сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-333

А.Б.Яновски

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОРОЖДАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЗАХАРОВА-ШАБАТА

Каноническая калибровка

1987

Введение

Подход, основанный на изучении порождающих операторов, занимает важное место в методе обратной задачи рассеяния (МОЗР), так как позволяет на единой основе описать многие важные свойства нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) солитонного типа, т.е. таких уравнений, которые можно записать в форме Лакса:

$$[L, M] = 0. \tag{I}$$

Здесь L и M - скалярные или матричные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от некоторого набора скалярных функций $q_i(x,t)$ - потенциалов и спектрального параметра λ. Указанный подход позволяет интерпретировать МОЗР как обобщенное преобразование Фурье, так как данные рассеяния для вспомогательной линейной задачи $L\psi = 0$ (в дальнейшем для краткости мы будем обозначать ее просто через L) являются коэффициентами в разложениях потенциалов по полному набору функций - так называемым "квадратам" решений ψ или присоединенным решениям. Порождающие операторы в этом случае выступают в роли аналогов оператора дифференцирования, так как присоединенные решения суть собственные функции для них, см. /I,3-4,II,I5-I6/.

В настоящей работе мы рассмотрим порождающие операторы $\Lambda_\pm$, связанные с линейной задачей Захарова-Шабата в так называемой канонической калибровке:

$$L_0\psi = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + q(x) - \lambda\sigma_3\right)\psi = 0,$$
$$q = \begin{pmatrix} 0 & q_+(x) \\ q_-(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2а}$$

и ее непосредственным обобщением на тот случай, когда коэффициенты в L принадлежат некоторой полупростой алгебре $\mathfrak{g}$:

$$L\psi = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + q(x) - \lambda J\right)\psi = 0,$$
$$q = \sum_{\alpha\in\Delta} q_\alpha(x)E_\alpha, \quad J = \sum_{j=1}^{r} a_j H_j, \quad a_j = const, \quad J\in\mathfrak{h}. \tag{2б}$$

Здесь $\{E_\alpha, H_j\}_{\alpha\in\Delta,\ 1\le j\le r}$ и Δ - соответственно базис Картана-Вейля и система корней алгебры $\mathfrak{g}$, r - ранг этой алгебры, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ -подалгебра Картана, а $J\in\mathfrak{h}$ - регулярный элемент. Для простоты будем предполагать, что скалярные функции $q_\pm(x)$ и $q_\alpha(x)$ являются функциями типа Шварца на $\mathbb{R}$, со значениями в $\mathbb{C}'$.

Известно, что при помощи задачи (2а) решается нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - 2\varphi|\varphi|^2 = 0, \qquad \varphi \equiv q_+ \equiv -q_-^* \tag{3}$$

см. /3/, а при помощи (2б)-уравнения типа n-волн. Список важных физических уравнений, решаемых при помощи линейных задач L_0 и L, легко можно продолжить, см. /5/.

С другой стороны, известно также, что уравнение (2а) эквивалентно уравнению для ферромагнетика Гейзенберга:

$$S_t = -\frac{1}{2i}[S, S_{xx}], \quad S(x,t)\in sl(2,\mathbb{C}), \quad S^2 = 1, \quad S^+ = S, \tag{4}$$

которое исследуется при помощи линейной задачи $\tilde{L}_0$, калибровочно-эквивалентной задаче L_0:

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_0\tilde{\psi} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - \lambda S(x)\right)\tilde{\psi} = 0, \\ &\tilde{\psi} = \psi_0^{-1}\psi, \quad S(x) = \psi_0^{-1}\sigma_3\psi_0, \end{aligned} \tag{5а}$$

см. /6/. Здесь ψ_0 - решение Йоста задачи L_0 при $\lambda = 0$, т.е. ψ_0 есть фундаментальное решение системы:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x} - q\right)\psi_0 = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\psi_0 = 1.$$

Аналогичное по своей структуре калибровочное преобразование переводит задачу L в задачу $\tilde{L}$:

$$\begin{aligned} &\tilde{L}\tilde{\psi} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - \lambda S(x)\right)\tilde{\psi} = 0, \\ &\tilde{\psi} = \psi_0^{-1}\psi, \quad S(x) = \psi_0^{-1}J\psi_0. \end{aligned} \tag{5б}$$

Системы (5а) и (5б) известны как системы Захарова-Шабата в полюсной калибровке.

Уравнения (3) и (4) были одним из первых примеров так называемых калибровочно-эквивалентных уравнений, т.е. уравнений для которых соответствующие пары операторов в представлении Лакса получаются калибровочным преобразованием:

$$L \to \tilde{L} = gLg^{-1}, \quad M \to \tilde{M} = gMg^{-1}, \quad g = g(x,t) \tag{6}$$

(В нашем случае $g = \psi_0^{-1}(x,t)$). Функция $g(x,t)$ должна принимать значения в некоторой группе Ли G, а коэффициенты операторов L и M должны принадлежать алгебре этой группы.

