объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-87-153

В.В.Пупышев

К ТЕОРИИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1987

§I. Введение

В настоящее время уравнения Л.Д.Фаддеева[I], записанные в координатном пространстве[2,3], интенсивно используются для исследования различных свойств систем из трех нерелятивистских частиц[4]. Это обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что существование и единственность решения таких уравнений установлены[5] для широкого класса парных потенциалов, в случае как нейтральных, так и заряженных частиц. Во-вторых, тем, что трехчастичные уравнения, записанные в координатном пространстве $R^6 = \{(\vec{x},\vec{y}): \vec{x},\vec{y} \in R^3\}$, после отделения четырех угловых переменных $(\hat{x},\hat{y})$ сводятся к системе интегродифференциальных уравнений[3] для неизвестных функций, зависящих лишь от двух переменных $(x,y) \in R^2_+ = \{(x,y): 0 \leqslant x, y \leqslant \infty\}$ или $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$ и $\varphi = arctg(y/x)$.

Нелокальные операторы $\hat{h}$, содержащиеся в таких уравнениях, представимы в виде интегралов по одной угловой переменной φ. Благодаря локальности всех остальных операторов, интегродифференциальные уравнения после дискретизации сводятся к системе линейных уравнений с ленточной матрицей[3,5-7]. Именно разряженность матрицы линейной задачи в сочетании с простыми граничными условиями и обусловливают практическое применение интегродифференциальных трехчастичных уравнений. Эффективность решения этих уравнений сеточными методами[3,6,7] существенно зависит от выбора узлов двумерной сетки. Такой выбор, т.е. построение оптимальной сетки, определяется качественным поведением искомых решений (парциальных компонент волновой функции). Знание аналитических свойств компонент, в первую очередь, их асимптотик на всех границах области R^2_+, особенно необходимо для решения задачи трех тел и другими способами: вариационными методами, методами, основанными на конечномерной аппроксимации компонент[8,9] или свободного трехчастичного гамильтониана H_0 [I0].

Исследование аналитических свойств парциальных компонент затруднено и тем, что они являются функциями двух переменных, и тем, что уравнения, которым они удовлетворяют, содержат нелокальные операторы $\hat{h}$.

По этим причинам представляется важным и вполне естественным следующий шаг редукции, намеченный в работе[8]. Он заключается в разделении двух оставшихся переменных ρ и φ разложением искомых решений по базисным функциями одной переменной. Оказывается, что в

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

качестве такого базиса удобно использовать собственные функции операторов $\hat{h}$. Исследование свойств этих операторов, установление связи между методом гипергармоник и интегродифференциальными уравнениями, а также регуляризация последних в особых точках угловой части свободного трехчастичного гамильтониана H_0 и составляет содержание настоящей работы.

§2. Операторы $\hat{h}$

Рассмотрим систему трех бесспиновых попарно взаимодействующих частиц. Пусть m_i -масса, а $\vec{r}_i$ -радиус-вектор i -й частицы в некоторой фиксированной декартовой системе координат $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, начало которой совпадает с центром масс трех частиц. В системе центра масс полная волновая функция Ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(H_0+\sum_{i=1}^{3} V_i - E)\Psi = 0 \qquad (1)$$

и зависит от шести переменных $(\vec{x},\vec{y})\in R^6$.
Удобно использовать три набора относительных координат /11/ Якоби

$$\vec{x}_k = (2m_i m_j/(m_i+m_j))^{1/2}(\vec{r}_j-\vec{r}_i),$$
$$\vec{y}_k = (2m_k(m_i+m_j)/M)^{1/2}((m_i\vec{r}_i+m_j\vec{r}_j)/(m_i+m_j)-\vec{r}_k). \qquad (2)$$

Различные ($i\neq k$) наборы координат (2) линейно зависимы /9/:

$$\begin{pmatrix}\vec{x}_k\\ \vec{y}_k\end{pmatrix} = -\cos\gamma_{ki}\begin{pmatrix}1 & -\varepsilon_{ki}\,tg\,\gamma_{ki}\\ \varepsilon_{ki}\,tg\,\gamma_{ki} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}_i\\ \vec{y}_i\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Значения углов $\gamma_{ki}\in[0,\pi/2]$ определяются лишь отношениями масс частиц

$$tg^2\gamma_{ki} = m_j M/m_k m_i = m_j/m_i + m_j/m_k + (m_j/m_i)(m_j/m_k) \qquad (4)$$

а числа ε_{ki} таковы: $\varepsilon_{ki}=-\varepsilon_{ik}=1$, $(ik)=(12),(31),(23)$. Так как преобразования (2), (3) линейные, то векторы $\vec{x}_i$, $\vec{y}_i$, $i=1,2,3$, лежат в плоскости P, проходящей через концы радиусов-векторов частиц. Метрика пространства R^6 или гиперрадиус $\rho=(x_i^2+y_i^2)^{1/2}$ и плоскость P инвариантны относительно преобразований (3). Следовательно, шестимерный гипермомент $\hat{K}$ /12/ и полный угловой момент L: $\hat{\vec{L}}=\hat{\vec{\lambda}}+\hat{\vec{\ell}}$, где $\hat{\vec{\lambda}}$ и $\hat{\vec{\ell}}$ -операторы угловых моментов, сопряженных с координатами $\vec{y}$ и $\vec{x}$ соответственно, являются сохраняющимися при преобразованиях (3) величинами.

