сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-208

Л.А.Бордаг, А.В.Китаев

О СВЯЗИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

1987

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в работах, посвященных нелинейным эволюционным уравнениям (НЭУ), активно ведется исследование их автомодельных решений /1-15/. В частности, в работах /4-14/ методом инфинитезимальных преобразований получены многочисленные автомодельные подстановки для многомерных НЭУ, сводящие их к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Как правило, эти уравнения являются уравнениями типа Пенлеве. Изучение автомодельных решений представляется сейчас весьма актуальным по следующим причинам. Во-первых, сейчас имеется ряд работ, описывающих асимптотическое поведение решений уравнений Пенлеве /18,29/. Во-вторых, автомодельные решения позволяют получить для достаточно широкого множества решений НЭУ утверждения об их асимптотическом поведении /28/. Кроме того, использование связи уравнений Пенлеве и НЭУ позволяет получить для НЭУ частные классы автомодельных решений.

Остановимся кратко на содержании работы. В первом параграфе данной работы мы приведем необходимые формулы и получим преобразование Бэклунда (ПБ) для уравнения P_{34}. Во втором параграфе укажем, каким образом общее решение второго уравнения Пенлеве (P_2)* с произвольным параметром связано с цепочками Тода и Вольтерра. Тем самым мы обобщим результат Каметаки /19,20/, который обнаружил связь между известными рациональными решениями P_2 /31,32/ и рациональными решениями цепочки Тода. Здесь же приведем решения цепочки Тода, выражающиеся через функции Эйри. В третьем параграфе мы показываем, что при вырождении уравнения P_{34} его решения выражаются через $\wp$-функции Вейерштрасса, а преобразование Бэклунда переходит при этом в частный случай теоремы сложения для $\wp$-функций. Используя эти построения, получаем частные решения цепочки Тода, выражающиеся через $\wp$-функции. В четвертом параграфе мы получаем точное общее решение модели Лоренца при специальном выборе параметров, выражающееся

* Интересно заметить, что известна также связь пятого уравнения Пенлеве с цепочкой Тода/21/.

через общее решение P_2. В пятом параграфе мы обобщаем известные замены Луговцовых[33], Джонсона[23] и Смирнова[34], которые связывают уравнения КдВ и КП с их цилиндрическими аналогами. Из этих рассмотрений, в частности, следует, что сферическое уравнение КдВ становится вполне интегрируемым при добавлении к нему неоднородного члена. Здесь мы не выписываем автомодельных редукций НЭУ к уравнениям Пенлеве, но они без труда могут быть выписаны, если воспользоваться приведенными в параграфе формулами и соответствующими результатами для КдВ и КП[4,7].

I. Связь P_2 и P_{34}. Преобразование Бэклунда для P_{34}.

В работе нам конкретно потребуется связь уравнений P_2 и P_{34}. Хотя те или иные аспекты этой взаимосвязи уже обсуждались в литературе, мы считаем необходимым для лучшего понимания дальнейшего подробно остановиться на ней.

Рассмотрим уравнение P_{34} в виде

$$F_{xx} = \frac{F_x^2}{2F} + \alpha F^2 + \beta x F - \frac{c^2}{2F} \quad . \qquad (P_{34})$$

В классификации Пенлеве, приведенной Айнсом[30], это уравнение записано в виде

$$F_{xx} = \frac{F_x^2}{2F} + 4\alpha F^2 - x F - \frac{1}{2F} \quad .$$

Легко заметить, что при $\beta c \neq 0$ эти уравнения масштабным преобразованием переходят друг в друга, но для наших целей удобнее первая форма записи. Под уравнением P_2 мы будем понимать уравнение

$$u_{xx} = 2u^3 + \mu x u + \nu \, . \qquad (P_2)$$

При $\mu \neq 0$ его легко привести к стандартному виду с $\mu = 1$ при помощи масштабного преобразования. Все наши дальнейшие построения будут справедливы для любых значений параметров $\alpha, \beta, c, \mu, \nu$. При стандартном выборе параметров связь P_2 и P_{34} была указана в работах[30,16]. Здесь мы приведем эти формулы в модифицированном виде.