В последнее время подходу придается калибровочно-ковариантный вид /17-19/, что позволяет рассматривать одновременно НЭУ, связанные с задачами L и $\tilde{L}$. Принципиальным моментом здесь является возможность выразить порождающие операторы $\Lambda_\pm$ для систем $\tilde{L}_0$ и $\tilde{L}$ в терминах потенциала $S(x)$, только в этом случае можно эффективно пересчитать законы сохранения, симплектические структуры и т.д.

Надо отметить, что для получения порождающих операторов и для исследования свойств НЭУ, связанных с ними, существуют два настолько разных метода, что может создаться впечатление о двух разных теориях. В первом из них, назовем его для определенности аналитическим, основным инструментом являются спектральные разложения для операторов $\Lambda_\pm$, см. /14-16/. Этот подход является вполне строгим. Во втором подходе операторы $\Lambda_\pm$ рассматриваются как тензоры на фазовом пространстве потенциалов линейной задачи L - $\mathcal{M} = \{q\}$, обладающие специальными геометрическими свойствами. В этом методе часто используют геометрические конструкции, перенесенные с конечномерного случая, что не всегда вполне корректно. Таким образом, его можно рассматривать скорее как геометрическую интерпретацию аналитического метода.

Целью настоящей работы является геометрическое получение основных результатов аналитического метода для НЭУ, связанных с задачами L и $\tilde{L}$.

I. Теория порождающих операторов для систем L и $\tilde{L}$ - аналитический метод

Мы перечислим ниже основные результаты, полученные в рамках аналитического метода, чтобы иметь возможность сравнивать возможности двух методов.

Как уже упоминалось, в аналитическом методе порождающие операторы $\Lambda_\pm$ вводятся таким образом, чтобы присоединенные функции

$$\begin{aligned} &F_\rho = \{\pi_0 \chi^+ E_\alpha (\chi^+)^{-1}(x,\lambda),\ \pi_0 \chi^- E_{-\alpha}(\chi^-)^{-1}(x,\lambda),\ \alpha\in\Delta_+,\ \lambda\in\mathbb{R}\}, \\ &F_\sigma = \{\pi_0 \chi^+ E_{-\alpha}(\chi^+)^{-1}(x,\lambda),\ \pi_0 \chi^- E_\alpha(\chi^-)^{-1}(x,\lambda),\ \alpha\in\Delta_+,\ \lambda\in\mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{7}$$

были для них собственными. (Функции из F_ρ для оператора Λ_+, а функции из F_σ - для Λ_-).

В (7) через $\chi^{(\pm)}$ обозначены фундаментальные решения задачи (2б), аналитические в верхней (нижней) полуплоскости по λ, Δ_+ – система положительных корней относительно упорядочения: $\alpha > 0$, если $\alpha(J) > 0$, $\alpha \in \Delta$. Через π_0 здесь и ниже будем обозначать проекционный оператор на подпространство $\bar{g} \subset g$, натянутое на корневые векторы E_α. Как хорошо известно, $\bar{g}$ ортогонально подалгебре Картана относительно формы Киллинга $\langle x, y \rangle = \operatorname{tr} ad_x\, ad_y$ и $g = h \oplus \bar{g}$.

Порождающие операторы имеют вид

$$\Lambda_{\pm} Z = ad_J^{-1}\left(i\frac{\partial Z}{\partial x} + \pi_0[q, Z] + i\left[q, \int_{\pm\infty}^{x} (1-\pi_0)[q(y), Z(y)]\,dy\right]\right). \qquad (8)$$

(Предполагается, что $Z(x)$ есть функция, принимающая значения в $\bar{g}$, кроме этого мы используем стандартное обозначение $ad_J \equiv [J, X]$).
Наборы F_ρ и F_b при отсутствии дискретных собственных значений для задачи L (в случае существования конечного числа дискретных собственных значений конечной кратности к этим системам добавляется еще конечное число функций) полны в пространстве $\bar{g}[x]$, состоящем из функций типа Шварца, принимающих значения в $\bar{g}$. $F_{b,\rho}$ играют ключевую роль во всем аналитическом методе (подробнее см. /I5/).
Здесь мы ограничимся напоминанием основных результатов:

а) НЭУ, решаемые при помощи задачи L, имеют вид

$$i\, ad_J^{-1} q_t + \sum_{k=1}^{r} f_k(\Lambda_\pm)\, ad_J^{-1}[H_k, q] = 0, \qquad (9)$$

где $f_k(\Lambda_\pm)$ суть полиномы по $\Lambda_\pm$;

б) динамические бесконечномерные системы, задаваемые этими уравнениями, гамильтоновы относительно целой иерархии симплектических структур:

$$\Omega^{(m)}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle X(x), \Lambda^m ad_J^{-1} Y(x)\rangle\, dx, \quad X, Y \in \bar{g}[x], \qquad (10)$$
$$\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_+ + \Lambda_-), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