В рамках необходимого для дальнейших исследований воспроизведем основные этапы /3/ вывода интегродифференциальных уравнений. Для отделения четырех угловых переменных $(\hat{x};\hat{y})=(\theta_x,\varphi_x;\theta_y,\varphi_y)$, где θ_a и φ_a -сферические углы вектора $\vec{a}$ в системе S, запишем волновую функцию в виде суммы /1/ $\Psi=\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3$ трех фаддеевских компонент $\Psi_i=-(H_0-E)^{-1}V_i\Psi$. Компоненты удовлетворяют системе уравнений

$$(H_0-E+V_i)\Psi_i = -V_i\sum_{k\neq i}\Psi_k, \quad i=1,2,3. \qquad (5)$$

Далее, каждую из компонент Ψ_i, $i=1,2,3$, запишем в ее собственном наборе относительных координат $(\vec{x}_i,\vec{y}_i)=(x_i,\hat{x}_i,y_i,\hat{y}_i)$ в виде разложения /3/

$$\Psi_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i)=\sum_{\alpha L}\Phi_i^{\alpha L}(x_i,y_i)(x_i y_i)^{-1}\,\mathcal{Y}_{\alpha}^{LM}(\hat{y}_i;\hat{x}_i) \qquad (6)$$

по бисферическим гармоникам /13/

$$\mathcal{Y}_{\alpha}^{LM}(\hat{y};\hat{x})=\sum_{m} C^{LM}_{\lambda m \ell n}\,Y_{\lambda m}(\hat{y})\,Y_{\ell n}(\hat{x}). \qquad (7)$$

Здесь $C^{c\gamma}_{a\alpha b\beta}$- коэффициенты Клебша–Гордана группы трехмерных вращений, $Y_{\lambda m}(\hat{a})$ - сферические функции, заданные на трехмерной сфере S_a единичного радиуса. Необходимо отметить, что выбор базиса в гильбертовом пространстве функций на четырехмерном торе $T_{yx}=S_y\otimes S_x$ в виде (7) продиктован соображениями удобства. Действительно, матрицы операторов H_0 и центральных $V_i(\vec{x}_i)=V_i(x_i)$ парных потенциалов диагональны в бисферическом базисе и равны

$$\langle \mathcal{Y}_{\alpha'}^{L'M'}(\hat{y}_i;\hat{x}_i)|H_0|\mathcal{Y}_{\alpha}^{LM}(\hat{y}_i;\hat{x}_i)\rangle = -\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{M'M}\delta_{L'L}(\vec{\nabla}^2_{x_i}+\vec{\nabla}^2_{y_i}),$$
$$\langle \mathcal{Y}_{\alpha'}^{L'M'}(\hat{y}_i;\hat{x}_i)|V_i|\mathcal{Y}_{\alpha}^{LM}(\hat{y}_i;\hat{x}_i)\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}\delta_{M'M}\delta_{L'L}\,V_i(x_i).$$

Компоненты Ψ_i в виде (6) подставим в систему (5), записав предварительно каждое ее уравнение в его собственном наборе координат (2). После проектирования на базисные функции (7) система уравнений (5) примет вид

$$[\hat{\Delta}^{\alpha}_{x_i y_i} - E + V_i(x_i)]\,\Phi_i^{\alpha L}(x_i,y_i) =$$
$$V_i(x_i)\sum_{k\neq i}\sum_{\alpha'}\langle x_i,y_i|\hat{h}^{L}_{\alpha\alpha'}|\Phi_k^{\alpha' L}(x_k,y_k)\rangle, \qquad (8)$$

где $i=1,2,3$, $\alpha=(\lambda,\ell)$, $\alpha'=(\lambda',\ell')$, $\vec{\lambda}+\vec{\ell}=\vec{L}=\vec{\lambda}'+\vec{\ell}'$,

а $\hat{\Delta}^{\alpha}_{xy}=\partial_x^2+\partial_y^2-\ell(\ell+1)/x^2-\lambda(\lambda+1)/y^2$ - сумма двумерного оператора Лапласа и центробежного потенциала. Искомые парциальные компоненты $\Phi_i^{\alpha L}(x_i,y_i)$ являются уже функциями двух переменных

$(x_i,y_i)\in R^2_+$ или $\rho=(x_i^2+y_i^2)^{1/2}$, $\varphi_i=\mathrm{arctg}\,y_i/x_i$, причем граничные условия [3,5] формулируются для каждой из этих функций в терминах ее аргументов. Последнее существенно упрощает численное решение систем интегродифференциальных уравнений (8).

Перейдем к исследованию свойств операторов $\hat h^L_{\alpha\alpha'}$. Для сокращения записи опустим всюду, где это возможно, индексы i, k, заменив последний "верхним" штрихом. Матричные элементы в правых частях (8) появляются естественным образом при переходе от базиса $|x',y',\mathcal{Y}^{LM}_{\alpha'}\rangle$ к базису $|x,y,\mathcal{Y}^{LM}_{\alpha}\rangle$. Они по определению равны интегралам

$$xy\int_{T_{yx}} d\hat x\, d\hat y\; \mathcal{Y}^{LM*}_{\alpha}(\hat y;\hat x)\,\mathcal{Y}^{LM}_{\alpha'}(\hat y';\hat x')\,\Phi^{\alpha' L}_{k}(x',y')/(x'y'), \qquad (9)$$

в которых x' и y', согласно равенствам (3), являются функциями переменных ρ, φ и $u=u_{xy}\equiv\cos(\hat{\vec x\vec y})$. Поэтому, используя стандартные методы [13], можно ввести новые независимые угловые координаты $w=\{w_1,w_2,w_3\}$, u и выполнить интегрирование по совокупности переменных w. В результате матричный элемент (9) запишется в виде однократного интеграла

$$\langle x,y|\hat h^L_{\alpha\alpha'}|\Phi^{\alpha' L}_{k}(x',y')\rangle=\int_{-1}^{1}du\; h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,u,\varepsilon\gamma)\,\Phi^{\alpha' L}_{k}(x',y'). \qquad (10)$$

