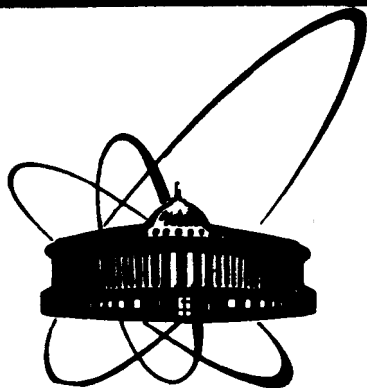


87-211



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P5-87-211

**Л.С.Давтян*, Л.Г.Мардоян*, Г.С.Погосян*,
А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян***

**ОБОБЩЕННОЕ $K\bar{S}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЕ:
ОТ 5-МЕРНОГО АТОМА ВОДОРОДА
К 8-МЕРНОМУ ИЗОТРОПНОМУ ОСЦИЛЛЯТОРУ**

Направлено в журнал "Journal of Physics A"

*Ереванский государственный университет

1987

Известно^{/1/}, что задача об атоме водорода может быть приведена к задаче о 4-мерном изотропном осцилляторе с помощью так называемого *KS* - преобразования. Означает ли это, что многие хорошо разработанные методы квантовой теории поля и ядерной физики смогут найти эффективное применение также при исследовании поведения водородоподобных атомов во внешних электрических и магнитных полях? Каковы взаимосвязи между группами динамической симметрии атома водорода и 4-мерного изотропного осциллятора? Каков явный вид преобразований, связывающих волновые функции атома водорода с волновыми функциями 4-осциллятора? Обобщается ли отмеченный выше факт на другие размерности, т.е. сводится ли f -мерный атом водорода к изотропному осциллятору какой-либо размерности? Относительно первого вопроса авторы работы^{/1/} высказываются оптимистически. Второй вопрос исследовался в работе^{/2/}, а третий был сформулирован и доведен до уровня, при котором возможно вычисление на ЭВМ в работе^{/3/} и затем решен точно, т.е. аналитическим путем, в работе^{/4/}. Прокомментируем теперь последний, четвертый, вопрос. При $f = 2$ переход от атома водорода к осциллятору осуществляется преобразованием $x = u_1^2 - u_2^2$, $y = 2u_1 u_2$. Здесь не возникает, как это имеет место при $f = 3$, необходимости повышать размерность пространства. Приведенный пример, как и *KS* - преобразование, относится к классу так называемых небиективных квадратичных преобразований, важнейшим свойством которых является выполнение тождества Эйлера

$$(u_1^2 + \dots + u_n^2)^2 = x_1^2 + \dots + x_f^2. \quad (I)$$

В нашем контексте x_i и u_k - это координаты, относящиеся к атому водорода и к изотропному осциллятору соответственно. Известно^{/5/}, что тождество (I) выполняется лишь для следующих четырех пар, составленных из индексов размерности пространств n и f :

$$(f, n) = (1, 1), (2, 2), (3, 4), (5, 8). \quad (2)$$

Парам (2,2) и (3,4) соответствуют преобразования, о которых говорилось выше. Возникает вопрос: переводит ли преобразование, связанное с парой (5,8), задачу о 5-мерном атоме водорода в задачу о 8-мерном изотропном осцилляторе? Настоящая статья дает положительный ответ на этот вопрос. Таким образом, за исключением пары (I,I), набор (2) полностью исчерпывает возможные небиективные квадратичные преобразования, переводящие водородную задачу в осцилляторную.

Введем небиективное квадратичное преобразование, связывающее координаты (x_1, \dots, x_5) пространства R^5 с координатами (u_1, \dots, u_8) пространства R^8

$$q_m = \sum_{j=1}^8 T_{mj} u_j, \quad (3)$$

где $\vec{q} = (x_1, \dots, x_5, 0, 0, 0)$, а T_{mj} имеет следующий вид:

$$T_{mj} = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 & u_4 & u_3 & u_6 & u_5 & -u_8 & -u_7 \\ u_4 & -u_3 & -u_2 & u_1 & u_8 & u_7 & u_6 & u_5 \\ u_6 & -u_5 & -u_8 & -u_7 & -u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_8 & u_7 & u_6 & -u_5 & -u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \\ u_1 & -u_2 & u_3 & -u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & -u_8 \\ u_3 & u_4 & -u_1 & -u_2 & u_7 & -u_8 & -u_5 & u_6 \\ u_5 & u_6 & -u_7 & u_8 & -u_1 & -u_2 & u_3 & -u_4 \\ u_7 & -u_8 & u_5 & u_6 & -u_3 & -u_4 & u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Матрица (4) отличается от известной в математике матрицы Келли^{5,6/} лишь определенной перестановкой строк. Из (3) и (4) следуют билинейные соотношения, связывающие координаты \vec{x} и \vec{u}

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(u_1 u_2 + u_3 u_4 + u_5 u_6 - u_7 u_8), \\ x_2 &= 2(u_1 u_4 - u_2 u_3 + u_5 u_8 + u_6 u_7), \end{aligned} \quad (5)$$

$$x_3 = 2(u_1 u_6 - u_2 u_5 - u_3 u_8 - u_4 u_7),$$

$$x_4 = 2(u_1 u_8 + u_2 u_7 + u_3 u_6 - u_4 u_5),$$

$$x_5 = u_1^2 + u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 - u_2^2 - u_4^2 - u_6^2 - u_8^2.$$

Подчеркнем, что каждому элементу в R^5 соответствует не один элемент, а целое множество элементов в R^8 , называемое слоем. В этом и состоит свойство небиективности преобразования $R^5 \leftarrow R^8$.

Пользуясь явным видом матрицы (4), легко показать, что

$$\sum_{j=1}^8 T_{mj} T_{nj} = u^2 \delta_{mn}, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^8 \frac{\partial T_{mj}}{\partial u_j} = 0, \quad (7)$$

где $u^2 \equiv u_1^2 + \dots + u_8^2$. Тождество Эйлера (I) имеет вид

$$x^2 \equiv x_1^2 + \dots + x_5^2 = u^4 \quad (8)$$

и проверяется с помощью формул (3) и (6), либо формул (5). Из (4) также следует, что

$$\frac{\partial x_m}{\partial u_j} = 2 T_{mj}. \quad (9)$$

В последней формуле индекс m пробегает значения 1, 2, ..., 5.

Займемся теперь преобразованием производных. Учитывая (9), получим

$$\frac{\partial F(u)}{\partial u_j} = 2 \sum_{k=1}^5 T_{kj} \frac{\partial F(u)}{\partial x_k}, \quad (10)$$

где $F(u)$ - произвольная функция от \vec{u} . Умножая (10) на T_{mj} , суммируя по j и имея в виду условие (6), легко показать, что

$$\frac{\partial F(u)}{\partial x_m} = \frac{1}{2u^2} \sum_{j=1}^8 T_{mj} \frac{\partial F(u)}{\partial u_j} \quad (11)$$

(напомним, что в (II) $m = 1, 2, \dots, 5$). Введем следующее обозначение:

$$\frac{\partial}{\partial q_m} \equiv \frac{1}{2u^2} \sum_{j=1}^8 T_{mj} \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad (I2)$$

где $m = 1, 2, \dots, 8$. Формула (I2) обобщает соотношение (II) на случай $m = 6, 7, 8$. Совершив в (II) обратное преобразование, с помощью (6) получим операторную формулу, обобщающую (I0):

$$\frac{\partial}{\partial u_j} = 2 \sum_{m=1}^8 T_{mj} \frac{\partial}{\partial q_m}. \quad (I3)$$

Рассмотрим вторые производные. Из (I2) следует, что

$$\sum_{m=1}^8 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial q_m^2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^8 \sum_{j=1}^8 \frac{\partial}{\partial q_m} \left[\frac{1}{u^2} T_{mj} \frac{\partial F(u)}{\partial u_j} \right]. \quad (I4)$$