в) существуют r бесконечных серий законов сохранения для НЭУ (9), задаваемых порождающими функционалами $\Delta^{(s)(\pm)}(\lambda)$ (см. /I5/), которые аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскости по λ и при больших λ асимптотически совпадают:

$$\Delta^{(s)\pm}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k^{(s)} \lambda^{-k}, \quad |\lambda| \to \infty, \quad s = 1, 2, \dots r. \qquad (11)$$

$\Delta^{(s)(\pm)}(\lambda)$ связаны с разложениями Гаусса для матрицы перехода $T(\lambda)$ задачи L /I5/. В случае $g = sl(n, \mathbb{C})$ они совпадают с главными верхними (нижними) минорами $T(\lambda)$, которые, как хорошо известно /5/, порождают законы сохранения.

Кроме того, имеют место соотношения

$$d\Delta_k^{(s)} = i\,\Lambda_\pm^{k-1} ad_J^{-1}[H_s^\vee, q], \quad k = 1, 2, \dots, \qquad (12)$$

где через d обозначен дифференциал (производная Фреше) функционала $\Delta_k^{(s)}$, а обозначение $H_s^\vee$ означает, что векторы $\{H_s^\vee\}_1^r$ образуют в h базис, биортогональный к базису $\{H_s\}_1^r$ относительно формы Киллинга. Для пояснения формулы (I2) отметим еще следующее. Согласно определению производной Фреше в точке q, $d\Delta_k^{(s)}$ принадлежит пространству $\bar{g}[x]^*$ (как обычно, предполагается, что топология в пространстве $g[x]$ задана счетным набором полунорм и определяет равномерную сходимость на любом компакте). Вместе с $\bar{g}[x]$ в дальнейшем мы будем рассматривать и пространство $g[x]$, чьи элементы суть функции типа Шварца на $\mathbb{R}$ со значениями в g. Нетрудно видеть, что пространство $\bar{g}[x]$ (соответственно $g[x]$) можно естественно вложить в $\bar{g}[x]^*$ ($g[x]^*$) при помощи билинейной формы:

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle X(x), Y(x)\rangle, \qquad (13)$$

где через $\langle\, , \rangle$ обозначена форма Киллинга на g. Именно в этом смысле нужно понимать (I2), правая часть принадлежит $\bar{g}[x] \subset \bar{g}[x]^*$;

г) функционалы $\Delta_k^{(s)}$ находятся в инволюции относительно всех форм из иерархии $\Omega^{(m)}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и линейные комбинации этих функционалов суть гамильтонианы уравнений (9).

Для калибровочно-эквивалентной системы (5б) можно развить аналогичную теорию. В этом случае операторы $\tilde{\Lambda}_+$ и $\tilde{\Lambda}_-$ **должны вводиться** таким образом, чтобы присоединенные функции

$$\tilde{F}_\rho = \{\tilde{\pi}_0 \tilde{\chi}^+ E_\alpha (\tilde{\chi}^+)^{-1}(x, \lambda),\ \tilde{\pi}_0 \tilde{\chi}^- E_{-\alpha} (\tilde{\chi}^-)^{-1},\ \alpha \in \Delta_+,\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$
$$\tilde{F}_b = \{\tilde{\pi}_0 \tilde{\chi}^+ E_{-\alpha} (\tilde{\chi}^+)^{-1}(x, \lambda),\ \tilde{\pi}_0 \tilde{\chi}^- E_\alpha (\tilde{\chi}^-)^{-1},\ \alpha \in \Delta_+,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad (14)$$

были бы для них собственными. Здесь $\tilde{\chi}^\pm$ – фундаментальные аналитические по λ решения системы (5б), а $\tilde{\pi}_0$ – проектор на подпространство $\tilde{g}$, ортогональное к "подвижной" подалгебре Картана $\tilde{h} \equiv \ker ad_S$ относительно формы Киллинга. Наборы $\tilde{F}_\rho$ и $\tilde{F}_b$ полны в пространстве функций вида $\tilde{Y} = \psi_0^{-1} X \psi_0$, $X \in g[x]$.

Несложно видеть, что при этих условиях должно выполняться соотношение

$$\tilde{\Lambda}_{\pm} = Ad(\psi_0^{-1}) \circ \Lambda_{\pm} \circ Ad(\psi_0) . \qquad (15)$$

Однако, так как в нем $\tilde{\Lambda}_{\pm}$ выражено через q и ψ_0, его нельзя использовать непосредственно для тех целей, для которых строится порождающий оператор.