Пусть $F(x)$–решение уравнения P_{34}, тогда функция $u(x)$, построенная по формуле

$$u(x) = \delta_1 \frac{F_x}{F} + \delta_2 \frac{1}{F} , \qquad (I)$$

будет решением P_2 при $\mu = -\beta$,

$$\nu = \beta \delta_1 - \alpha \delta_2 \quad , \quad \delta_1^2 = \frac{1}{4} \quad , \quad \delta_2^2 = \frac{c^2}{4} \quad .$$

С другой стороны, имея решение P_2, мы можем по нему построить решение P_{34} по формуле

$$F(x) = \gamma \left(\varepsilon u_x + u^2 + \frac{\mu}{2} x\right), \qquad (2)$$

при этом

$$\alpha = \frac{2}{\gamma} \quad , \quad \beta = -\mu , \quad c^2 = \gamma^2 \left(\nu\varepsilon + \frac{\mu}{2}\right)^2 \quad , \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

Если в уравнении P_2 $\nu = 0$, то также будет справедлива формула

$$F(x) = \gamma u^2(x), \qquad (3)$$

причем здесь $\alpha = \frac{4}{\gamma}$, $\beta = 2\mu$, $c = 0$. Применим последовательно формулы (I) и (2), выбирая в (I) $\delta_1 = -\frac{\varepsilon}{2}$ и $\delta_2 = \mp \frac{\varepsilon c}{2}$ *), тогда придем к следующему утверждению.

<u>Утверждение</u>. Пусть $F_1(x)$ будет неким решением P_{34} при $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ и $c = c_1$, тогда функция $F_2(x)$

$$F_2(x) = \frac{1}{\alpha_2} \left(\left(\frac{F_{1x}(x) \pm c_1}{F_1(x)} \right)^2 - \alpha_1 F_1(x) - 2\beta_1 x \right) \qquad (4)$$

также будет решением P_{34} при $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_2$, $c = c_2$, где

$$\beta_1 = \beta_2 \quad , \quad \alpha_2 \neq 0, \quad (\alpha_2 c_2)^2 = (\alpha_1 c_1 \mp 2\beta_1)^2 \quad . \qquad (5)$$

Заметим, что это ПБ (4) для P_{34} можно было бы получить и из известного ПБ для P_2, но это значительно более громоздкая процедура.

Применим теперь последовательно преобразования (2) и (I), выбрав $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = \frac{\gamma}{2}(\nu_1 \varepsilon + \mu/2)$, получим подобным же образом ПБ для P_2

$$u_2(x) = \varepsilon u_1(x) + \frac{\nu_1 \varepsilon + \frac{\mu_1}{2}}{\varepsilon u_{1x}(x) + u_1^2(x) + \frac{\mu_1}{2} x} \qquad (6)$$

$$\mu_2 = \mu_1 \quad , \quad \nu_2 = -(\mu_1 + \nu_1 \varepsilon) .$$

Здесь $u_1(x)$ и $u_2(x)$–решения P_2 при параметрах, соответственно, μ_1, ν_1 и μ_2, ν_2. При $\mu_1 \neq 0$ эта формула эквивалентна приведенной в работе[35].

*) Если выбрать $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta_2 = \pm \frac{c\varepsilon}{2}$, то вместо выражения (4) получим $\alpha_2 F_2 = \alpha_1 F_1$, $\beta_1 = \beta_2$, $(\alpha_1 c_1)^2 = (\alpha_2 c_2)^2$.

Последовательно применяя формулы (3) и (I), получим, что уравнения

$$\tilde{u}_{xx} = \lambda_1 \tilde{u}^3 + \mu_1 x \tilde{u}$$

$$V_{xx} = 2V^3 - 2\mu_1 x + \mu_1 \varepsilon$$

связаны преобразованием

$$V(x) = \varepsilon \frac{\tilde{u}_x(x)}{\tilde{u}(x)} .$$

При $\lambda_1 \mu_1 \neq 0$ это выражение приведено в работе /36/. Применяя эти формулы в обратном порядке, получим, что

$$\tilde{u}(x) = \sqrt{(\varepsilon V_x(x) + V^2(x) + \frac{\mu_1}{2}x)/2} , \qquad (7)$$

здесь $\lambda_1 = 2$.