Для вычисления ядер операторов $\hat h^L_{\alpha\alpha'}$ введем в пространстве R^3 новую систему декартовых координат $S'=\{\vec e_1{}',\vec e_2{}',\vec e_3{}'\}$, орты которой таковы, что $\vec e_1{}',\vec e_2{}'\in P$, $\vec e_3{}'\uparrow\uparrow\vec x$. Исходная система S получается вращением новой системы S'. Оно определяется [13] углами Эйлера $w=\{w_1,\ w_2=-\theta_x,\ w_3=-\varphi_x\}$, где w_1 –угол первого поворота вокруг оси $\vec e_3{}'$, после которого орт $\vec e_2{}'$ совмещается с нормалью к плоскости P. Векторы $\vec x,\vec y$ и $\vec x',\vec y'$ принадлежат плоскости P и поэтому имеют в системе S' нулевые азимутальные углы, а бисферические гармоники, содержащиеся в интеграле (9), представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{LM*}_{\alpha}(\hat y;\hat x)&=\sum_{N}\mathcal{D}^{L*}_{NM}(w)\,\mathcal{Y}^{LN*}_{\alpha}(\theta_{xy},0;0,0),\\ \mathcal{Y}^{LM}_{\alpha'}(\hat y';\hat x')&=\sum_{N'}\mathcal{D}^{L}_{N'M}(w)\,\mathcal{Y}^{LN'}_{\alpha'}(\theta_{xy'},0;\theta_{xx'},0).\end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь $\mathcal{D}$ – известные функции Вигнера [14], и приняты следующие обозначения: $\theta_{ab}=\hat{\vec a\vec b}$, $u_{ab}=\cos\theta_{ab}$. Из формул (3) следуют равенства

$$\begin{aligned}u_{xy'}&=\mathrm{cosec}\,\varphi'(\sin\varepsilon\gamma\cdot\cos\varphi-\cos\gamma\cdot\sin\varphi\cdot u),\\ u_{xx'}&=-\sec\varphi'(\cos\gamma\cdot\cos\varphi+\sin\varepsilon\gamma\cdot\sin\varphi\cdot u),\end{aligned} \qquad (12а)$$

$$\begin{aligned}u_{yy'}&=\mathrm{cosec}\,\varphi'(-\cos\gamma\cdot\sin\varphi+\sin\varepsilon\gamma\cdot\cos\varphi\cdot u),\\ u_{yx'}&=-\sec\varphi'(\sin\varepsilon\gamma\cdot\sin\varphi+\cos\gamma\cdot\cos\varphi\cdot u),\end{aligned} \qquad (12б)$$

$$\cos2\varphi'=\cos2\gamma\cos2\varphi+\sin2\varepsilon\gamma\,\sin2\varphi\;u, \qquad (13)$$

согласно которым углы φ', $\theta_{xy'}$, $\theta_{xx'}$, $\theta_{yy'}$, $\theta_{yx'}$ являются функциями независимых переменных φ и $u=u_{xy}$. Это позволяет сделать в интеграле (9) замену переменных $d\hat x\,d\hat y=dw\,du$ и, используя равенства (11), выполнить интегрирование по совокупности углов w, от которых зависят лишь $\mathcal{D}$–функции. Используя ортогональность последних, нетрудно получить следующие равенства:

$$h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,u,\varepsilon\gamma)=J(\varphi,\varphi')\sum_{Nm}C^{LN}_{\lambda N\ell 0}\,A^{LNm}_{\lambda\alpha'}\,P^N_\lambda(u)\,P^m_{\lambda'}(u_{xy'})\,P^{N-m}_{\ell'}(u_{xx'}), \qquad (14а)$$

где обозначено $J(\varphi,\varphi')=\sin2\varphi/2\sin2\varphi'$, $[a]=(2a+1)^{1/2}$,

$$A^{LNm}_{\lambda\alpha'}=\frac{[\lambda\ell\lambda'\ell']}{[L^2]^2}\,C^{LN}_{\lambda' m\ell' N-m}\left\{\frac{(\lambda-N)!\,(\lambda'-m)!\,(\ell'-N+m)!}{(\lambda+N)!\,(\lambda'+m)!\,(\ell'+N-m)!}\right\}^{1/2},$$

а P^m_ℓ –присоединенные полиномы Лежандра [15]. Совершенно аналогично, введя систему $S''=\{\vec e_1{}'',\vec e_2{}'',\vec e_3{}''\}$ с ортами $\vec e_1{}'',\vec e_2{}''\in P$, $\vec e_3{}''\uparrow\uparrow\vec y$, получим равенства

$$h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,u,\varepsilon\gamma)=J(\varphi,\varphi')\sum_{Nm}C^{LN}_{\lambda 0\ell N}\,A^{LNm}_{\ell\alpha'}\,P^N_\ell(u)\,P^m_{\lambda'}(u_{yy'})\,P^{N-m}_{\ell'}(u_{yx'}), \qquad (14б)$$

эквивалентные предыдущим (14а) по построению. Напомним, что в формулах (14) все аргументы φ', u_{ab} являются функциями (12),(13) переменных φ и $u=u_{xy}$. Полученные представления ядер $h^L_{\alpha\alpha'}$ в виде двукратных сумм (14), содержащие при $L=0$ или $L\neq0$, но при двух нулевых нижних индексах лишь одно слагаемое

$$\begin{aligned}h^0_{\lambda\lambda\lambda'\lambda'}&=(-1)^{\lambda+\lambda'}[\lambda\lambda']\,J\cdot P_\lambda(u_{xy})\cdot P_{\lambda'}(u_{x'y'}),\\ h^L_{0L0L}&=J\cdot P_L(u_{xx'}),\quad h^L_{L0L0}=J\cdot P_L(u_{yy'}),\\ h^L_{0LL0}&=J\cdot P_L(u_{xy'}),\quad h^L_{L00L}=J\cdot P_L(u_{yx'}),\end{aligned} \qquad (14в)$$