Сделаем еще одно важное замечание относительно НЭУ, связанных с задачей $\tilde{L}$. Корректная постановка вопроса об их нахождении должна включать также граничные условия для них. В случае уравнения (4) интересными с физической точки зрения являются граничные условия $\lim_{x \to \pm\infty} S(x) = \sigma_3$ /6/. Их естественное обобщение в случае задачи $\tilde{L}$ имеет вид

$$\lim_{x \to \pm\infty} S(x) = J . \qquad (16)$$

Чтобы обеспечить (16) приходится сужать фазовое пространство потенциалов и рассматривать только такие потенциалы q, для которых соответствующая функция Йоста удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \to -\infty} \psi_0(q) = \exp \sum_{k=1}^{r} \Delta_k^{(\pm)}(0) H_k . \qquad (17)$$

Мы будем обозначать многообразие таких потенциалов через $\mathcal{M}_0$.

Для НЭУ, связанных с задачей $\tilde{L}$, имеют место результаты, аналогичные результатам для НЭУ, связанных с задачей L:

$\tilde{а}$) класс уравнений, калибровочно-эквивалентных уравнениям (9), имеет вид

$$-i\, ad_S^{-1} S_t + \sum_{k=1}^{r} f_k(\tilde{\Lambda}_{\pm}) \tilde{\pi}_0 H_k = 0 ; \qquad (18)$$

$\tilde{б}$) уравнения (18) гамильтоновы относительно иерархии симплектических структур:

$$\tilde{\Omega}^{(m)} = \langle\langle \tilde{X}, \tilde{\Lambda}^m ad_S^{-1} \tilde{Y} \rangle\rangle , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$
$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_+ + \tilde{\Lambda}_-), \quad \tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathfrak{g}}[x] ; \qquad (19)$$

$\tilde{в}$) интегралы движения $\Delta_k^{(s)}$ суть интегралы движения и для уравнений (18), причем

$$d\Delta_k^{(m)}(S) = -i \tilde{\Lambda}^{m+1} \tilde{\pi}_0 H_k^{\vee} ; \qquad (20)$$

$\tilde{г}$) как и прежде, $\Delta_k^{(m)}(S)$ находятся в инволюции относительно иерархии симплектических форм (19).

Кроме результатов а) – г) важно отметить связь между иерархиями (10) и (19). Пусть F -отображение, обратное к отображению $q \to S(q)$, сопоставляющему потенциалу $q(x)$ из линейной задачи L потенциал $S(x)$ из линейной задачи $\tilde{L}$. Введем следующие обозначения: $\mathcal{D}(F)$ – дифференциал Фреше отображения F, $F^*\Omega^{(m)} \equiv \Omega^{(m)}(\mathcal{D}(F)\cdot, \mathcal{D}(F)\cdot)$. Тогда имеет место

$$F^*\Omega^{(m)} = \tilde{\Omega}^{(m+2)} - \frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^{r} \langle H_k, H_l \rangle \, d\Delta_l^{(m+1)} \wedge d\Delta_k(0) . \qquad (21)$$

В (21) через $\wedge$ обозначено внешнее произведение. Соотношение (21) было получено впервые в работе /7/ для $\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{C})$.

2. Структуры Пуассона-Нейнхейса на многообразиях (геометрический метод).

Начало геометрического метода было положено в работе Ф.Магри /21/, в которой было показано, что многие из фундаментальных свойств иерархии уравнения Кортевега–де Фриза можно объяснить, исходя из существования на пространстве потенциалов специальной геометрической структуры, которую в более поздних работах автор стал называть структурой Пуассона-Нейнхейса ($(P-N)$-структурой). Подход был обобщен и распространен на другие иерархии интегрируемых уравнений, а также изучались возможности редукции $(P-N)$-структур и механизмы их возникновения /22-24/.

Приведем некоторые результаты, нужные нам для дальнейшего, не останавливаясь на тех понятиях и теоремах, которые вводятся в обычных курсах дифференциальной геометрии.

Хорошо известно, что наличие симплектической формы (т.е. невырожденной, замкнутой 2-формы) достаточно для определения на многообразии скобки Пуассона и всей гамильтоновой динамики, см. /25/. Мы будем пользоваться и другим определением скобки Пуассона, через так называемый пуассонов тензор P. Пуассонов тензор на многообразии $\mathcal{M}$ есть поле линейных отображений $m \to P_m : T_m^*(\mathcal{M}) \to T_m(\mathcal{M})$ ($m \in \mathcal{M}$, $T_m(\mathcal{M})$ – касательное пространство в точке m, $T_m^*(\mathcal{M})$ -кокасательное пространство. Здесь и ниже мы будем считать все многообразия, поля и функции принадлежащими классу C^∞). Тензор P удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1) \; P^* = -P \quad \text{(антисимметричность)} \\ &2) \; [P, P]_S = 0 , \end{aligned} \qquad (22)$$

где через $[\;,\;]_S$ обозначена скобка Схоутена, см. /2,20/.