Совершенно так же, компонуя подстановки (2) и (3), мы можем получить подобные формулы для решений P_{34}. Действительно, пусть $F_1(x)$ – решение P_{34} с параметрами $\alpha_1 C_1 = \beta_1$, тогда

$$F_2(x) = \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{F_{1x}(x) + C_1}{F_1(x)}\right)^2 \qquad (8)$$

будет решением P_{34} с параметрами $C_2 = 0$, $\beta_2 = -2\beta_1$, α_2 – любое, отличное от нуля. Обратная формула имеет вид

$$F_1(x) = \frac{1}{\alpha_1}\left(\left(\sqrt{\alpha_2 F_2(x)}\right)_x + \frac{\alpha_2}{2}F_2(x) + \frac{\beta_2}{2}x\right) . \qquad (9)$$

Полученные здесь преобразования (7-9) ранее не выписывались и дополняют описанные в работе /16/.

2. Цепочки Тода и Вольтерра и уравнение P_2.

Зафиксируем произвольным образом параметры уравнения P_{34}; пусть $\alpha_0, \beta_0, C_0 \in \mathbb{C}$, соответствующее решение обозначим через $F_0(x)$. Теперь определим $F_n(x)$ следующим образом:

$$n \geq 0, \quad F_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+1}}\left(\frac{F_{n_x} + C_n}{F_n}\right)^2 - \alpha_n F_n - 2\beta_n x , \qquad (10)$$

где $\alpha_{n+1} C_{n+1} = \alpha_n C_n - 2\beta_0$, $\alpha_n \neq 0$ при $n \neq 0$

$$n \leq 0, \quad F_{n-1} = \frac{1}{\alpha_{n-1}}\left(\frac{F_{n_x} - C_n}{F_n}\right)^2 - \alpha_n F_n - 2\beta_n x , \qquad (11)$$

где $\alpha_{n-1} C_{n-1} = \alpha_n C_n + 2\beta_0$, $\alpha_n \neq 0$ при $n \neq 0$.

Оба выражения (10) и (11) справедливы для любых n, как это следует из результатов первого параграфа. Фиксируем произвольно n и вычтем из (10) выражение (11), тогда получим

$$4C_n F_{n_x} = F_n^2 (\alpha_{n+1} F_{n+1} - \alpha_{n-1} F_{n-1}) . \qquad (12)$$

Определим теперь функцию $\Psi_n(x)$ следующим образом:

$$\Psi_n(x, \alpha_n, C_n, \beta_0) = \alpha_n F_n(4C_n \alpha_n x, \alpha_n, C_n, \beta_0) .$$

Тогда (12) можно переписать так:

$$\Psi_{n_x} = \Psi_n^2 (\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}) .$$

Перейдя к функции $r_n(x) = \Psi_n(x)\Psi_{n-1}(x)$, получим стандартную запись цепочки Вольтерра

$$r_{n_x} = r_n(r_{n+1} - r_{n-1}) .$$

Покажем теперь, что описанную в первом параграфе связь уравнений P_2 и P_{34} можно рассматривать непосредственно как уравнения цепочки Тода. Действительно, определим $u_n(x)$ выражением

$$u_n(x) = \frac{1}{2}\frac{F_{n_x}(x) + C_n}{F_n(x)} ,$$

тогда, конечно, $u_n(x)$ будет решением P_2 при $\mu = -\beta_0$ и $\nu_n = \frac{1}{2}(\beta_0 - \alpha_n C_n)$. Определив теперь $v_n(x) = -2F_n(x)$, сразу получим систему уравнений

$$v_{n_x} = v_n(u_n - u_{n-1}) \qquad (13)$$

$$u_{n_x} = v_{n+1} - v_n ,$$

которая, как известно, эквивалентна цепочке Тода:

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = e^{y_{n+1} - y_n} - e^{y_n - y_{n-1}} ,$$

где $v_n = \exp(y_n - y_{n-1})$ и $u_n = y_{n_x}$.

Теперь мы можем легко построить частные классы решений цепочки Тода и Вольтерра, используя известные решения P_2 и P_{34}. Хорошо известно, что уравнение P_2 при $\mu = -1$ и $\nu = n \pm \frac{1}{2}$ имеет однопараметрическое семейство решений, выражающихся через функции Эйри. В работе /25/ была получена замкнутая формула для решений этого семейства. Выпишем здесь этот результат, так как эти формулы будут давать также и решение цепочки Тода.