несомненно, более удобны при численном решении системы (8), чем обычно используемое[3,5] представление в виде пятикратной суммы, содержащей $6j$- и $9j$ -символы. Оно получается разложением функции $\phi_K^{\alpha' L}(x',y')(x'y')^{-1}$ под интегралом (9) по полиномам Лежандра $P_\ell(u)$ и в случае произвольных масс частиц имеет следующий вид:

$$h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,u,\varepsilon\gamma) = (-1)^{\lambda'+\ell'+L}[\lambda\ell]^2\{(2\lambda)!(2\ell)!\}^{1/2} J(\varphi,\varphi') \sum_{K=0}^{N}(-1)^K[K]^2 P_K(u)\sum_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda}\sum_{\ell_1+\ell_2=\ell}\sqrt{\{(2\lambda_1)!(2\lambda_2)!(2\ell_1)!(2\ell_2)!\}}$$

$$(-1)^{\lambda_1+\ell_1}(\sin\varepsilon\gamma)^{\ell_1+\lambda_2}(\cos\gamma)^{\lambda_1+\ell_2}(\sin\varphi)^{\lambda_1+\ell_1} \tag{15}$$

$$(\cos\varphi)^{\lambda_2+\ell_2}(\sin\varphi')^{-\lambda}(\cos\varphi')^{-\ell}\sum_{n,m}[nm]\, C^{n0}_{\lambda_1 0\ell_1 0}\, C^{m0}_{\lambda_2 0 \ell_2 0}$$

$$C^{\lambda' 0}_{K0n0}\, C^{\ell' 0}_{K0m0}\begin{Bmatrix}\ell' & \lambda' & L\\ n & m & K\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda\\ \ell_1 & \ell_2 & \ell\\ n & m & L\end{Bmatrix}, \quad N=(\lambda+\ell+\lambda'+\ell')/2.$$

Получим еще одно, а именно спектральное представление операторов $\hat{h}^L_{\alpha\alpha'}$. Как известно[15], функции

$$W_{\alpha K}(\varphi) = N_{\alpha K}(\sin\varphi)^{\lambda+1}(\cos\varphi)^{\ell+1}P_n^{(\lambda+1/2,\,\ell+1/2)}(\cos 2\varphi), \quad n=0,1,\ldots, \tag{16}$$

где $P_n^{(a,b)}$ – полином Якоби, а $N_{\alpha K}$ нормировочная константа

$$N^2_{\alpha K} = \{2n!(K+2)(K-n+1)!\}/\{\Gamma(n+\lambda+3/2)\,\Gamma(n+\ell+3/2)\},$$

являются регулярными решениями краевой задачи

$$\{\hat{\Delta}^\alpha_\varphi + (K+2)^2\}W_{\alpha K}(\varphi)=0,\ \varphi\in[0,\pi/2],\ W_{\alpha K}(\varphi=0,\pi/2)=0,$$

где для угловой части двумерного лапласиана принято следующее обозначение:

$$\hat{\Delta}^\alpha_\varphi = \partial^2_\varphi - \lambda(\lambda+1)/\sin^2\varphi - \ell(\ell+1)/\cos^2\varphi. \tag{17}$$

Функции (16) образуют ортонормированный базис в пространстве функций класса C^2, заданных на отрезке $\varphi\in[0,\pi/2]$ и обращающихся в ноль на его концах. Теперь подставим в интегралы (9), (10) вместо $\phi_K^{\alpha' L}$ функцию $W_{\alpha' K'}(\varphi')$ и вычислим матричный элемент

$$\langle W_{\alpha K}|\hat{h}^L_{\alpha\alpha'}|W_{\alpha' K'}\rangle = \int_0^{\pi/2} d\varphi\, W_{\alpha K}(\varphi)\int_{-1}^{1}du\, h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,u,\varepsilon\gamma)\, W_{\alpha' K'}(\varphi'),$$

где $\varphi' = \varphi'(\varphi,u,\varepsilon\gamma)$, согласно равенству (13). Он равен интегралу

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi(\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^2\int_{T_{yx}} d\hat{x}\,d\hat{y}\; U_K^{\alpha L *}(\varphi,\hat{y},\hat{x})\, U_{K'}^{\alpha' L}(\varphi',\hat{y}',\hat{x}')$$

от произведения полисферических гипергармоник[12]

$$U_K^{\alpha L}(\varphi,\hat{y},\hat{x}) = 2\,\mathrm{cosec}\,2\varphi\; W_{\alpha K}(\varphi)\, \mathcal{Y}_\alpha^{LM}(\hat{y};\hat{x}), \tag{18}$$

записанных в различных наборах координат (2) и отвечающих гипермоментам $K=2n+\lambda+\ell$ и $K'=2n'+\lambda'+\ell'$ соответственно. Такой интеграл, как известно[12], равен трехчастичному коэффициенту $\langle\alpha|\alpha'\rangle^{\varepsilon\gamma}_{KL}$ Рейнала-Реваи[16], умноженному на символ Кронекера $\delta_{KK'}$. В силу доказанных таким образом равенств

$$\langle W_{\alpha K}|\hat{h}^L_{\alpha\alpha'}|W_{\alpha' K'}\rangle = \delta_{KK'}\,\langle\alpha|\alpha'\rangle^{\varepsilon\gamma}_{KL} \tag{19}$$

и полноты системы функций (16) имеет место спектральное представление исследуемых операторов

$$\hat{h}^L_{\alpha\alpha'} = \sum_K |W_{\alpha K}\rangle\langle\alpha|\alpha'\rangle^{\varepsilon\gamma}_{KL}\langle W_{\alpha' K}|,\quad K=2n+\lambda+\ell=2n'+\lambda'+\ell'. \tag{20}$$

Оно означает, что действие операторов $\hat{h}^L_{\alpha\alpha'}$ на некоторую функцию $f(\varphi)$, разложимую по базису (16), представимо в виде

$$\langle\varphi|\hat{h}^L_{\alpha\alpha'}|f(\varphi')\rangle = \sum_K\langle\alpha|\alpha'\rangle^{\varepsilon\gamma}_{KL}\, W_{\alpha K}(\varphi)\int_0^{\pi/2}d\varphi'\, W_{\alpha' K}(\varphi')\, f(\varphi').$$

Равенства (19), (20) обобщают результаты работ[8,9,17] на случай произвольных значений индексов α, α', L и масс частиц.