Можно показать /20/, что если на $\mathcal{M}$ задана пуассонова структура, то на нем корректно определена скобка Пуассона:

$\{\alpha,\beta\}_P = d\langle\alpha, P\beta\rangle$ — для замкнутых I-форм,

$\{f,g\}_P = \langle df, Pdg\rangle$ — для функций. (23)

Здесь через $\langle\,,\,\rangle$ обозначено естественное спаривание между $T^*_m(M)$ и $T_m(M)$.

В общем случае такая структура вырождена, т.е. $\ker P \neq \{0\}$. Однако в принципе ее можно ограничить на интегральные подмногообразия распределения $m \to im(P_m)$, где она невырождена.

Структуры пуассонова и симплектического многообразия в некотором смысле дуальны,так,как если ω - симплектическая форма, рассматриваемая как поле линейных отображений $m \to \omega_m : T_m(M) \to T^*_m(M)$ (именно так чаще всего мы будем понимать 2-формы), то $P_m = \omega_m^{-1}$ задает на M невырожденную пуассонову структуру.

Чтобы определить основную конструкцию,надо ввести еще определение тензора Нейнхейса см.[13]. Тензор Нейнхейса-это поле линейных отображений $m \to N_m: T_m(M) \to T_m(M)$, которое имеет нулевое кручение, т.е.

$$N^2[X,Y]^L + [NX,NY]^L - N([NX,Y]^L + [X,NY]^L), \qquad (24)$$

для любых векторных полей X и Y. (Мы обозначаем через $[X,Y]^L$ скобку Ли векторных полей).

Наконец, говорят,что на многообразии M задана $(P-N)$-структура[23], если на нем существуют одновременно P- и N-структуры, которые связаны друг с другом соотношениями:

1) $NP = PN^*$,

2) $PL_{NX}(\alpha) - PL_X(N^*\alpha) + L_{P\alpha}(N)X = 0$. (25)

(Второе из этих соотношений должно выполняться для любой I-формы α и любого векторного поля X). Здесь, как обычно, через L_X обозначена производная Ли вдоль векторного поля X.

Описанная структура выглядит слишком специфической, но на самом деле к ней можно прийти довольно естественным путем. В теории вполне интегрируемых бесконечномерных систем довольно часто встречаются так называемые совместные скобки Пуассона или,на геометрическом языке, пуассоновы тензоры P, Q, такие,что их сумма тоже является пуассоновым тензором. Для этого есть глубокие алгебраические причины, заложенные в самом представлении Лакса,см.[8-10]. Как нетрудно убедиться,для того, чтобы $P+Q$ снова был пуассоновым,необходимо и достаточно,чтобы $[P,Q]_S = 0$. В этом случае можно показать, что если существует Q^{-1}, то $N \equiv PQ^{-1}$ и Q задают $(P-N)$-структуру[2,23].

Приложения $(P-N)$-структур основаны на интересных свойствах их фундаментальных полей, т.е. полей X, для которых

$$L_X N = 0, \quad L_X P = 0. \qquad (26)$$

Имеет место следующий результат[23].

Теорема I. На $(P-N)$-многообразии M I-формы, удовлетворяющие условиям:

$$d\alpha = 0, \quad dN^*\alpha = 0, \qquad (27)$$

образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона, называемой алгеброй Ли фундаментальных форм - $X^*_N(M)$. Соответствующие векторные поля

$$X_\alpha \equiv P\alpha, \quad d\alpha = 0, \quad dN^*\alpha = 0 \qquad (28)$$

суть фундаментальные поля для $(P-N)$-структуры.Они образуют алгебру Ли - $X_{PN}(M)$, гомоморфную $X^*_N(M)$:

$$[X_\alpha, X_\beta]^L = P\{\alpha,\beta\}_P. \qquad (29)$$

Обе алгебры инвариантны относительно N и N^* соответственно, и N (N^*) коммутирует с Ли-алгебраической операцией:

$$N^*\{\alpha,\beta\}_P = \{N^*\alpha,\beta\}_P = \{\alpha, N^*\beta\}_P, \quad \alpha,\beta \in X^*_N(M) \qquad (30а)$$

$$N[X_\alpha,X_\beta]^L = [NX_\alpha, X_\beta]^L = [X_\alpha, NX_\beta]^L, \quad X_\alpha, X_\beta \in X_{PN}(M). \qquad (30б)$$

Следствие I. Если $\{\alpha,\beta\}_P = 0$, ($[X_\alpha,X_\beta]^L = 0$), то $\{N^{*k}\alpha,\beta\}_P = 0$, ($[N^kX_\alpha, X_\beta]^L = 0$) для любого натурального k.

Следствие 2. Поля N^kX_α гамильтоновы относительно целой иерархии P-структур.

