86-801.

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-801

И.Д.Илиев, К.П.Кирчев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БЕГУЩИХ ВОЛН ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ФРИЗА

1986

В настоящей работе исследуется вопрос устойчивости решений вида бегущей волны в классе убывающих функций для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t + (a(u))_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in R, \quad t \geq 0 \quad (GKdV). \qquad /1/$$

В пионерской работе [1], используя спектральный метод, Бенжамен показал устойчивость формы решения вида уединенной волны для уравнения /1/ в случае, когда $(a(u))_x = uu_x$. Некоторые неточности, допущенные в [1], были исправлены Боной [2].

В настоящей работе, развивая идеи Бенжамена, мы доказали устойчивость формы решения вида бегущей волны для уравнения /1/ в случае, когда нелинейность $a(u)$ удовлетворяет некоторым естественным достаточным условиям. В частности, когда $(a(u))_x = u^n u_x$, получается устойчивость при $n < 4$ и $n = 2$, откуда вытекает результат работы [3] в вещественном случае. В работе [4] тоже на основе идеи Бенжамена независимо получены подобные результаты для уравнения /1/. А в [5], используя геометрический метод, основанный на принципе компактности П.Л.Лионса [6], автор доказал устойчивость уединенной волны для уравнения /1/ в случае, когда $(a(u))_x = u^n u_x$, $n < 4$.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Для удобства в дальнейшем будем предполагать, что $a(u)$ - функция достаточно гладкая и нормирована условием

$$a(0) = 0. \qquad /2/$$

Зафиксируем константу c:

$$c < a'(0) \qquad /3/$$

и будем искать решения /1/ в виде бегущей волны:

$$u(x,t) = \Phi(x - ct), \quad \Phi(y) \in C^3(R),$$

$$\Phi(y) = \Phi'(y) = \Phi''(y) = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm\infty. \qquad /4/$$

Подставляя /4/ в /1/ и два раза интегрируя в силу /2/, получаем уравнение

$$\Phi'^2 = U(\Phi), \quad \text{где} \quad U(s) = cs^2 - 2\int_0^s a(z)\,dz. \qquad /5/$$

Допустим, что функция U удовлетворяет условию:

/H1/. Существует константа $A = A(c) > 0$ такая, что $U(A) = 0$, $U'(A) = 0$, $U(s) > 0$ для $0 < s < A$. Если /H1/ выполняется, то искомое решение $\Phi = \Phi(y)$ определяется при помощи формулы

$$\int_{\Phi}^{A} \frac{dz}{\sqrt{U(z)}} = |y| . \qquad /6/$$

В дальнейшем, когда мы захотим подчеркнуть зависимость Φ от c как от параметра, то будем писать $\Phi = \Phi(y, c)$.

Ясно, что в /H1/ условие существования A, $U(A) = 0$ гарантирует ограниченность Φ, а условие $U'(A) \neq 0$ поставлено для того, чтобы Φ имела форму "колокола", так как в случае $U'(A) = 0$ Φ имела бы форму кинка.

Обозначим $\sigma = \sqrt{c - a'(0)}$. Для удобства перечислим основные свойства Φ в следующей лемме.

Лемма 1. Φ является четной функцией, $\Phi(0) = A$, $0 < \Phi(y) < A$ при $y \neq 0$. Имеют место оценки

$$\left| \frac{d^k \Phi(y)}{dy^k} \right| \leq \mathrm{const} \cdot e^{-\sigma |y|}, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

Функция $\Phi(y, c)$ дифференцируема по параметру c, и для производной Φ_c выполняются оценки:

$$\left| \frac{d^k \Phi_c(y)}{dy^k} \right| \leq \mathrm{const} \cdot (1 + |y|) e^{-\sigma |y|}, \quad k = 0, 1; \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

Мы докажем устойчивость решения $\Phi(x - ct)$ относительно псевдометрики

$$d(u, \Phi) = \inf_{\zeta \in \boldsymbol{R}} \| u(x, t) - \Phi(x - \zeta - ct) \|_1 . \qquad /7/$$

Здесь $\|\cdot\|_1$ - норма в пространстве Соболева $H^1(\boldsymbol{R})$.

Как известно [7], задача Коши /1/, /8/

$$u(x, 0) = u_0(x) \in H^s(\boldsymbol{R}), \quad s > 3/2 \qquad /8/$$

имеет единственное решение $u(x, t)$, которое принадлежит классу $C([0, T); H^s) \cap C^1([0, T); H^{s-3})$, где T зависит только от $\|u_0\|_s$.

Условимся в дальнейшем под $[0, T)$ понимать интервал, на котором в силу теоремы Като [7] существует единственное решение $u(x,t)$ задачи Коши /1/, /8/. Отметим, что при некоторых дополнительных требованиях к нелинейности $a(u)$ можно доказать, что $T = \infty$, т.е. существует глобальное решение задачи /1/, /8/.

Для заданного $u \in L_2(\boldsymbol{R})$ обозначим

$$Q(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x)\, dx . \qquad /9/$$

Используя результаты Като [7], несложно показать, что если $u(x, t) \in H^s$, $s > 3/2$ является решением /1/, то нелинейный функционал $Q(u)$ инвариантен по времени. Второе основное предположение теоремы будет:

/H2/. $\frac{d}{dc} Q(\Phi) > 0$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия /H1/ и /H2/ и пусть $u(x, t) \in C([0, T); H^s(\boldsymbol{R}))$, $s > 3/2$ - решение задачи Коши /1/,/8/. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $d(u, \Phi)|_{t=0} < \delta$, то $d(u, \Phi) < \epsilon$ для всех $t \in [0, T)$.

