сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-86-833

Р.М.Ямалеев

МЕТОД РЕДУКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1986

1. МЕТОД МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ /ММЛ/

Метод матричной линеаризации сопоставляет многомерному полиномиально-нелинейному уравнению векторное уравнение, линейное по неизвестным, но с матричными коэффициентами, действующими на соответствующий вектор. Простейшие способы матричной линеаризации, использующие алгебры Клиффорда, Грассмана и Даффина - Кеммера, нашли широкое применение при описании состояний частиц со спином [1]. В последнее время ММЛ находит применение как конструктивный метод для решения и исследования системы полиномиально-нелинейных уравнений [2,3]. Практическая ценность ММЛ состоит в том, что он позволяет разделить неизвестные в нелинейной многомерной системе. Преимущество ММЛ с методической точки зрения находит свое выражение в том, что метод на определенном этапе сводит исходную нелинейную задачу к линейной задаче относительно матриц определенной структуры, называемых сопровождающими матрицами. Последние удовлетворяют исходной нелинейной системе и поэтому могут рассматриваться как общие решения задачи в матричном представлении. Таким образом, в рамках ММЛ возникает возможность перехода от полиномиально-нелинейной задачи к линейной системе уравнений для определения общего решения в матричном представлении. Эта особенность ММЛ, на наш взгляд, представляет огромный интерес с теоретической точки зрения как метод, позволяющий в принципе перестроить нелинейную теорию в теорию с линейными уравнениями на линейные операторы.

Рассмотрим систему из М уравнений в М-мерном пространстве

$$f_i(\xi) = 0, \quad (i = \overline{1, M}), \qquad /1.1/$$

где ξ - точка в М-мерном пространстве, f_i - полиномы произвольного порядка, заданные в кольце $\mathbf{C}[x_1, x_2, \dots, x_M]$. Пусть Ω - произвольное расширение основного поля $\mathbf{C}$. Набор из М элементов $\xi_1, \dots, \xi_M$ поля Ω является точкой аффинного пространства $A_M(\Omega)$. Точка ξ, удовлетворяющая /1.1/, называется корнем многочленов $f_i \, (i = \overline{1,M})$. Множество всех общих корней /1.1/ образует алгебраическое многообразие [4]

Утверждение 1. Системе уравнений /1.1/ можно сопоставить билинейную систему векторных уравнений с матричными коэффициентами, линейными относительно неизвестных. Они имеют вид:

$$\Big[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{ki} + A_{0i}\Big]\Psi_i = 0, \quad (i = \overline{1, M}), \qquad /1.2/$$

где A_{ni} ($n = \overline{0,M}$; $i = \overline{1,M}$) - матрицы, содержащие только коэффициенты системы /1.1/, Ψ_i - соответствующие векторы. Размеры матриц определяются степенью полиномов f_i и числом неизвестных M.

Доказательство утверждения вытекает из существования хотя бы одного алгоритма построения матриц A_{ni} и векторов Ψ_i. Этот алгоритм будет изложен ниже. Будет также показано, что векторы Ψ_i содержат хотя бы один нетривиальный элемент.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦ-КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ ВЕКТОРНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многомерный полином /многочлен/

$$f(\xi) := f(x_1, x_2, \dots, x_M)$$

степени N из M переменных состоит из суммы $\mu(M,N)$ одночленов

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_M^{\alpha_M},$$

при этом максимальное число одночленов определяется по формуле[5]:

$$\mu(M,N) = \frac{(M+N)!}{M!N!}. \qquad /2.1/$$

Для заданного многочлена составим два базисных вектора F_1 и F_o, максимальная размерность которых равна $L = \mu(M, N-1)$. F_1 и F_o должны удовлетворять следующим условиям:

а/ F_1 содержит свободный член многочлена f и состоит из линейных по неизвестным выражений;

б/ F_o содержит одночлены такой структуры, чтобы имело место следующее равенство:

$$(F_o, F_1) = f, \qquad /2.2/$$

где $(\dots,\dots)$ означает скалярное произведение двух векторов.