Действительно, можно показать, что если M является $(P-N)$-многообразием (т.е. на нем имеется $P-N$ структура), то на нем существует на самом деле бесконечная иерархия $(P-N)$-структур, так как структуры (NP, N), (N^2P, N).... будут $(P-N)$-структурами[23]. Поэтому следствие получается из цепочки равенств

$$N^kX_\alpha = (N^kP)\alpha = (N^{k-1}P)N^*\alpha = \dots = P(N^*)^k\alpha. \qquad (31)$$

3. Связь порождающего оператора для обобщенной задачи Захарова-Шабата с теорией $(P\text{–}N)$-многообразий

Хорошо известно, что уравнения, решаемые при помощи задачи L, гамильтоновы относительно совместных пуассоновых структур, задаваемых на $\mathcal{M} = g[x]$ тензорами:

$$Q_q^0 = -ad_\xi J, \qquad (32)$$

$$P_q^0 = -ad_\xi q + i\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

см., например,[8,22].

В (32) $\xi \in T_q^*(\mathcal{M}) \sim g[x]^*$ и, допуская некоторую вольность, пространства $g[x]$ и $g[x]^*$ **отождествим** посредством билинейной формы $\langle\langle\, , \rangle\rangle$.

Если бы $(Q^0)^{-1}$ **существовал,** то согласно уже упомянутой конструкции можно было бы найти тензор Нейнхейса $N = P^0(Q^0)^{-1}$. Однако, как легко видеть, $\ker Q_q^0 \equiv h[x] \neq \{0\}$, и $h[x]$, как нетрудно видеть, состоит из функций типа Шварца со значениями в подалгебре Картана h. Поэтому, чтобы получить невырожденный тензор, нужно ограничить структуры на каком-либо интегральном подмногообразии распределения $q \to im(Q_q^0) = \bar{g}[x]$, например, на

$$\mathcal{M}_0 = \{q,\ (1-\pi_0)q = 0\} \subset \mathcal{M}. \qquad (33)$$

Мы будем считать, что $\mathcal{M}_0$ ограничено еще и условием (17), это не приводит к вырождению пуассоновой структуры на $\mathcal{M}_0$.

Вопрос о том, как ограничить на подмногообразие пуассонов тензор, рассматривался в[23] и решался для случая $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ (см.(33)), если $g = sl(2,\mathbb{C})$. Случай произвольной полупростой алгебры не требует сколь-либо больших усилий.

Действительно, имеет место следующий общий результат[23] относительно сужения пуассоновой структуры P^0, заданной на многообразии $\mathcal{M}$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ -подмногообразие. Обозначим через $X_P^*(\mathcal{M}_0)$ подпространство 1-форм α на $\mathcal{M}$, таких, что $P_m^0 \alpha_m \in di(T_m(\mathcal{M}_0)) \equiv im(di)$, где i - вложение $\mathcal{M}_0$ в $\mathcal{M}$. Далее, пусть $T_m^\perp(\mathcal{M}_0)$ - пространство 1-форм, которые обращаются в ноль на $T_m(\mathcal{M}_0)$. Пусть

$$X_{P^0}^*(\mathcal{M}_0)_m + T_m^\perp(\mathcal{M}_0) = T_m^*(\mathcal{M}), \quad m \in \mathcal{M}_0, \qquad (34а)$$

$$X_{P^0}^*(\mathcal{M}_0)_m \cap T_m^\perp(\mathcal{M}_0) \subset \ker P_m^0, \quad m \in \mathcal{M}_0. \qquad (34б)$$

Тогда на $\mathcal{M}_0$ существует единственный пуассонов тензор P, i-связанный с P^0 т.е.

$$P^0_{i(m)} = (di)_m \circ P_m \circ (di)_m^*, \quad m \in \mathcal{M}_0. \qquad (35)$$

Применяя эту теорему, для нашего случая имеем:

$$(X_{P^0}^*)_q = \{\alpha:\ i\partial_x\alpha + [q,\alpha] \in \bar{g}[x]\}, \qquad (36а)$$

$$T^\perp(\mathcal{M}_0)_q = h[x]. \qquad (36б)$$

Несложно видеть, что $(X_{P^0}^*)_q \cap T^\perp(\mathcal{M}_0)_q = \{0\}$, и поэтому второе условие теоремы 2 выполнено. Далее, из (36а) следует, что

$$(1-\pi_0)\alpha = i\int_{-\infty}^{x}(1-\pi_0)[q,\pi_0\alpha]\,dy + A(\alpha,q), \qquad (37)$$

где $A(\alpha,q)$ - некоторая константа по x, зависящая от α и q. Однако для того, чтобы обеспечить $\lim_{x\to\pm\infty}(1-\pi_0)\alpha = 0$, необходимо дополнительно потребовать

$$A(\alpha,q) = -i(1-\pi_0)\int_{-\infty}^{+\infty}[q,\alpha]\,dx = 0. \qquad (38)$$