Повторно применяя формулу (I2) и учитывая условие (6), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^8 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial q_m^2} &= \frac{1}{4u^2} \sum_{m=1}^8 \sum_{j=1}^8 \sum_{v=1}^8 T_{mv} \left(\frac{\partial}{\partial u_v} \frac{1}{u^2} T_{mj} \right) \frac{\partial F(u)}{\partial u_j} + \\ &+ \frac{1}{4u^2} \sum_{v=1}^8 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial u_v^2}. \end{aligned}$$

В первом члене можно провести дифференцирование по частям и воспользоваться условием (6) и затем тождеством (7), в результате, получим

$$\sum_{m=1}^8 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial q_m^2} = \frac{1}{4u^2} \sum_{v=1}^8 \frac{\partial^2 F(u)}{\partial u_v^2}. \quad (I5)$$

Соотношение (I5) вместе с тождеством (8) — это весь "математический арсенал", требующийся для преобразования гамильтониана 5-мерного атома водорода в гамильтониан 8-мерного изотропного осциллятора. Перед тем как заняться этим преобразованием, вернемся к формуле (I2).

Введем операторы

$$\hat{\mathcal{L}}_m = i u^2 \frac{\partial}{\partial q_m} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^8 T_{mj} \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (I6)$$

Из этого определения и формулы (9) следует, что

$$\hat{\mathcal{L}}_m x_k = i u^2 \delta_{mk} = 0,$$

т.к. $m = 6, 7, 8$, а $k = 1, 2, \dots, 5$. Таким образом, операторы (I6) не зависят от координат x_1, \dots, x_5 и поэтому для произвольной функции $F(x)$ справедливо тождество

$$\hat{\mathcal{L}}_m F(x) = 0. \quad (I7)$$

Исходя из формулы (I6) и матрицы (4), можно доказать, что операторы (I6) имеют следующий явный вид:

$$\hat{\mathcal{L}}_6 = \frac{i}{2} \left(u_5 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_3} - u_6 \frac{\partial}{\partial u_4} + u_7 \frac{\partial}{\partial u_5} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_6} - u_5 \frac{\partial}{\partial u_7} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_8} \right)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_7 = \frac{i}{2} \left(u_5 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_6 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_7 \frac{\partial}{\partial u_3} + u_8 \frac{\partial}{\partial u_4} - u_4 \frac{\partial}{\partial u_5} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_6} + u_5 \frac{\partial}{\partial u_7} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_8} \right)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_8 = \frac{i}{2} \left(u_7 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_8 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_5 \frac{\partial}{\partial u_3} + u_6 \frac{\partial}{\partial u_4} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_5} - u_4 \frac{\partial}{\partial u_6} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_7} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_8} \right)$$

Свяжем теперь задачу о 5-мерном атоме водорода с задачей о 8-мерном изотропном осцилляторе. Пусть (x_1, \dots, x_5) и (u_1, \dots, u_8) — декартовы координаты, относящиеся к первой и второй задаче. Из формулы (I5) с учетом (I6) следует, что лапласианы Δ_x и Δ_u связаны соотношением

$$\Delta_x = \frac{1}{4u^2} \Delta_u + \frac{1}{u^4} \hat{\mathcal{L}}^2, \quad (I8)$$

в котором оператор $\hat{\mathcal{L}}^2$ определяется как

$$\hat{\mathcal{L}}^2 = \hat{\mathcal{L}}_6^2 + \hat{\mathcal{L}}_7^2 + \hat{\mathcal{L}}_8^2. \quad (I9)$$

Соотношение (I8) и формулы (I7) и (I9) позволяют преобразовать уравнение Шредингера для 5-мерного атома водорода

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_x - \frac{e^2}{r}\right) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}) \quad (20)$$

к следующему виду:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_u - 4Eu^2\right) \psi(\vec{x}) = 4e^2 \psi(\vec{x}) \quad (21)$$

Сравним полученное уравнение с уравнением Шредингера для 8-мерного изотропного осциллятора

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_u + \frac{\mu\omega^2 u^2}{2}\right) \Phi(\vec{u}) = \epsilon \Phi(\vec{u}) \quad (22)$$