Чтобы удовлетворить этим требованиям в общем случае, достаточно выбрать в качестве компоненты F_o всевозможные линейно-независимые одночлены степени меньше N: $x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i - k} \dots x_M^{\alpha_M}$ и единицу. При этом структура F_1 будет определяться из /2.2/ и из требования линейности по неизвестным. Далее, запишем компоненты базиса F_o в одну строку в порядке убывания степеней, проведем черту и под ней запишем соответствующие компоненты F_1. На следующем этапе построим линейно-независимые векторы F_{p+1} ($p = \overline{1, L-1}$), состоящие только из двух нетривиальных элементов: x_i и /-1/ и удовлетворяющих условию

$$(F_o, F_{p+1}) = 0. \qquad /2.3/$$

Нумерацию p выберем в том порядке, чтобы она соответствовала месту /-1/ в F_{p+1}, если отсчитывать слева.

Например:

$$p = 1;\ F_2 := (-1, 0, \dots, x_i, \dots, 0)$$
$$p = 2;\ F_3 := (0, -1, \dots, x_k, \dots, 0). \qquad /2.4/$$

Располагая векторы $F_2, F_3, \dots, F_L$ под вектором F_1, получим матрицу $F_{n,\ell}$ /n соответствует номеру вектора, ℓ - номеру компоненты вектора/. Важно, что элементы $F_{n,\ell}$ содержат неизвестные x_i ($i = \overline{1,M}$) только линейно.

На практике для построения F_o и F_1 достаточно каждый одночлен полинома f представить в виде

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_M^{\alpha_M} = x_i (x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i - 1} \dots x_M^{\alpha_M}),$$

далее, линейный сомножитель объявить компонентой F_1, а сомножитель в скобках - компонентой F_o. Построенные таким образом F_1 и F_o заведомо будут удовлетворять условию /2.2/. Для конструкции векторов F_{p+1} последовательно каждому одночлену в F_o необходимо найти другую компоненту F_o, при умножении которой на линейный по x_i множитель получился бы данный одночлен. Поскольку у F_{p+1} кроме двух остальные компоненты равны нулю, то условие /2.3/ оказывается выполненным.

Продемонстрируем изложенный алгоритм на конкретном полиноме.

Пример 1. Пусть дан полином вида

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + ax^2 + by^2 + cxy + x + y + d. \qquad /2.5/$$

Для данного полинома базис F_o имеет вид

$$F_o := (x^2, y^2, x, y, 1).$$

Проведем черту и будем строить базисы F_1 и F_{p+1}. Получим

$$\begin{array}{llllll}
F_1: & = (x & y & ax + cy & by & x + y + d) \\
F_2: & = (-1 & 0 & x & 0 & 0\ ) \\
F_3: & = (0 & -1 & 0 & y & 0\ ) \\
F_4: & = (0 & 0 & -1 & 0 & x\ ) \\
F_5: & = (0 & 0 & 0 & -1 & y\ )
\end{array} \qquad /2.6/$$

Матрица $F_{n,\ell}$ для полинома $f(x,y)$ построена.

Теорема. Определитель матрицы $W(f) := F_{n,\ell}$ есть полином f, т.е.

$$\det W(f) = f. \qquad /2.7/$$

Доказательство. Согласно свойству функции определителя, определитель инвариантен относительно замены столбца /строки/ матрицы, линейной комбинацией столбцов /строк/-векторов, если в эту комбинацию данный столбец-вектор входит с коэффициентом единица. Образуем из векторов-столбцов F_{ki} /i - номер столбца-вектора, k - номер компонент/, линейную комбинацию

$$\mathfrak{L}_n = \sum_i \tilde{F}_{oi} F_{ni}, \qquad /2.8/$$

и подставим $\mathfrak{L}_n$ вместо $F_{n\mu}$. Поскольку $F_{o\mu} = 1$, то последний столбец в /2.8/ входит с единичным коэффициентом и $\det W(f)$ после такой подстановки не меняется.

Согласно условиям /2.2/, /2.3/ вектор $\mathfrak{L}$ имеет только одну нетривиальную компоненту

$$\mathfrak{L}_1 = (F_o, F_1) = f.$$

Алгебраическое дополнение $\mathfrak{L}_1 = f$ есть определитель треугольной матрицы, на диагонали которой стоят числа -1. Поэтому такой определитель равен +1 либо -1. Разлагая по последнему столбцу матрицы, получим

$$\det(W(f)) = f. \qquad /2.9/$$

Определение. Две системы, заданные в одной и той же области определения неизвестных, будем называть равносильными, если все решения одной системы являются решениями другой системы и наоборот.