Здесь уместно сделать следующее замечание. Условия, обеспечивающие существование пуассоновых или симплектических структур, встречаются в литературе довольно часто[12,23]. Видимо, затруднения **подобного рода** принципиальны в случае бесконечномерных многообразий. В частности, условие (38) обеспечивает однозначность $\partial_x^{-1}[q,\alpha]$. Оператор ∂_x, хотя и не имеет ядра на $g[x]$, без дополнительных условий не имел бы однозначного обратного оператора. Мы будем всегда предполагать, что если $\alpha \in T_q^*$, то (38) выполнено, это приводит к тому, что не только $(X_{P^0}^*)_q \cap T^\perp(\mathcal{M}_0)_q = \{0\}$, но даже

$$T_q^*(\mathcal{M}) = (X_{P^0}^*)_q \oplus T^\perp(\mathcal{M}_0)_q. \qquad (39)$$

Тогда из (35) легко определить **пуассонов** тензор P:

$$P\beta = i\partial_x\beta + \pi_0[q,\beta] + [q,\ i(1-\pi_0)\int_{\mp\infty}^{x}[q,\beta]\,dy]. \qquad (40)$$

(Ввиду условия (38), безразлично, какую нижнюю границу мы будем брать для интеграла: $+\infty$ или $-\infty$). Теперь мы можем без труда найти тензор Нейнхейса $N = P(Q^0)^{-1}$:

$$N = \left(i\partial_x + \pi_0 ad_q + i\,ad_q\,(1-\pi_0)\int_{-\infty}^{x} ad_q \cdot dy\right) \circ ad_J^{-1}, \qquad (41)$$

и тензоры Q^0 и N задают на $\mathcal{M}_0$ $(P\text{-}N)$-структуру. (В дальнейшем, для ограничения Q^0 на $\mathcal{M}_0$ мы будем писать Q вместо Q^0. Конечно, Q и Q^0 имеют одинаковый вид, однако Q в отличие от Q^0 невырожден, так как на $\mathcal{M}_0$ корректно определен оператор

ad_J^{-1}). Нетрудно вычислить на $\mathcal{M}_0$ оператор N^*, сопряженный к N:

$$N^* = (PQ^{-1})^* = Q^{-1}P = Q^{-1}(PQ^{-1})Q = Q^{-1}NQ. \qquad (42)$$

Сравнение показывает, что $N^* = \Lambda_\pm$. (Конечно, с учетом (38)).

Однако этот результат был бы неполным без конкретного знания фундаментальных полей (или хотя бы части их). В другой работе будет показано, что векторные поля:

$$X_H : q \to X_H(q) = [H, q], \quad H \in \mathfrak{h}, \qquad (43)$$

фундаментальны для $(P\text{-}N)$-структуры на $\mathcal{M}_0$. Очевидно, что соответствующие фундаментальные формы имеют вид

$$\alpha_H : q \to \alpha_H(q) = ad_J^{-1}[H, q], \quad H \in \mathfrak{h}. \qquad (44)$$

Более того, ввиду очевидного свойства

$$[X_{H_1}, X_{H_2}]^L(q) = X_{[H_2, H_1]}(q), \qquad (45)$$

если $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$, то поля X_{H_1} и X_{H_2} находятся в инволюции. Поэтому, применяя следствия I и 2 теоремы I, имеем:

<u>Предложение I</u>

I) Поля $N^n X_H$ находятся в инволюции при любом натуральном n и $H \in \mathfrak{h}$.

2) Формы $(N^*)^n \alpha_H = \Lambda_\pm^n ad_J^{-1}[H, q]$ находятся в инволюции при любом натуральном n и $H \in \mathfrak{h}$ относительно иерархии симплектических структур $\Omega^{(k)}(X, Y) = \langle\langle X, \Lambda^k ad_J^{-1} Y \rangle\rangle$, $k = 0, \pm 1, \dots$.

3) Уравнения $i\, ad_J^{-1} q_t + \Lambda_\pm^n ad_J^{-1}[H, q] = 0$ гамильтоновы относительно указанной иерархии симплектических структур.

Сравнение этого предложения с результатами аналитического метода а)-г) показывает, что мы имеем полное совпадение. Факт, что оператором $\Lambda_\pm$ генерируются не сами гамильтонианы $\Delta_k^{(s)}$, а их градиенты, несущественен. Действительно, учитывая, что $N^{*k}\alpha_H$ замкнуты, легко найти функционалы $\Delta_H^{(s)}$, такие, что

$$d\Delta_H^{(k)} = N^{*k}\alpha_H. \qquad (46)$$

Это несложно получить, например, по лемме Пуанкаре, согласно которой, если $\mathcal{M}_0$ односвязно, функция однозначно с точностью до константы восстанавливается по I-форме $N^*\alpha_H$, см./25/. Следовательно, имеем

$$\Delta_H^{(k)} = \int_0^1 d\zeta \langle\langle q, \Lambda_\pm^k(\tilde{q})\, ad_J^{-1}[H, \tilde{q}] \rangle\rangle + C, \quad \tilde{q} = \zeta q. \qquad (47)$$