Интересным следствием эквивалентности полученных представлений (14),(15),(20) является простой способ вычисления коэффициентов Рейнала-Реваи в случае $\alpha'=(0,L)$. Действительно, из равенства (20) следуют равенства

$$B(\varphi,\varepsilon\gamma) \equiv \sin 2\varepsilon\gamma\,\langle\varphi|\hat{h}^L_{\lambda\ell 0L}|W_{0LK}(\varphi')\rangle = \sin 2\varepsilon\gamma\,\langle\lambda\ell|0L\rangle^{\varepsilon\gamma}_{KL}\, W_{\lambda\ell K}(\varphi).$$

Так как функции $U_{xx'}$(12а) и φ' (13) симметричны относительно перестановки своих аргументов φ и $\varepsilon\gamma$, то согласно формуле (14а), эквивалентной (20), этим же свойством обладают и функции B. Следовательно, справедливы равенства

$$\langle\lambda\ell|0L\rangle^{\varepsilon\gamma}_{KL} = \mathrm{cosec}\,2\varepsilon\gamma\; W_{\alpha K}(\varepsilon\gamma).$$

Для дальнейших исследований необходимо перейти к полярным координатам. В таких координатах система (8) запишется следующим образом:

$$\{\hat{\Delta}_\rho + \rho^{-2}\hat{\Delta}_{\varphi_i} + E - V_i(\rho\cos\varphi_i)\}\,\phi_i^{\alpha L}(\rho,\varphi_i) = \tag{21}$$

$$= V_i(\rho\cos\varphi_i)\sum_{K\neq i}\sum_{\alpha'}\langle\varphi_i|\hat h^L_{\alpha\alpha'}|\Phi^{\alpha' L}_K(\rho,\varphi_K)\rangle.$$

Здесь $\hat\Delta_\rho=\partial^2_\rho+\rho^{-1}\partial_\rho$ радиальная часть двумерного оператора Лапласа, а оператор $\hat\Delta^{\alpha}_{\varphi}$ определен ранее формулой (I7). Матричные элементы операторов $\hat h^L_{\alpha\alpha'}$ в полярных координатах получим заменой (I3) $u\to\varphi'$ переменной интегрирования в соответствующих матричных элементах (I0). Вычислив якобиан $\partial_{\varphi'}u = 2\,\mathrm{cosec}\,2\varepsilon\gamma\; J^{-1}(\varphi,\varphi')$ и новые пределы интегрирования

$$c(\varphi,\gamma)=|\varphi-\gamma|,\quad d(\varphi,\gamma)=\min\{\varphi+\gamma,\pi-\varphi-\gamma\},\quad (22)$$

получим следующие равенства[9]:

$$\langle\varphi|\hat h^L_{\alpha\alpha'}|\Phi^{\alpha' L}_K(\rho,\varphi')\rangle=\int_{c(\varphi,\gamma)}^{d(\varphi,\gamma)}d\varphi'\; h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,\varphi';\varepsilon\gamma)\;\Phi^{\alpha' L}_K(\rho,\varphi'),\quad (23)$$

где $h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,\varphi';\varepsilon\gamma)=\varepsilon\,\partial_{\varphi'}u\cdot h^L_{\alpha\alpha'}(\varphi,u(\varphi,\varphi';\varepsilon\gamma),\varepsilon\gamma).$

Исследуем отображение (23) в двух предельных случаях $\gamma\to 0$, $\gamma\to\pi/2$. Если $\gamma\to 0$, то оба предела (22) интеграла (23) сходятся к φ, а длина отрезка интегрирования равна по порядку величины $O(\gamma)$. Ядра $h^L_{\alpha\alpha'}$ по определению (9), (I0) являются непрерывными функциями параметра γ на всем отрезке $\gamma\in[0,\pi/2]$. Следовательно, если $\partial^m_{\varphi'}\Phi^{\alpha' L}_K\in C^0_{[0,\pi/2]}$, то, разложив парциальную компоненту под интегралом (23) в ряд Тейлора с центром в точке φ, мы получим представление оператора $\hat h^L_{\alpha\alpha'}$ в виде суммы локальных операторов:

$$\langle\varphi|\hat h^L_{\alpha\alpha'}|\Phi^{\alpha' L}_K(\rho,\varphi')\rangle=\sum_{n=0}^{m} g^{\alpha\alpha' L}_n(\varphi,\varepsilon\gamma)\left\{\partial^n_{\varphi'}\Phi^{\alpha' L}_K(\rho,\varphi')\right\}\Big|_{\varphi'=\varphi}+\tau.\quad (24)$$

Здесь $g^{\alpha\alpha' L}_n=\langle\varphi|\hat h^L_{\alpha\alpha'}|(\varphi-\varphi')^n\rangle/n!$, τ – остаточный член. Для примера рассмотрим случай $\alpha=\alpha'=(0,0),\varepsilon=1,L=0$. Функции $g^{\alpha\alpha 0}_n$ легко вычисляются $g^{\alpha\alpha 0}_n(\pi/2-\varphi,\gamma)=(-1)^n g^{\alpha\alpha 0}_n(\varphi,\gamma),\varphi\in[0,\frac{\pi}{4}]$,

$$g^{\alpha\alpha 0}_n(\varphi,\gamma)=\frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{cosec}\,2\gamma\begin{cases}1-(1-2\varphi/\gamma)^{n+1}, & \varphi\in[0,\gamma]\\ 1+(-1)^n, & \varphi\in[\gamma,\frac{\pi}{4}]\end{cases},$$

а остаточный член τ по порядку величины равен $O(\gamma^m)$.

Если $\gamma\to\pi/2$, то центром разложения парциальной компоненты под интегралом (23) является точка $(\pi/2-\varphi)$, а дальнейшее исследование аналогично рассмотреному случаю $\gamma\to 0$. Покажем, что для систем из одной легкой и двух тяжелых частиц возможна аппроксимация (24).