Элементы матрицы $W(f_i)$ линейны по неизвестным $x_m (m = \overline{1,M})$, поэтому эта матрица может быть представлена в виде

$$W(f_i) = \sum_{k=1}^{M} x_k A_{ki} + A_{oi}, \qquad /2.10/$$

где матрицы A_{ki}, A_{oi} зависят исключительно от коэффициентов полиномов f_i.

Таким образом, для заданной системы алгебраических уравнений /1.1/ билинейная векторная система уравнений /1.2/ получена.

Теорема. Системы /1.1/ и /1.2/ равносильны.

Доказательство. По построению /алгоритм 1/ векторы имеют хотя бы один нетривиальный элемент, следовательно,

$$\det(W_i(f_i)) = f_i = 0, \ (i = \overline{1, M}). \qquad /2.11/$$

Таким образом, если решения /1.2/ найдены, т.е. найдены x_i и Ψ_i, удовлетворяющие /1.2/, то в силу /2.11/ они являются решениями /1.1/. Наоборот, если найдены решения /1.1/, то

$$\det(W_i(f_i)) = 0. \qquad /2.12/$$

Но для решений /1.2/ это условие тоже необходимо. Из единственности решений системы /2.12/ находим, что решения /1.1/ совпадают с найденными $x_i (i = \overline{1,M})$ из /1.2/. □

Порядок матрицы $W(f)$ равен длине вектора F_o, который, в общем случае, должен содержать всевозможные одночлены степени меньше N, а число таких одночленов равно $\mu(M, N-1)$. На практике порядок матрицы W может быть сокращен за счет усложнения структуры алгоритма 1. Например, матрицу W можно построить следующим образом.

Представим многочлен f, в котором x_1 можно выбрать в качестве ведущего, в следующем виде:

$$f := x_1 g_1 + x_2 g_2 + \ldots + x_M g_M + a_o,$$

где $g_i (i = \overline{1,M})$ имеют степень N-1, g_2 - не содержит x_1, g_3 - x_1 и x_2 и т.д., а g_M есть одномерный полином только от x_M, a_o - свободный коэффициент.

Итак, $g_i (i = \overline{1,M})$ и 1 являются M+1 элементами базиса F_o. Одномерный полином представим в виде

$$g_M = x_M g_M^1 + a_1,$$

g_M^1 имеет степень не выше N-2. В общем случае многочлены $g_k (k = \overline{1, M-1})$ имеют в качестве слагаемых одномерные полиномы от x_M: g_k^1 степени N-1. Разделив их на g_M^1, получим

$$g_M^1 = \ell_{Mk} g_k^1 + g_k^2,$$

где ℓ_{mk} - линейный по x_i многочлен. Этот процесс уменьшения степени многочленов необходимо проводить до тех пор, пока остаточный член после деления не будет линейной функцией от неизвестных. При этом все многочлены вида g_k^i также войдут в базис F_o как соответствующие компоненты. Важно, что такая модификация алгоритма 1 позволяет получать при ведущей неизвестной x_1 диагональную матрицу.

Замечание. В случае полинома самой общей формы матрицы A_{ii} при ведущих x_i оказываются явно вырожденными, ранг этих матриц равен степени x_i, а порядок матриц заведомо больше ранга. В этом основной недостаток алгоритма 1. Однако это, как показано в [3], не приводит к принципиальным трудностям. Существует класс систем, для которых алгоритм 1 дает невырожденные матрицы при ведущих x_i. Это системы с однородными полиномами [3], системы, где неизвестные, кроме ведущих, входят в уравнения линейно. В принципе, путем введения лишних корней /"нулевых" решений/ можно любую систему свести к однородным по ведущей неизвестной полиномам и тем самым добиться невырожденности матриц A_{ii}.

3. РАЗДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ В МЕТОДЕ МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ. СОПРОВОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Практическая ценность ММЛ при решении нелинейных алгебраических уравнений состоит в том, что приведенные к совместному виду векторные уравнения позволяют произвести разделение неизвестных. На эту особенность векторных уравнений в рамках метода спинорной линеаризации квадратных уравнений впервые было указано в [2]. Есть еще одна важная особенность ММЛ: исходная нелинейная задача /теория/ в ММЛ на определенном этапе ее решения, а именно после замены неизвестных соответствующими матрицами, превращается в линейную задачу /теорию/ относительно матриц - решений. Эти матрицы имеют те же свойства, что и сопровождающие матрицы /СМ/ для одномерных алгебраических уравнений.