Если учесть, что при $q \equiv 0$ мы должны иметь $\Delta_k^{(s)} = 0$, см./I5/, то очевидно:

$$\Delta_{H_s^\vee}^{(k)} = \Delta_s^k = \int_0^1 d\zeta \langle\langle q, \Lambda_\pm^k(\tilde{q})\, ad_J^{-1}[H_s^\vee, \tilde{q}] \rangle\rangle. \qquad (48)$$

Автор выражает благодарность В.Г.Маханькову за поддержку и интерес к работе, а также В.С. Герджикову и П.П.Кулишу за многочисленные полезные обсуждения.

<u>Литература</u>

I. Ред. Р.Буллаф, Ф.Кодри. Солитоны. Мир, Москва, I983.
2. Гельфанд П.М., Дорфман И.Я.-Функц. анализ и прилож., I980, т.I4, № 3, с.7I-74.
3. Гержиков В.С., Кулиш П.П.-Болгар.физ. ж., I978, т.5, № 4, с.337-349.
4. Гержиков В.С., Христов Е.Х.-Мат. заметки, I980, т.28, № 4, с.50I-5I2.
5. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.И. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Наука, Москва, I980.
6. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А.-ТМФ, I979, т.38, № I, с.26-35.
7. **Кулиш П.П., Рейман А.Г. Записки научных семинаров ЛОМИ, I978,** т.77, с.I34-I47.
8. Рейман А.Г. Записки научных семинаров ЛОМИ, I980, т.95, с.3-54.
9. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А.-ДАН СССР, I980, т.25I, №6, с.I3I0-I3I4.
I0. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. Наука, Москва, I986.
II. M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H.Segur. -Stud. Appl. Math., 1974, v.53, No.4, p.249-315.
I2. M.Adler -Inv. Math., 1979, v.50, p.219-248.
I3. A.Flölicher, A.Nijenhuis.-Nederl. Acad. Westench. Proc., 1965, v. 59A, p.338-359.
I4. V.S. Gerdjikov -Lett. Math. Phys., 1982, v.6, No.6, p.315-324.
I5. V.S.Gerdjikov -Inv. Problems, 1986, v.2, p.51-74.
I6. V.S.Gerdjikov, P.P.Kulish -Physica D, 1981, v.3D, No.3, p.549-564.
I7. V.S.Gerdjikov, A.B.Yanovski -Phys. Lett. A, 1984, v.103A, No.5, p.232-236.
I8. V.S.Gerdjikov, A.B.Yanovski -Phys.Lett. A, 1985, v.110 A, No.2. p.53-57.
I9. V.S.Gerdjikov, A.B.Yanovski -Comm.Math. Phys., 1986, v.103, p.549-568.
20. A.Lichnerowitch In:Lect. Notes in Math. v.570, Springer, New York, 1975.

21. F.Magri –J.Math. Phys., 1978, v.19,p.1156-1162,
22. F.Magri . In: Lect. Notes in Phys. v.120, Springer,New York, 1980.
23. F.Magri, C.Morosi.Preprint Universita di Milano, Dipartamento .di Matematica, Qnaderno S/19, Milano, 1984.
24. F.Magri, C.Morosi, O.Ragnisco –Comm. Math. Phys., 1985, v. 99, p.115-140.
25. J.M.Souriau. Structure des systèmes dynamiques. Dunod, Paris, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 мая 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Яновски А.Б.
Р5-87-333

Геометрический смысл порождающих операторов для обобщенной задачи Захарова-Шабата. Каноническая калибровка

Порождающие операторы $\Lambda_{\pm}$ для обобщенной задачи Захарова-Шабата (L) отождествлены с сопряженными операторами Нейнхейса для некоторой геометрической структуры - структуры Пуассона-Нейнхейса на многообразии потенциалов задачи L. Для этой структуры построена абелева алгебра из фундаментальных полей, которые дают геометрическую интерпретацию класса нелинейных эволюционных уравнений /НЭУ/, решаемых методом обратной задачи рассеяния при помощи L. Геометрическая точка зрения позволяет легко получить многие из замечательных свойств этих НЭУ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Yanovski A.B.
P5-87-333

Geometrical Interpretation of the Generating Operators for Generalized Zakharov-Shabat System. Canonical Gauge

The generating operators $\Lambda_{\pm}$ for generalized Zakharov-Shabat system (L) are identified with the conjugated Nijenhuis operators for certain geometrical structure-Poisson-Nijenhuis structure defined on the manifold of potentials of L. For this structure an abelian subalgebra of fundamental fields is constructed thus giving geometrical interpretation of the nonlinear evolution equations (NLEEs) for which inverse scattering method based on L is applicable. The geometrical viewpoint allows to recover easily most of the famous features of these NLEEs.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987