Пусть в уравнении P_2 $\nu = n - \frac{1}{2}$ и $\beta = -1$. Тогда его решения, рационально выражающиеся через функции Эйри и их производные, будут иметь вид

$$u_0(x) = -u_1(x) = \frac{d}{dx}\ln v(x) \qquad (14)$$

$$u_n(x) = \frac{d}{dx}\ln\frac{\det B_{n-1}(-x(2)^{-1/3})}{\det B_n(-x(2)^{-1/3})},$$

где $B_n(x)$ – матрица с элементами

$$(B_n(x))_{m,2p-1} = \binom{m-1}{m-p} v^{(m-p)}(x), \quad m=1,2,\dots,n$$

$$(B_n(x))_{m,2p} = \binom{m-1}{m-p} v^{(m-p+1)}(x), \quad p=1,2,\dots,\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

$$v^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}v(x), \quad v^{(-k)}(x)=0, \quad k>0,$$

здесь $v(x)$ — некое решение уравнения Эйри

$$v''(x) - x\,v(x) = 0.$$

Соответствующее решение уравнения P_{34} будет иметь вид

$$F_n(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\ln \det B_n). \qquad (15)$$

Имея выражения (14) и (15), мы сразу получаем решения цепочки Тода (13), выражающиеся через функции Эйри. Действительно, u_n дается выражением (14) и $v_n = -2F_n$, где F_n определяется из (15). Заметим, что соответствующие автомодельные решения КдВ, МКдВ и цилиндрического уравнения КдВ были получены в работах /24,25/.

3. Связь ПБ для P_{34} с теоремой сложения для $\wp$-функций и частные решения нелинейных цепочек

Полученное в первом параграфе ПБ (4) справедливо для любых значений входящих в него параметров. Положим теперь в уравнении P_{34} параметр $\beta=0$, тогда P_{34} точно решается и его решениями будут $\wp$-функции Вейерштрасса следующего вида:

$$F(z) = \wp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\,z + c_2,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right), \qquad (16)$$

где c_1, c_2 – константы интегрирования. Инварианты g_2 и g_3 $\wp$-функции равны $g_2=c_1$ и $g_3 = -\frac{4c^2}{\alpha}$. ПБ (4) в этом случае перейдет в частный случай теоремы сложения для $\wp$-функций, а имен-

но в тот случай, когда к аргументу функции прибавляется ее нуль, т.е. (4) примет вид

$$\wp(z+u_0) = -\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \sqrt{-g_3}}{\wp(z)}\right)^2,$$

где $\wp(u_0)=0$ и $\wp'(u_0) = \sqrt{-g_3}$.

Заметим, что связь ПБ для нелинейного уравнения Шредингера с теоремой сложения для $\wp$-функций указывалась в работе /15/. Авторы отталкивались от ПБ для нелинейного эволюционного уравнения и использовали другой метод для перехода к теореме сложения. Факт связи ПБ для уравнений типа Пенлеве с теоремой сложения для $\wp$-функций Вейерштрасса является новым.

Построим теперь по решению (16) соответствующие решения цепочек Тода и Вольтерра. Действие ПБ(4) в этом случае сводится к прибавлению нуля к аргументу $\wp$-функции, поэтому $F_n(z)$ запишется так

$$F_n(z) = \wp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\,z + c^2 + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right).$$

Соответствующее решение цепочки Вольтерра будет иметь вид

$$r_n(z) = \alpha^2\wp\left(2c(\alpha)^{3/2}z + c_2 + nu_0, c_1, -\frac{4c^2}{\alpha}\right)\wp\left(2c(\alpha)^{3/2}z + c_2 + (n-1)u_0, c_1, -\frac{4c^2}{\alpha}\right).$$

Аналогично получим решение цепочки Тода (13):

$$u_n(z) = \pm\frac{\wp_z\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\,z + c_2 + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right) + c}{\wp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\,z + c_2 + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right)}$$

$$v_n(z) = -2\wp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\,z + nu_0,\ c_1,\ -\frac{4c^2}{\alpha}\right).$$