Процедура приведения к совместному виду

Рассмотрим систему векторных уравнений

$$[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{om}]\Psi_m = 0, \quad (m = \overline{1, M}). \qquad /3.1/$$

Для определенности обозначим через L порядок матриц A_{km}, A_{om}. Приведем матрицы

$$G_m := [\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{om}] \qquad /3.2/$$

к взаимно-коммутирующему виду, не теряя при этом свойства равносильности с исходной нелинейной системой. С этой целью умножим матрицу G_1 по правилу тензорного произведения слева, а остальные $M-1$ матриц G_j $(j > 1)$ справа на единичную матрицу E_L порядка L. Получим

$$GI_1 = E_L \otimes G_1, \quad GJ_j = G_j \otimes E_L. \qquad /3.3/$$

При этом

$$\det(GJ_k) = \{\det G_k\}^L = f_k^L, \qquad /3.4/$$

так что равносильность при умножении G_k на E_L не теряется. Вместо заданных M-матриц G_k /3.2/ образуем новые матрицы GE_k по следующей формуле:

$$\begin{aligned} GE_1 &= \underbrace{E_L \otimes \ldots \otimes E_L}_{M-1} \otimes G_1 \\ GE_2 &= \underbrace{E_L \otimes \ldots \otimes E_L}_{M-2} \otimes G_2 \otimes E_L \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad /3.5/ \\ GE_{M-1} &= E_L \otimes G_{M-1} \otimes \underbrace{E_L \otimes \ldots \otimes E_L}_{M-2} \\ GE_M &= G_M \otimes \underbrace{E_L \otimes \ldots \otimes E_L}_{M-1}. \end{aligned}$$

Можно показать, что полученные матрицы GE_k, $(k = \overline{1, M})$ коммутируют между собой. Кроме того, они простые, так как по построению являются простыми матрицы G_m из /3.2/. Следовательно, GE_k обладают общим базисом собственных функций. Унитарную матрицу, столбцы которой состоят из собственных векторов Φ_n, обозначим через $\hat{U}$.

Согласно соотношениям /3.4/ система уравнений

$$GE_m U = 0, \quad (m = \overline{1, M}) \qquad /3.6/$$

равносильна системе /3.1/. Важно, что в /3.6/ все уравнения содержат одни и те же базисные векторы Φ. Преобразование /3.5/ переводит /3.2/ в матрицы вида

$$GE_m := [\sum_{k=1}^{M} x_k AE_{km} + AE_{om}]. \qquad /3.7/$$

Полученную систему уравнений /3.6/ по отношению к /3.1/ будем называть системой, приведенной к совместному виду.

Определим матрицу AEX как блочную матрицу, элементами-блоками которой является матрица AE_{km} порядка L. Если диагональные блоки AEX-матрицы AE_{kk} - неособые, то существует матрица AEX^{-1}, обратная к AEX. Обозначим блоки AEX^{-1}, являющиеся матрицами того же порядка, что и AE, через BE_{nm}.

Умножим /3.6/ слева на матрицу AEX^{-1}. Получим

$$x_n E\Phi = \hat{X}_n \Phi, \qquad /3.8/$$

$$\hat{X}_n = -\sum_{m=1}^{M} BE_{nm} AE_{om}. \qquad /3.9/$$

В силу того, что $\det(AEX^{-1}) \neq 0$, система /3.8/ равносильна /3.6/, а следовательно и /3.1/. Уравнения /3.8/ уже разделены относительно неизвестных x_n: каждое уравнение /3.8/ содержит свою неизвестную. Поскольку Ψ_m содержит нетривиальный элемент, то Φ можно нормировать условием $\Phi^2 = 1$.

Таким образом, /3.8/ можно рассматривать как задачу на собственные значения. Пусть $D(x_n)$ - диагональная матрица из собственных чисел $x_{n,k}$. Тогда /3.8/ запишем так:

$$UD(x_n) = \hat{X}_n U. \qquad /3.8а/$$

Из /3.8а/ имеем, что матрицы $\hat{X}_n (n = \overline{1, M})$ имеют общий базис собственных векторов, следовательно /см., например, [7]/, они взаимно коммутируют.

Заметим, что несмотря на линейность по неизвестным x_n, система /3.1/ нелинейна, точнее, билинейна, поскольку Ψ_m также неизвестна. Согласно /2.11/ степень нелинейности /3.1/ совпадает со степенью /1.1/. Теперь поставим в соответствие системе /3.6/ линейную неоднородную матричную систему вида

$$\sum_{k=1}^{M} AE_{km} \hat{X}_k = -AE_{om}. \qquad /3.10/$$

Решения /3.10/ определяются по формуле /3.9/.