Действительно, если массы частиц таковы, что $\beta^2=m_1/m_2\ll 1$, $m_2\sim m_3$, то кинематические углы по определению (4) равны $\gamma_{23}=0+O(\beta)$, $\gamma_{12},\gamma_{13}=\pi/2+O(\beta)$.

§3. Метод гипергармоник и регуляризация интегродифференциальных уравнений по угловой переменной

Предположим, что парциальные компоненты являются всюду дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, а парные взаимодействия – несингулярные, т.е.

$$V_i(x_i)\in C^0_{(0,\infty)},\quad \lim_{x_i\to 0}x_i^2\,V_i(x_i)=0,\quad i=1,2,3.$$

Тогда асимптотики регулярных решений $\Phi^{\alpha L}_i(\rho,\varphi)$ системы (2I) при $\varphi\to 0\,(\pi/2)$ определяются из характеристических уравнений[18] для операторов $\hat\Delta^{\alpha}_{\varphi}$ (I7) и совпадают с асимптотиками $\sin^{\lambda+1}\varphi$ $(\cos^{\ell+1}\varphi)$ функций $W_{\alpha K}$, имеющих тот же индекс $\alpha=(\lambda,\ell)$. При наложенных ограничениях на классы функций и потенциалов система функций (I6) является угловым базисом задачи (2I), и поэтому имеют место следующие равенства:

$$\Phi^{\alpha L}_i(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{\alpha L}_{in}(\rho)\,W_{\alpha K}(\varphi)\,\delta_{K,2n+\lambda+\ell}=\quad (25а)$$

$$=(\sin\varphi)^{\lambda+1}(\cos\varphi)^{\ell+1}\,S^{\alpha L}_i(\rho,\varphi),\quad (25б)$$

причем $K=2n+\lambda+\ell$, $S^{\alpha L}_i(\rho,\varphi)\neq 0$ при $\varphi=0,\pi/2$. Парциальные компоненты в виде (25а) подставим в систему (2I) и, используя равенства (20), спроектируем получившиеся уравнения на базисные функции (I6). В результате мы получим, вообще говоря, бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных радиальных функций $f^{\alpha L}_{in}(\rho)$, $n=0,1,\dots$, $i=1,2,3$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left[\hat\Delta_\rho-\rho^{-2}(K+2)^2+E\right]\delta_{nm}-V^{\alpha}_{inm}(\rho)\right\}f^{\alpha L}_{im}(\rho)=\quad (26)$$

$$\sum_{m,p=0}^{\infty}V^{\alpha}_{inm}(\rho)\sum_{K\neq i}\sum_{\alpha'}\langle\alpha|\alpha'\rangle^{\varepsilon_{Ki}\gamma_{Ki}}_{K'L}\,f^{\alpha' L}_{Kp}(\rho)\,\delta_{K'K''}.$$

Здесь $K=2n+\lambda+\ell$, $K'=2m+\lambda+\ell$, $K''=2p+\lambda'+\ell'$, а матричный элемент V^{α}_{inm} равен интегралу $\int d\varphi\,W_{\alpha K}(\varphi)\,V_i(\rho\cos\varphi)\,W_{\alpha K'}(\varphi)$. Заметим, что последовательность разложений (6) и (25а) искомых фаддеевских компонент эквивалентна представлению их в виде рядов

$$\Psi_i(\vec x_i,\vec y_i)=\rho^{-2}\sum_{\alpha L K}f^{\alpha L}_{in}(\rho)\,U^{\alpha L}_K(\varphi_i,\hat y_i,\hat x_i)\,\delta_{K,2n+\lambda+\ell}\quad (27)$$

по полисферическим гипергармоникам (I8). Следовательно, уравнения (26) можно получить непосредственной подстановкой компонент (27) в исходную систему (5). Такое построение означает, что известный метод гипергармоник [I9] применен не к трехчастичному уравнению Шредингера (I), как это обычно делалось [20], а к его фаддеевскому разбиению на систему уравнений (5), записанную в координатном пространстве.

Необходимо отметить, что в работе [I7] для частного случая тождественных частиц и нулевых значений всех угловых моментов выполнено обратное построение: из системы дифференциальных уравнений для радиальных функций получены интегродифференциальные уравнения для парциальных компонент. Уравнения (26) являются объединением дифференциальной формулировки (5) задачи трех тел и метода гипергармоник. Они сочетают преимущества подобного объединения интегральных уравнений и метода гипергармоник в импульсном пространстве, предложенного и развитого в работах [2I], с простотой алгоритмов численного решения, присущей обыкновенным дифференциальным уравнениям. Несомненный интерес представляет исследование уравнений (26) методами фазовых функций [22]. Объединение этих методов и интегральных трехчастичных уравнений выполнено в работах [23].

Разложения (25), (27) позволяют получить дополнительную информацию об искомых решениях системы (2I).

Продемонстрируем последнее утверждение на двух простых примерах. Пусть частицы тождественны, а потенциалы действуют только в S -волне, тогда все кинематические углы γ_{ki} (4) одинаковы и равны $\gamma = \pi/3$. В случае $\alpha = \alpha' = (0,0)$, $L = 0$ волновая функция представима в виде

$$\Psi(\vec{x},\vec{y}) = (2\pi\rho^2\sin 2\varphi)^{-1}\langle\varphi|\,\hat{I}+2\hat{h}\,|\,\Phi(\rho,\varphi')\rangle, \qquad (28)$$

а система (2I) сводится к одному уравнению

$$\{\hat{\Delta}_\rho+\rho^{-2}\partial^2_\varphi+E\}\;\Phi(\rho,\varphi)=V(\rho\cos\varphi)\langle\varphi|\,\hat{I}+2\hat{h}\,|\,\Phi(\rho,\varphi')\rangle, \qquad (29)$$