При определенном соотношении констант эти решения выражаются через элементарные трансцендентные функции. Пусть, например, $c_1 = \frac{6c^2}{\alpha}$, тогда $\wp$-функция, а с ней и решения цепочек выражаются через $sh\, z$ по следующей формуле:

$$\wp\left(z, \frac{6c^2}{\alpha}, -\frac{4c^2}{\alpha}\right) = \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\left(sh\left(\left(\frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\right)^{1/2}z\right)\right)^{-2},$$

при $c_1 = -\frac{6c^2}{\alpha}$ получим, что

$$\wp\left(z, -\frac{6c^2}{\alpha}, -\frac{4c^2}{\alpha}\right) = -\frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\left(\sin\left(\left(\frac{3c}{\sqrt{2\alpha}}\right)^{1/2}z\right)\right)^{-2}.$$

Приведенные нами решения, видимо, содержатся в общих конечнозонных решениях соответствующих цепочек, однако в таком виде не выписывались.

4. Модель Лоренца и уравнение P_2

В работе[37] в качестве модели, описывающей слабо турбулентное движение жидкости, была предложена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot X &= \sigma (Y - X) \\ \dot Y &= rX - Y - XZ \\ \dot Z &= -bZ + XY , \quad \text{где} \quad \sigma, r, b > 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь точкой обозначается дифференцирование по безразмерному времени t , σ - число Прандтля, r - отношение чисел Рэлея, b - геометрическая характеристика потока. Величина X пропорциональна интенсивности конвективного движения, Y - разности температур восходящих и нисходящих потоков, Z - отклонению вертикального температурного профиля от линейности.

Приближенное решение этой системы рассматривалось в работе[38] для произвольных σ, μ и $b \gg 1$. Качественное исследование этой системы проводилось и в работе[37]. Здесь мы покажем, что при $\sigma = 1$, $b = 2$, $r = \frac{1}{9}$ общее решение системы может быть выражено через решение P_2.

Положим $b = 2\sigma$, выразим из первого и второго уравнения Y и Z через X и подставим эти выражения в третье уравнение системы (17). После элементарных преобразований приведем это уравнение к виду

$$\frac{d}{dt} \ln \left((\ddot X + (1+\sigma)\dot X - \sigma(\mu-1)X + \tfrac{1}{2}X^3)/X \right) = -2\sigma .$$

Проинтегрировав один раз по t, приходим к

$$\ddot X + (1+\sigma)\dot X - \sigma(r-1)X + \tfrac{1}{2}X^3 = c_1 X e^{-2\sigma t}, \qquad c_1 - const.$$

Будем искать теперь решение этого уравнения в виде

$$x(t) = g(t) \cdot W(y(t)),$$

где функция W по y удовлетворяет уравнению P_2 при $\nu = 0$. Тогда сразу получаем, что $\sigma = 1$, $r = 1/9$ и функции $g(t)$ и $y(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} g(t) &= 2i \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, \exp\left(-\frac{2t}{3}\right), \\ y(t) &= -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, \exp\left(-\frac{2t}{3}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, мы получим выражение функции $X(t)$, а с ней и функций $Y(t)$, $Z(t)$ через общее решение P_2, с нулевым параметром ν :

$$\begin{aligned} X(t) &= 2i \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, \exp\left(-\frac{2t}{3}\right) W(y, c_2, c_3), \\ Y(t) &= 2i \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, \exp\left(-\frac{2t}{3}\right)\left(\frac{1}{3} W(y, c_2, c_3) + \sqrt[3]{\frac{2c_1}{3}}\, e^{-\frac{2t}{3}} W_y(y, c_2, c_3)\right), \\ Z(t) &= -\left(\frac{2c_1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{4t}{3}} \left(2W^2(y, c_2, c_3) + y\right), \end{aligned} \tag{19}$$

где $y = y(t)$ задается выражением (18), c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные. Формулы (19) дают решение системы Лоренца (17) для значений параметров $b = 2$, $\sigma = 1$, $r = 1/9$. Заметим, что уравнение P_2 при $\nu = 0$ имеет чисто мнимые решения, так что по формулам (19) мы можем построить вещественные решения системы (17).