Теорема. Матрицы $\hat{X}_m (m = \overline{1, M})$ удовлетворяют нелинейной системе уравнений $f_m = 0, (m = \overline{1, M})$, т.е. являются общим решением этой системы в матричном представлении.

Доказательство. Допустим, что $x_{n,k}$ $(n = \overline{1,M};\ k = \overline{1,L})$ являются собственными числами матриц $\hat{X}_n$. Тогда, проецируя матричные уравнения /3.10/ на пространство собственных векторов Φ_k $(k = 1,L)$, получим

$$[\sum_{m=1}^{M} AE_{mi}\, x_{m,k} + A_{oi}]\,\Phi_k = 0, \quad (k = \overline{1,L};\ i = \overline{1,M}). \qquad /3.11/$$

Но /3.6/ равносильна /3.1/, а /3.1/ равносильна /1.1/. Поскольку /3.11/ по форме повторяет /3.6/, то собственные значения являются решениями системы /1.1/. Это значит, что

$$f_i(D(x_n)) = 0, \quad (i = \overline{1,M}). \qquad /3.12/$$

Из /3.8а/ имеем

$$UD(x_n)U^{-1} = \hat{X}_n.$$

Поэтому

$$0 = Uf_i(D(x_n))U^{-1} = f_i(UD(x_n)U^{-1}) = f_i(\hat{X}_n),$$

т.е. матрицы $\hat{X}_n$ удовлетворяют системе $f_i = 0, (0 = \overline{1,M})$. □

На основе изложенного выше можно сделать следующее заключение.

Для системы нелинейных алгебраических уравнений, для которых в принципе допустимо представление вида /3.6/ с невырожденными матрицами AE_{km}, существуют матрицы $\hat{X}_n$, обладающие свойствами:

1. Собственные значения $\hat{X}_n$ являются решениями заданной нелинейной системы.
2. Матрицы $\hat{X}_n$ удовлетворяют заданной системе уравнений.

Систему /1.1/ в этом случае можно называть аннулирующими многочленами или минимальной системой многочленов по отношению к матрицам $\hat{X}_n$ /по аналогии с одномерным случаем/.

3. Матрицы $\hat{X}_n$ находятся из решения линейных неоднородных алгебраических уравнений.

Таким образом, матрицы $\hat{X}_n$ обладают теми же свойствами, что и сопровождающие матрицы /СМ/ в одномерном случае. Поэтому $\hat{X}_n$ мы будем называть сопровождающими матрицами многомерной системы /СММС/.

В общем случае, когда матрицы AE_{km} в системе /3.6/ являются явно вырожденными, СММС будут решениями неоднородной системы с вырожденной матрицей AEX. В этом случае вместо /3.8/ мы получим обобщенную сингулярную задачу на собственные значения [6].

4. МАТРИЧНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА. МЕТОД КОНСТРУКЦИИ БАЗИСНОГО ВЕКТОРА

Образующие алгебры Клиффорда задаются с помощью соотношений антикоммутации:

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}, \quad (i,j = \overline{1,L}). \qquad /4.1/$$

С помощью образующих γ_i $(i = \overline{1,L})$ можно линеаризовать полином из L слагаемых вида

$$f(p):\ = \sum_{k=1}^{L} p_k^2 = 0. \qquad /4.2/$$

Согласно /4.1/ имеем

$$[\sum_{k=1}^{L} \gamma_k p_k][\sum_{k=1}^{L} \gamma_k p_k] = \sum_{k=1}^{L} p_k^2, \qquad /4.3/$$

поэтому форма

$$[\sum_{k=1}^{L} \gamma_k p_k]\,\Phi = 0 \qquad /4.4/$$

равносильна /4.2/.