где $\hat{I}$ -единичный оператор, а $\hat{h}\equiv h^0_{\alpha\alpha}$, $\alpha = (0,0)$. Решение спектральной задачи $\langle\varphi|\hat{h}|w_n(\varphi')\rangle=\lambda_n(\gamma)w_n(\varphi)$, детально исследованное в предыдущей работе [9] автора, получается как частный случай формул (I6) (I9):

$$w_n(\varphi)=W_{\alpha 2n}(\varphi)=(4/\pi)^{1/2}\sin 2n\varphi\;,\quad n=0,1,\dots,$$

$$\lambda_n(\gamma)=\mathrm{cosec}\,2\gamma\,\langle 00|00\rangle^{\gamma}_{2n,0}=\sin 2n\gamma/(n\sin 2\gamma).$$

Заметим, что $\lambda_2(\frac{\pi}{3}) = -1/2$, поэтому $(\hat{I}+2\hat{h})\,w_2\equiv 0$ и волновая функция (28) ортогональна гипергармонике

$$U_4^{\alpha 0}(\varphi,\hat{y},\hat{x})=2\,\mathrm{cosec}\,2\varphi\;w_2(\varphi)\;\mathcal{Y}^{00}_{(0,0)}(\hat{y},\hat{x})=(4/\pi^3)^{1/2}\cos 2\varphi.$$

Этот же результат, но в частном случае $V(x)=Cx^2$, получен в работе [24]. Однако указанное свойство является следствием тождественности частиц, оно не зависит от формы потенциала $V(x)$ и может быть использовано в качестве дополнительной проверки численного решения уравнения (29). Это уравнение в случае $V=Cx^{-2}$ допускает разделение переменных подстановкой $\Phi(\rho,\varphi)=f(\rho)\cdot g(\varphi)$. Краевая задача

$$\{\partial^2_\varphi+\nu^2\}\,g(\varphi)=C\sec^2\varphi\,\langle\varphi|\,\hat{I}+2\hat{h}\,|\,g(\varphi')\rangle\equiv F(\varphi,g,C), \qquad (30)$$
$$g(0)=g(\pi/2)=0,$$

где ν^2 – константа разделения, решалась численно в работе [25] для C = -6,-5, ... -I. Получим некоторые аналитические решения этой задачи. Во-первых, отметим, что для любого значения параметра C существует нетривиальное решение $\nu = 4$, $g(\varphi)=w_2(\varphi)=(4/\pi)^{1/2}\sin 4\varphi$. Во-вторых, укажем способ вычисления значений параметра C, при которых решения задачи (30) являются конечной линейной комбинацией функций w_k. Для этого положим $\nu = 2(m+1)$, (m = 2,3 ...) и подставим искомое решение в виде $g=\sum_{k=1}^{m+1} b_k w_k$ в уравнение (30). После проектирования на базис $\{w_n\}$ оно сведется к конечной системе однородных линейных уравнений для неизвестных коэффициентов b_k, k = I,., m+ I. Нетривиальное решение этой системы существует, если параметр C является нулем детерминанта ее матрицы. Приведем три таких решения :

$m = 2$, $\nu = 6$, $C = 4$, $g = w_1 - 4/5\, w_2 - w_3$,
$m = 3$, $\nu = 8$, $C = C_\pm = 9 \pm \sqrt{11}$,

$$g_\pm = w_1 + (C_\pm - 10)\,w_2/4 + [\,15\,w_3 + 70\,w_4/C_\pm\,]/(21 - C_\pm).$$

Интересно отметить, что уравнение (30) описывает вынужденные колебания струны под действием силы F, а найденные решения $g(\varphi)$ описывают отклонения струны, жестко закрепленной на концах, от ее равновесного положения $g(\varphi)\equiv 0$. Как было показано, существуют отличные от нуля значения параметра C силы, при которых частоты $\nu = 2(m+1)$ вынужденных и свободных колебаний совпадают.

Теперь выполним регуляризацию уравнений (2I) в особых точках операторов (I7). Для этого парциальные компоненты в виде (25б) подставим в систему (2I) и перейдем к новым угловым переменным $\vartheta_i = \cos 2\varphi_i$. В результате такой модификации мы получим систему уравнений для неизвестных функций $S_i^{\alpha L}$

$$\{ \hat{\Delta}_\rho + \rho^{-2} [4(1-v_i^2)\partial^2_{v_i} - 4(\lambda - \ell + (3+\lambda+\ell) v_i)\partial_{v_i} - (\lambda+\ell+2)^2] + E - V_i(\rho, v_i) \} S_i^{\alpha L}(\rho, v_i) =$$

$$V_i(\rho, v_i) \sum_{k \neq i} \sum_{\alpha'} \int_{c(v_i,\gamma_{ki})}^{d(v_i,\gamma_{ki})} d v_k \; \tilde{h}^L_{\alpha\alpha'}(v_i, v_k, \varepsilon_{ki}\gamma_{ki}) \; S_k^{\alpha' L}(\rho, v_k), \quad (31)$$

где

$$c(v_i, \gamma_{ki}) = \cos 2(\varphi_i - \gamma_{ki}), \quad d(v_i, \gamma_{ki}) = \cos 2(\varphi_i + \gamma_{ki}).$$

Ядра новых нелокальных операторов

$$\tilde{h}^L_{\alpha\alpha'} = [-4(\sin\varphi_i)^{\lambda+1}(\cos\varphi_i)^{\ell+1}]^{-1} h^L_{\alpha\alpha'} [(\sin\varphi_k)^{\lambda'}(\cos\varphi_k)^{\ell'}]$$

согласно равенствам (I4),(I6),(20) являются непрерывными по совокупности своих аргументов функциями. Модифицированные уравнения (3I) уже не содержат операторов, сингулярных по новым угловым переменным. Неизвестные функции $S_i^{\alpha L}$ согласно равенствам (I6),(25) разложимы в ряды по полиномам Якоби и, в отличие от парциальных компонент (см.(25)), не имеют нулей порядка λ и ℓ соответственно на границах $v_i = +1, -1$. Анзац (25б) позволяет аналитически воспроизвести старшие члены асимптотик парциальных компонент независимо от численной схемы решения уравнений (3I). Последнее необходимо для вычисления с заданной точностью компонент волновой функции Ψ в тех случаях, когда парные потенциалы содержат центральные взаимодействия (например, кулоновские) и число учитываемых парциальных компонент должно быть достаточно большим. По названным причинам модифицированные уравнения (3I) более удобны для численного решения, чем исходные (2I).