5. Преобразования, связывающие уравнения КдВ и КП с цилиндрическими уравнениями КдВ и КП

В этом параграфе мы приведем ряд преобразований, обобщающих известные ранее[23,33,34]. Используя эти преобразования и известные автомодельные подстановки, нетрудно получить связь между исходными цилиндрическими уравнениями и уравнениями Пенлеве.

Рассмотрим уравнение

$$h_\beta + h h_\alpha + h_{\alpha\alpha\alpha} - \frac{a h}{\beta} = f(\alpha, \beta) \tag{20}$$

и исследуем, при каких a и $f(\alpha, \beta)$ это уравнение будет обладать Пенлеве свойством по Вайсу[27]. Повторяя рассуждения работы[17], нетрудно убедиться, что это уравнение обладает Пенлеве свойством и имеет пару Лакса*, только если $f(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha a(2a+1)}{\beta^2}$ для любого a.

Построим теперь для уравнения (20) с этой правой частью преобразование, связывающее его с КдВ. Пусть

$$h(\alpha,\beta)=\beta^{2a}u(x,t)-\frac{a\alpha}{\beta}, \tag{21}$$

где $x=\alpha\beta^a$, $t=\dfrac{\beta^{1+3a}}{1+3a}$, тогда $u(x,t)$ будет решением уравнения КдВ

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0.$$

Используя известную автомодельную подстановку /16/

$$u(x,t)=12\,(t-W(z)),\qquad z=x-6t^2,$$

мы приходим к уравнению P_1 для $W(z)$

$$W''=6W^2+z+c. \tag{P_1}$$

Суперпозиция этих подстановок позволяет перейти непосредственно от уравнения (20) к уравнению P_1 следующим образом:

$$h(\alpha,\beta)=12\beta^{2a}\left(\frac{\beta^{1+3a}}{1+3a}-W(z)\right)-\frac{a\alpha}{\beta},$$
$$z=\alpha\beta^a-\frac{6\beta^{2+6a}}{(1+3a)^2} \tag{22}$$

При $a=-\frac{1}{2}$ уравнение (20) представляет собой стандартную запись цилиндрического уравнения КдВ и преобразование (21) переходит в преобразование, предложенное в работе /33/. Уравнение (20) также просто связано с уравнением КП

$$v_{yy}+\partial_x(v_t+vv_x+v_{xxx})=0. \tag{23}$$

Действительно, будем искать преобразование в виде $v(x,y,t)=A(t)h(\alpha,\beta)+B(x,y,t)$, тогда сразу получаем, что

$$A(t)=T^2(t),\qquad \beta_t(x,y,t)=T^3(t),$$

$$\alpha(x,y,t)=T(t)x-\frac{1}{2}\left(T_t(t)+\frac{a}{\beta}T^4\right)y^2+r_1(t)y+r_0(t)$$

$$B(x,y,t)=-\frac{T_t(t)}{T(t)}x+\frac{1}{2}\left(\frac{T_{tt}(t)}{T}-2\left(\frac{T_t(t)}{T(t)}\right)^2-\frac{a(2a+1)}{\beta^2}T^6\right)y^2+b_1(t)y+b_0(t)$$

$$b_0(t)=-\frac{r_{0t}(t)}{T(t)}-\frac{r_1^2(t)}{T^2(t)},\quad b_1(t)=\frac{2r_1(t)T_t(t)}{T^2(t)}+\frac{2ar_1(t)T^2(t)}{\beta}-\frac{r_{1t}(t)}{T(t)},$$

где $T(t)$, $r_1(t)$ и $r_0(t)$ – произвольные функции t. При $T(t)=1$, $r_0(t)=r_1(t)=0$, $a=-\frac{1}{2}$. Это преобразование переходит в предложенное в работе /23/.