Уравнение (22) имеет физически допустимые решения, если выполняется условие

$$\frac{\epsilon}{\hbar\omega} - 4 = N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Из (23) следует, что при заданном ω квантуется ϵ (это стандартная ситуация), и, наоборот, при заданном ϵ квантуется частота ω . Функция $\psi(\vec{x})$ будет частным решением уравнения (22), удовлетворяющим тождеству

$$\hat{\mathcal{L}}_m \Phi(\vec{u}) = 0$$

если выполняются условия

$$\frac{\mu\omega^2}{2} = -4E, \quad 4e^2 = \epsilon. \quad (24)$$

Кроме того, из (5) следует, что $\psi(\vec{x})$ есть четная функция переменных u :

$$\psi(\vec{x}(\vec{u})) = \psi(\vec{x}(-\vec{u})).$$

Поэтому любое решение уравнения (20), $\psi(\vec{x})$ может быть разложено по полной системе четных решений $\Phi_{N\alpha}$ (α - остальные квантовые

числа) уравнения (22), т.е.

$$\psi_n(\vec{x}) = \sum_{\alpha} C_{n\alpha} \Phi_{N\alpha}(\vec{u}),$$

где

$$N = 2n. \quad (25)$$

Нетрудно убедиться, что n совпадает с главным квантовым числом 5-мерного атома водорода. Действительно, подставляя второе условие из (24) и (25) в (23), имеем

$$\omega_n = \frac{2e^2}{\hbar(n+2)}. \quad (26)$$

Таким образом, в нашем случае заданы величины ϵ и квантуется частота ω . Подставляя теперь (26) в первое условие (24), мы приходим к выражению, определяющему энергетический спектр 5-мерного атома водорода

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Возвратимся теперь к операторам (I6) и переобозначим их следующим образом:

$$\hat{j}_1 = \hat{\mathcal{L}}_6, \quad \hat{j}_2 = \hat{\mathcal{L}}_7, \quad \hat{j}_3 = \hat{\mathcal{L}}_8. \quad (27)$$

Пользуясь явным видом операторов $\hat{\mathcal{L}}_6$, $\hat{\mathcal{L}}_7$ и $\hat{\mathcal{L}}_8$, можно прямым вычислением доказать, что операторы (27) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\hat{j}_i \hat{j}_k - \hat{j}_k \hat{j}_i = i e_{ikm} \hat{j}_m,$$

в которых $i, k = 1, 2, 3$. Вычисления показывают, что операторы (27) коммутируют с гамильтонианом осциллятора

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_u + \frac{\mu\omega^2 u^2}{2}, \quad \hat{j}_i \hat{H}_0 - \hat{H}_0 \hat{j}_i = 0.$$

Таким образом, существуют состояния, в которых одновременно измеримы энергия осциллятора, проекция "момента" J_z и квадрат момента $J(J+1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kibler M., Negadi T. *Croatica Chemica Acta*, **CSASAA**, 57 (6), 1984, p. 1509.
2. Chen A.C., *J.Math.Phys.*, 23 (3), 1982.
3. Kibler M., Ronveaux A., Negadi T., *J.Math.Phys.*, 27 (6), 1986.
4. Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисякян А.Н., Тер-Антонян В.М., препринт ОИЯИ P2-86-43I, 1986.
5. Жевлаков К.А., Слинёко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным, Москва, 1978, Наука.
6. Lambert D., Kibler M., *LYSEN* 8667, Oct. 1986.

Рукопись поступила в редакционный отдел
3 апреля 1987 года.

Давтян Л.С. и др.

P5-87-211

Обобщенное KS-преобразование:
от 5-мерного атома водорода
к 8-мерному изотропному осциллятору

Показано, что небиективное квадратичное преобразование, генерируемое матрицей Кели, переводит задачу о 5-мерном атоме водорода в задачу о 8-мерном изотропном осцилляторе.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Davtyan L.S. et al.

P5-87-211

Generalised KS-transformation:
from 5-dimensional Hydrogen Atom
to 8-dimensional Isotope Oscillator

It is shown that non-bijective quadratic transformation generated by the Kelly matrix changes the problem of a 5-dimensional hydrogen atom into the problem of an 8-dimensional oscillator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987