Если полином содержит смешанные произведения, то с помощью метода Лагранжа [7] необходимо привести его к канонической форме, с помощью образующих γ_i полученное выражение линеаризовать, затем с помощью обратного преобразования перейти к прежним переменным. Например, рассмотрим произвольный полином 2-й степени вида

$$f(p):\ = \sum_{k=1}^{L}\sum_{i=1}^{L} p_k p_i R_{ki} + \sum_{n=1}^{L} B_n p_n + B_o. \qquad /4.5/$$

Метод Лагранжа приводит /4.5/ к канонической форме

$$f(\pi):\ = \sum_{k=1}^{L+1} A_k \pi_k^2 = \sum_{k=1}^{L+1} \rho_k^2, \quad \rho_k = \sqrt{A_k}\,\pi_k \qquad /4.6/$$

с помощью линейного преобразования

$$\pi_k = \sum_{m=1}^{L+1} \omega_{km} p_m, \quad p_{L+1} = B_o. \qquad /4.7/$$

Из /4.6/ придем к формуле

$$[\sum_k \gamma_k \rho_k]\Phi = [\sum_k \gamma_k \sqrt{A_k}\,\pi_k]\Phi = 0.$$

Переходя к прежним переменным

$$\sum_k \gamma_k \sqrt{A_k} \sum_m \omega_{km} p_m = \sum_m [\sum_k \sqrt{A_k}\,\omega_{km}]\Phi = 0,$$

получим

$$[\sum_m \nu_m p_m]\Phi = 0, \qquad /4.8/$$

где

$$\nu_m = [\sum_k \sqrt{A_k}\,\omega_{km}].$$

Алгоритм линеаризации, использующий готовую алгебру, не дает структуры основного базиса Φ, как это мы имели в результате применения алгоритма 1. Целью настоящего раздела является изложение алгоритма, который одновременно с алгеброй Клиффорда позволит получить и структуру базиса Φ.

Алгоритм 2. Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(p_1, p_2):= p_1^2 + p_2^2 = 0. \qquad /4.9/$$

Выберем произвольный двумерный вектор $\vec{X}(x_1, x_2)$ и составим уравнения:

$$x_1 f = 0, \quad x_2 f = 0. \qquad /4.10/$$

В левую часть уравнений /4.10/ добавим заведомо нулевые выражения:

$$\begin{aligned} x_1 f &\to x_1 f + x_2 p_2 p_1 - x_2 p_1 p_2 \\ x_2 f &\to x_2 f + x_1 p_1 p_2 - x_1 p_2 p_1 . \end{aligned} \qquad /4.11/$$

Определим выражения

$$S = x_1 p_1 + x_2 p_2, \quad M_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1$$

и перепишем систему /4.11/

$$S p_1 + M_{12} p_2 = 0, \quad -S p_2 + M_{12} p_1 = 0, \qquad /4.12/$$

которой можно придать матричный вид

$$[p_1 E_2 + p_2 \sigma]\Psi = 0, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Psi = \begin{pmatrix} S \\ M_{12} \end{pmatrix}. \qquad /4.13/$$

Заметим, что систему /4.12/ в равной мере можно было бы записать так:

$$(S E_2 + M_{12}\sigma)\Phi = 0, \quad \Phi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \qquad /4.14/$$

или, в более общей форме,

$$[p_1 E_2 + p_2 \sigma][S E_2 - \sigma M_{12}] = 0. \qquad /4.15/$$

Форма записи в виде /4.14/ привлекательна тем, что S и E_2, σ и M_{12} -величины одной и той же природы, поскольку

$$S = (x_1\, x_2)(E_2)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \equiv x_i p_j E^{ij},$$
$$M_{12} = (x_1\, x_2)(\sigma)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \equiv x_i p_j \sigma^{ij}. \qquad /4.16/$$

Случай 4 переменных:

$$f(p):= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 0. \qquad /4.17/$$

Умножим f на компоненты вектора $\vec{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и прибавим к каждому уравнению выражения

$$\delta_n = [\epsilon^{ijk} p_i p_j p_k]_{(n)},$$

где индекс (n) означает, что область изменения натуральных чисел от 1 до 4 не включает n $(n = 1,2,3,4)$. ϵ^{ijk} - полностью антисимметричный тензор, поэтому

$$\delta_n = 0.$$

Итак, имеем следующую систему:

$$x_n f(p) \to x_n f(p) + \delta_n . \qquad /4.18/$$

Построим базис Φ из выражений

$$S = \sum_{k=1}^{4} x_k p_k, \quad M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i, \qquad /4.19/$$

$$\Phi := (S, M_{21} + M_{43}, M_{31} + M_{42}, M_{41} + M_{32}) = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4). \qquad /4.20/$$