Аналогично мы можем построить преобразование, связывающее цилиндрическое уравнение КП вида

$$\frac{1}{4t^2}\tilde h_{\theta\theta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\tilde h_{\xi\xi\xi}+t^{(a-\frac{1}{2})}\tilde h\tilde h_\xi+\tilde h_\tau+\frac{a\tilde h}{\tau}\right)=0$$

с уравнением КП (23). Сделаем сначала простую подстановку

$$\tilde h(\xi,\theta,\tau)=t^{-(a-1/2)}q(\xi,\theta,\tau)$$

и перейдем к традиционной форме записи цилиндрического КП

$$\frac{1}{4t^2}q_{\theta\theta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(q_{\xi\xi\xi}+qq_\xi+q_\tau+\frac{q}{2\tau}\right)=0.$$

Так же как и прежде, будем искать $q(\xi,\theta,\tau)$ в виде $q(\xi,\theta,\tau)=A(\tau)v(x,y,t)+B(\xi,\theta,\tau)$, тогда получим, что

$$A(\tau)=T^2(\tau),\qquad t_\tau(\tau)=T^3(\tau),$$

$$x(\xi,\theta,\tau)=T(\tau)\xi-\tau(T(\tau)+2\tau T_\tau(\tau))\theta^2+r_1(\tau)\theta+r_0(\tau),$$

$$y(\theta,\tau)=2\delta\tau T^2(\tau)\theta+\delta\int^\tau\frac{r_1(\tau)T(\tau)}{\tau}d\tau,\quad \delta^2=1,$$

$$B(\xi,\theta,\tau)=b_1(\tau)\xi+b_2(\tau)\theta^2+b_3(\tau)\theta+b_4(\tau), \tag{24}$$

$$b_1(\tau)=-\frac{T_\tau(\tau)}{T(\tau)},$$

$$b_2(\tau)=-2\tau^2\left(b_1^2(\tau)+b_{1\tau}(\tau)+\frac{1}{2\tau}b_1(\tau)\right),$$

$$b_3(\tau)=-\frac{r_{1\tau}(\tau)}{T(\tau)}+\frac{r_1(\tau)}{\tau T^2(\tau)}\left(T(\tau)+2\tau T_\tau(\tau)\right),$$

$$b_4(\tau)=-\frac{r_{0\tau}(\tau)}{T(\tau)}-\frac{r_1^2(\tau)}{4\tau^2T^2(\tau)},$$

---

* В формулах (25) работы /17/ нужно положить $f(t)=t^{2a}$.

$T(\tau)$, $r_1(\tau)$, $r_0(\tau)$ – произвольные функции. Мы можем считать проведенное преобразование естественным обобщением преобразования, полученного в работе [34], так как выражения (24) переходят в приведенные там формулы при $T=1$, $r_0 = r_1 = 0$. Можно выбрать функции T, r_0 и r_1 и каким-либо иным образом и получить при этом ряд простых преобразований. Пусть, например, $T = \frac{1}{\tau}$, $r_1 = r_0 = 0$,

тогда

$$q(\xi,\theta,\tau) = \frac{1}{\tau^2}\, v\left(\frac{\xi}{\tau} + \theta,\ \frac{2\delta\theta}{\tau},\ -\frac{1}{2\tau^2}\right) + \frac{\xi}{\tau} - \theta^2,$$

либо, при $T = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$, $r_1, r_0 = 0$ получим, что

$$q(\xi,\theta,\tau) = \frac{1}{\tau}\, v\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}},\ 2\delta\theta,\ -\frac{2}{\sqrt{\tau}}\right) + \frac{\xi}{2\tau}.$$

Литература

1. Ablowitz M.J.,Ramani A.,Segur H. Lett.Nuovo Cimento,1978, v.23,p.333 .
2. Ablowitz M.J.,Segur H. Phys.Rev.Lett.,1977,38,N°20,p.1103.
3. Ablowitz M.J.,Ramani A.,Segur H. J.Math.Phys.,1980,21,N°4,p.715.
4. Kaliappan P.,Lakshmanan M. J.Phys.A,1979,12,N°10,P.L249 .
5. Johnson S.F.,Lonngren K.E.,Nicholson D.R. Phys.Lett.,1979, 74A,N°6,p.393 .
6. Tajiri M. J.Phys.Soc.Japan,1983,52,N°6,p.1908 .
7. Tajiri M.,Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1982,51,N°5,p.1678 .
8. Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1983,v.52,N°8,p.2613 .
9. Tajiri M.,Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1983,52,N°7,p.2315 .
10. Lakshmanan M.,Kaliappan P. J.Math.Phys.,1983,24,N°4,p.795 .
11. Kawamoto Sh. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°9,p.2922 .
12. Tajiri M. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°1,p.1 .
13. Nishitani T.,Tajiri M. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°1,p.79 .
14. Tajiri M.,Hagiwara M. J.Phys.Soc.Japan,1984,53,N°5,p.1634 .
15. Boiti M.,Pempinelli F. Il Nuovo Cimento,1980,59B,N°1,p.40 .
16. Fokas A,S.,Ablowitz M.J. J.Math.Phys.,1982,23,N°11,p.2033 .
17. Steeb W.-H.,Kloke M.,Spieker B.M.,Oevel W. J.Phys.A,1983, 16,P.L 447 .

