}$) are identified with conjugated Nijenhuis operators for certain geometrical structure-Poisson-Nijenhuis structure defined on the manifold of potentials of $\tilde{L}$. This structure is connected with analogous structures on the manifold of potentials of the Zakharov-Shabat system in canonical gauge (L) and on the manifold of Jost solutions for L. In all these cases abelian subalgebras of fundamental fields are constructed thus giving a geometrical interpretation for most of famous facts concerning the sets of nonlinear evolution equations related with the systems L and $\tilde{L}$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987