С учетом /4.20/, систему /4.18/ перепишем в виде:

$$\begin{aligned} p_1\Psi_1 - p_2\Psi_2 - p_3\Psi_3 - p_4\Psi_4 &= 0, \\ p_1\Psi_2 + p_2\Psi_1 - p_3\Psi_4 + p_4\Psi_3 &= 0, \\ p_1\Psi_3 + p_2\Psi_4 + p_3\Psi_1 - p_4\Psi_2 &= 0, \\ p_1\Psi_4 - p_2\Psi_3 + p_3\Psi_2 + p_4\Psi_1 &= 0; \end{aligned} \qquad /4.21/$$

/4.21/ легко придать матричную форму

$$(p_1\tau_1 + p_2\tau_2 + p_3\tau_3 + p_4\tau_4)\Phi = 0,$$

где $\tau_1 = E_4$,

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}. \qquad /4.22/$$

Таким образом,

$$\Psi_k = \tau_k^{ij} x_i p_j .$$

Наиболее общая форма матричной записи будет иметь вид

$$[p_1\tau_1 + p_2\tau_2 + p_3\tau_3 + p_4\tau_4][\Psi_1\tau_1 - \Psi_2\tau_2 - \Psi_3\tau_3 - \Psi_4\tau_4] = 0. \qquad /4.23/$$

Случай 8 переменных

$$f(p): = \sum_{k=1}^{8} p_k^2. \qquad /4.24/$$

Умножая $f(p)$ на компоненты 8-мерного вектора $X(x_1, x_2, \dots, x_8)$, получим

$$x_n f(p) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, 8).$$

Аналогичным образом преобразуя эту систему, придем к матричному уравнению

$$[\sum_{k=1}^{8} \tau_k^{(8)} p_k]\Phi = 0, \qquad /4.25/$$

где компоненты $\Phi(\Psi_1, \dots, \Psi_8)$ есть

$$\Psi_k = \tau_k^{ij}(8) x_i p_j, \qquad (k, j, i = 1, 2, \dots, 8).$$

Матрицы $\tau_k(8)$, $(k = 1, \dots, 8)$ получаются из $\tau_n(4)$, $(n = 1, \dots, 4)$, следующим образом. Кроме базиса /4.22/ существует еще базис матриц $\tau_n^-(4)$, $(n = 1, \dots, 4)$, коммутирующий с $\tau_n(4)$. Он получается в результате отражения $p_n \to -p_n$, $x_n \to -x_n$ $(n = 2, 3, 4)$. Тогда

$$\tau_k(8): = \begin{pmatrix} -\tau_k(4) & 0 \\ 0 & \tau_k(4) \end{pmatrix}, \quad \tau_{k+3}(8): = -\begin{pmatrix} 0 & \tau_k^-(4) \\ \tau_k^-(4) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1(8): = E_8, \quad \tau_8(8): = \begin{pmatrix} 0 & -E_4 \\ E_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (k = 2, 3, 4). \qquad /4.26/$$

На случай 2^n переменных формула /4.26/ обобщается так:

$$\tau_k(2^n): = \begin{pmatrix} -\tau_k(2^{n-1}) & 0 \\ 0 & \tau_k(2^{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$\tau_p(2^n): = -\begin{pmatrix} 0 & \tau_k^-(2^{n-1}) \\ \tau_k^-(2^{n-1}) & 0 \end{pmatrix}, \qquad /4.27/$$

$$\tau_{2^n}(2^n): = \begin{pmatrix} 0 & -E_{2^{n-1}} \\ E_{2^{n-1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1(2^n): = E_{2^n}.$$

Матричное уравнение принимает вид

$$[\sum_{k=1}^{2^n} \tau_k(2^n) p_k]\Phi = 0,$$

$$\Phi = \Phi(\Psi_1, \dots), \quad \Psi_k = \tau_k^{ij}(2^n) x_i p_j. \qquad /4.28/$$

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Введение понятия дифференциала и его широкое применение основано на предположении, что функция $y = f(x)$ на бесконечно /сколь угодно/ малом интервале значений аргумента Δx может быть заменена прямой, т.е. линейной, функцией. Таким образом, замена приращения Δf его дифференциалом df есть приближение высокими степенями сколь угодно малой /но не тривиальной!/ величины $\Delta x = dx$. Такое приближение продиктовано желанием получить именно линейное выражение. Ясно, что путь обобщения понятия дифференциала с учетом более высоких степеней Δx бесперспективен, ибо нарушает линейность. Однако метод матричной линеаризации позволяет преодолеть эту трудность, поскольку в матричном представлении для $\Delta\hat{X}$ теория снова становится линейной.