18. Its A.R.,Novokshenov V.Ju. Lect.Notes in Math.,1986,1191 .
19. Kametaka Y. Proc.Japan Acad.,Ser.A,1983,59A,p.358 .
20. Kametaka Y. Proc.Japan Acad.,Ser.A,1983,59A,p.407 .
21. Jimbo M.,Miwa T. Physica D,1981,2,p.407 .
22. Gibbon J.D.,Tabor M. J.Math.Phys.,1985,26,N°8,p.1956 .
23. Johnson R.S. Phys.Lett.,1979,72A,p.197 .
24. Bordag L.A.,Matveev V.B. LPTHE 79/6,Paris,1979;Preprint KMU, Leipzig,1978 .
25. Bordag L.A. Preprint KMU-QFT 04/80,Leipzig KMU,1980 .
26. Lorenz E.N. Journ.of the Atmospheric Sciencies 1963,20.p.130 .
27. Weiss J.,Taber M.,Carnevale G. J.Math.Phys.,1983,24,N°3,p.522 .
28. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Матем.сборник, 1985, 126(168),№4, с.435.
29. Бордаг Л.А., Капаев А.А., Китаев А.В. ОИЯИ, Р5-86-679,Дубна,1986.
30. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.
31. Яблонский А.И. Весці АН БССР,сер. фіз.-тэхн. навук,1959.№3,с.30.
32. Воробьев А.П. Дифференц. уравнения, 1965, 1,№1, с.79.
33. Луговцов А.А., Луговцов Б.А. В кн.: Динамика непрерывной среды. т.1, Новосибирск: Наука, 1964, с.195.
34. Липовский В.Д., Матвеев В.Б., Смирнов А.О. В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. Зап.научн.семин.ЛОМИ АН СССР, 1986, т.150, с.120.
35. Лукашевич Н.А. Дифференц.уравнения,1971,7, №6, 1124.
36. Громак В.И. Дифференц. уравнения, 1982, 18, №5, с.753.
37. Марсден Дж.,Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980.
38. Sano O. Phys. Soc. Japan,1983,52,n.2,p.466.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1987 года.

Бордаг Л.А., Китаев А.В. P5-87-208

О связи второго уравнения Пенлеве с нелинейными эволюционными уравнениями

Рассмотрена связь уравнений Пенлеве P_2 и P_{34}, получено преобразование Бэклунда /ПБ/ для P_{34} и на основании этого указано, как общее решение P_2 связано с цепочками Тода и Вольтерра. Приведены решения этих цепочек, выражающиеся через функции Эйри. Показано, что при вырождении P_{34} его ПБ переходит в теорему сложения для $\wp$-функций Вейерштрасса, что позволяет получить решения цепочек, выражающиеся через $\wp$-функции. Найдено точное общее решение модели Лоренца при специальном выборе параметров, выражающееся через общее решение P_2. Приведены обобщения известных замен, связывающих уравнения КдВ и КП с их цилиндрическими аналогами.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Bordag L.A., Kitaev A.W. P5-87-208

On the Connection Between Second Painleve' Equation and Nonlinear Equations

The connection between Painleve' Eqs. P_2 and P_{34} is considered and the Bäcklund transformation (BT) for P_{34} which helps us to find interrelation between general solution of the P_2 Eq. and the Toda and Volterra lattice Eqs. are obtained. We present solutions of these lattice Eqs. expressed through Airy functions. For degenerated P_{34} the BT is simply one of relations for $\wp$-fucntions. It is shown that the exact general solution of the Lorenz model for special choice of parameters can be expressed through the general solution of P_2. Generalizations of the well known substitutions converting KdV and KP Eqs. into their cylindrical analogs are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automations, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987