Детальное исследование асимптотик функций $S_i^{\alpha L}$ и построение алгоритма численного решения системы (3I) методами сплайн-функций /26/ будет выполнено в отдельной работе.

§4. Заключение

Отметим интересные, с точки зрения автора, направления дальнейших исследований интегродифференциальных уравнений для системы трех тел. Прежде всего, необходимо найти асимптотики парциальных компонент в точке $\rho = 0$ и построить регулярные в ее окрестности уравнения. Возможным путем решения этой проблемы является исследование особой точки $\rho = 0$ системы уравнений (26). Интересными проблемами являются объединение методов фазовых функций и интегродифференциальных уравнений, а также построение на основе аппроксимации (24) приближенных, но дифференциальных уравнений в частных производных. Центральным моментом этого построения является исследование функций $g_n^{\alpha\alpha' L}$(24) и угловых асимптотик искомых решений приближенных уравнений.

Литература

1. Фаддеев Л.Д. – ЖЭТФ, 1961, 12, с.1014.
2. Noyes H.P. In: Three-body Problem. North-Holland Amsterdam, 1970, p.2.
3. Merkyriev S.P., Gignoux C., Laverne A.–Ann.Phys. 1976, 99, p.30.
4. Merkyriev S.P., Yakovlev S.L., Gignoux C.–Nucl.Phys,1984, A431, p.125.
   Sasakawa T., Ishikawa S. Few-Body-Systems, 1986, 1, p.3.
5. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц М.: Наука, 1985.
6. Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.–Phys.Rev,1981,C24,p2279. 1982, C26,p.1385; Phys.Lett, 1983, 124B, p287.
7. Пупышев В.В. –ЯФ, 1986, т.43, с.1318; ОИЯИ, Р4-86-85, Дубна,1986.
8. Mandelzweig V.B.–Ann.Phys. 1977, 104, p.1.
9. Пупышев В.В. –ЯФ, 1986, т.43, с.260; ОИЯИ, Е4-84-808, Дубна, 1984.
10. Belyaev V.B., Kartavtsev O.I. –J. Comp. Phys, 1985, 59, p493.

    Беляев В.Б., Картавцев О.И., Кочкин В.И. ОИЯИ, Р4-84-793, Дубна, 1984; ОИЯИ, Р4-85-816, Дубна, 1985.
11. Lovelace C.–Phys.Rev., 1963, 132, p.485
12. Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б. Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
13. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.:Наука, 1975
14. Биденхарн Л., Лаук Дж. Угловой момент в квантовой физике, Москва: Мир, 1984.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие транцендентные функции. т.I, М.: Наука, 1973.
16. Raynal J., Revai J.–Nuovo Cimento, 1970, 68A, p.612
17. M.Fabre de la Ripelle, Few-body-systems, 1986, 1, p.181.
18. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.3, ч.2 с.450.
19. Виленкин Н.Я. Теория представления групп и специальные функции. М.:Наука, 1965.
20. Смирнов Ю.Ф., Шитикова К.В. – ЭЧАЯ, 1977, 8, с.847
21. Джибути Р.И. Препринт ИФАН ГССР, ЯФ-17, Тбилиси,1983; Джибути Р.И., Циклаури Ш.М. –ЯФ, 1984, 40, с.1171; ЯФ, 1985, 41, с.856.

22. Колоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния . М.: Мир , 1972
Бабиков В.В. Метод фазовых функций в квантовой механике . М.: Наука , 1976.
23. Ситенко А.Г., Нечев П.И., Петров Н.М. Препринт ИТФ-79-96Р, Киев, 1979.
Petrov N.M. Preprint ITP-85-27E, Kiev 1985.
Petrov N.M., Pushkash A.M. Preprint ITP-85-29E, ITP-85-59E, Kiev, 1985.
24. Friar J.L., Gibson B.F.-Phys.Rev.,1980,C22,p.284.
25. Avishai Y. -J.Math. Phys., 1975, 16, p.1491.
26. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций . М.: Наука , 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1987 года.

Пупышев В.В. P5-87-153
К теории интегродифференциальных трехчастичных уравнений

Исследуются свойства нелокальных операторов $\hat{h}$ системы интегродифференциальных уравнений для парциальных компонент трехчастичной волновой функции. Эти уравнения с помощью разложения искомых функций двух переменных по найденным собственным функциям операторов $\hat{h}$ сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных функций одной переменной. Показано, что такое разложение эквивалентно применению метода гипергармоник к фаддеевскому разбиению уравнения Шредингера на систему трех уравнений, записанных в координатном пространстве. Осуществлена регуляризация интегродифференциальных уравнений в особых точках угловой части свободного трехчастичного гамильтониана.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Pupyshev V.V. P5-87-153
On the Theory of Integrodifferential Three-Particle Equations

Properties of the nonlocal operators $\hat{h}$ of the integrodifferential equation set for partial components of a three-particle wave function are explored. By expanding the searched functions of two variables into a series of the found eigenfunctions of the $\hat{h}$-operators those equations reduce to a set of ordinary second-order differential equations for unknown functions of one variable. As it is shown, that expansion is equivalent to application of the hyperharmonic approach to the Faddeev configuration-space decomposition of the Schrodinger equation. Regularization of the integrodifferential equations at singular points of the angular part of a free-three-particle Hamiltonian is performed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987