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, определенную в некотором промежутке x и непрерывную в рассматриваемой точке x_o. Тогда приращению Δx аргумента отвечает приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o), \qquad /5.1/$$

бесконечно малое вместе с Δx.

Если существует для Δy представление

$$\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x), \qquad /5.2/$$

где A - постоянная, $0(\Delta x)$ - бесконечно малая более высокого, чем Δx, порядка, то $A\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ и обозначается через dy.

Далее, предположим, что производные до n-го порядка для $f(x)$ также определены и существуют.

Рассмотрим разложение /5.1/ в ряд Тейлора в точке x_o до Δx^n включительно:

$$\Delta f = f'\Delta x + f''\Delta x^2 + \dots + f^{(n)}\Delta x^n. \qquad /5.3/$$

Рассматривая /5.3/ как уравнение n-степени относительно Δx, запишем линейное матричное уравнение для определения СМ для $\Delta\hat{X}$:

$$F \cdot D\hat{X} = Df$$

$$F: = \begin{pmatrix} f^{(n)} & f^{(n-1)} & \dots & f^{(2)} & f^{(1)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /5.4/$$

$$Df: = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & df \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad /5.5/$$

Выражение Df будем называть матричным дифференциалом функции $y = f(x)$, а DX - матричным дифференциалом аргумента x. Здесь важно, что DX входит в /5.5/ линейно. Обобщение /5.5/ на многомерный случай не представляет труда. В этом случае будем иметь

$$\sum_{k=1}^{M} F_k \cdot DX_k = Df, \qquad /5.6/$$

где F_k $(k = \overline{1, M})$ зависят от частных производных f до n-го порядка включительно.

В качестве примера определим Df и DX, ограничиваясь квадратичным по Δx членом. Получим

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f' \Delta x + f'' \Delta x^2.$$

Перепишем это уравнение как систему

$$f'' dx \alpha + f' dx - df = 0, \quad dx - \alpha = 0.$$

Выберем базисный вектор $\Psi: = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} f'' & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dx \Psi + \begin{pmatrix} 0 & -df \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi = 0.$$

Устраняя Ψ из "игры", получим линейное матричное соотношение

$$\begin{pmatrix} f'' & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & df \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /5.7/$$

По аналогии матрицу перед DX можно называть матричной производной функции f.

Автор выражает признательность Р.Егикяну и Н.Хуторному за помощь в работе и стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M.- Proc.Roy.Soc., 1928, vol.A117, p.610;
Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц. М.: ИЛ, 1947;
Богуш А.А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. Минск: Наука и техника, 1981.
2. Кузнецов П.Г., Пшеничников С.Б. - ДАН СССР, 1985, т.283, № 5, с.1075.

3. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р11-85-815, Дубна, 1985; ОИЯИ, Р5-86-250, Дубна, 1986.
4. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
5. Мысовских И.Н. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
6. Уилкинсон Д.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
7. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Ямалеев Р.М. Р5-86-833

Метод редукции полиномиально-нелинейных уравнений в линейные матричные уравнения

С помощью метода матричной линеаризации полиномиально-нелинейной системе уравнений сопоставляется система линейных неоднородных матричных уравнений. Решения линейных уравнений - сопровождающие матрицы - являются общими решениями исходной нелинейной задачи в матричном представлении. Приводится алгоритм построения структуры базисного вектора и матриц-коэффициентов линейной неоднородной системы. Излагается метод разделения неизвестных в полиномиально-нелинейной задаче. Предложен алгоритм построения базисного вектора и унитарной матрицы, столбцы /строки/ которой состоят из собственных векторов, в методе линеаризации квадратных уравнений с помощью алгебры Клиффорда. Введены понятия матричного дифференциала и матричной производной для многомерной функции.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Yamaleev R.M. P5-86-833

Method of Reduction of Polynomially Nonlinear Equations to Linear Matrix Equations

Using the method of matrix linearization of polynomially nonlinear equation system a system of linear nonhomogeneuos matrix equations is compared. Solutions of linear equations-accompanying matrices-are general solutions of original nonlinear problem in matrix representation. The algorithm of constructing the structure of basic vector and matrice-coefficients of linear system is given. A method for separating unknowns in polynomially nonlinear problem is expounded. The algorithm of construction of basic vector and unitary matrix, the columns of which consist of eigenvectors, in the method of linearization of quadratic equations by means of the Clifford algebra is proposed. The concepts of matrix differential and matrix derivative for multidimensional function are introduced.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986