Доказательство теоремы мы получим, оценивая снизу вторую вариацию инвариантного по времени нелинейного функционала

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + P(u))\, dx , \qquad /10/$$

где $P(s) = -2 \int_0^s a(z)\, dz$, при помощи подходящих спектральных задач. При этом существенную роль будет играть /H2/. Условие устойчивости /H2/ для уравнения (GKdV), насколько нам известно, впервые появилось в работе [8].

Проиллюстрируем теорему в простом частном случае степенной нелинейности

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0, \quad p > 0.$$

Для каждого $c > 0$ условие /H1/ выполняется, и решение

$$\Phi(y) = \left(\frac{c(p+1)(p+2)}{2\, \mathrm{ch}^2 (py\sqrt{c}/2)} \right)^{1/p}, \quad y = x - ct.$$

Так как $Q(\Phi) = M c^{2/p - 1/2}$, где $M > 0$ - константа, зависящая только от p, условие /H2/ эквивалентно условию $\frac{2}{p} - \frac{1}{2} > 0$, т.е. $p < 4$.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Доказательство леммы 1 элементарное. Действительно, из определения $U(s)$ и в силу /3/ следует, что $U(0) = U'(0) = 0$, $U''(0) = 2\sigma^2 > 0$. Отсюда, используя /H1/ и /6/, получаем $\Phi(y) \to A$ при $y \to 0$, $\Phi(y) \to 0$ при $|y| \to \infty$ и $0 < \Phi(y) < A$ при $y \neq 0$.

Пусть константы $K > 0$, $A_0 > 0$ выбраны таким образом, чтобы имело место неравенство $|b(z)| \leq K z^{\alpha} < \sigma^2$ при $0 \leq z \leq A_0$ /для нас интересен случай $A_0 \leq A$ /. Здесь $b(z) = a'(z) - a'(0)$. Выбираем $y_0 \geq 0$ таким образом, чтобы $\Phi(y_0) = A_0$. В таком случае $\Phi(y) \leq A_0$ для $|y| \geq y_0$ и, следовательно, с некоторым z^*, $0 \leq z^* \leq z$ имеем

$$\int\limits_{\Phi}^{A_0} \frac{dz}{\sqrt{U(z)}} = \int\limits_{\Phi}^{A_0} \frac{dz}{\sigma z} + \int\limits_{\Phi}^{A_0} \frac{b(z^*)\,dz}{\sigma z\sqrt{\sigma^2 - b(z^*)}\,(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - b(z^*)})} \le$$

$$\le \int\limits_{\Phi}^{A_0} \frac{dz}{\sigma z} + \int\limits_{0}^{A_0} \frac{Kz^{\alpha-1}\,dz}{\sigma\sqrt{\sigma^2 - Kz^\alpha}\,(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - Kz^\alpha})} = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{A_0}{\Phi(y)} + B,$$

где B - значение последнего интеграла.

Таким образом, из /6/ вытекает

$$\sigma|y| - \ln\frac{A_0}{\Phi(y)} \le \sigma(y_0 + B) \qquad \text{при} \quad |y| \ge y_0.$$

Отсюда получаем оценку

$$\Phi(y) \le \text{const}\cdot\exp[-\sigma|y|], \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

Оценки для $\dfrac{d^k\Phi}{dy^k}$, $1 \le k \le 3$ вытекают из неравенств

$$U(\Phi) \le \text{const}\cdot\Phi^2, \quad |U'(\Phi)| \le \text{const}\cdot\Phi, \quad |U''(\Phi)| \le \text{const}$$

и из уравнений, которым Φ удовлетворяет:

$$\Phi'^2 = U(\Phi); \quad \Phi'' = \frac{1}{2}U'(\Phi); \quad \Phi''' = \frac{1}{2}U''(\Phi)\Phi'. \qquad /11/$$

Используя /Н1/, получаем $U(s,c) = 0$, $\dfrac{d}{ds}U(s,c) \ne 0$ при $s = A$. Следовательно, из теоремы о неявной функции вытекает, что $A(c)$ является дифференцируемой функцией от $c (c > a'(0))$.

Если положим $z_1(y) = \Phi(y)$, $z_2(y) = \Phi'(y)$, то получим, что z_1 и z_2 являются решениями задачи Коши

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = U'(z_1, c), \quad z_1(0) = A(c), \quad z_2(0) = 0.$$

В таком случае теорема о дифференцируемости по параметру дает, что функции $z_j = z_j(y,c)$ дифференцируемы по параметру c. Пусть $\Phi_c = \dfrac{\partial}{\partial c}\Phi(y,c)$. Чтобы получить оценку для $\Phi_c(y)$, $y \ge y_0$, продифференцируем /5/ по c. Получим, что Φ_c удовлетворяет уравнению

$$\Phi_c' = \frac{U'(\Phi)}{2\Phi'}\Phi_c + \frac{\Phi^2}{2\Phi'}. \qquad /12/$$

Далее при некотором значении Φ^*, $0 \le \Phi^* \le \Phi$ имеем

$$\frac{U'(\Phi)}{2\Phi'} = -\sigma + \frac{b(\Phi^*)}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - b(\Phi^*)}}.$$

Отсюда при $y \ge y_0$

$$\left|\int\limits_{y_0}^{y} \frac{U'(\Phi)}{2\Phi'}dz + \sigma y\right| \le \int\limits_{y_0}^{\infty} \frac{K\Phi^\alpha}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - K\Phi^\alpha}} + \sigma y_0 = B_1 + \sigma y_0,$$

$B_1 = \text{const}$. Верхняя оценка и равенство

$$\frac{\Phi^2}{2\Phi'} = \frac{\Phi}{2\sqrt{\sigma^2 - b(\Phi^*)}}$$

дают

$$\left|\frac{\Phi^2(z)}{2\Phi'(z)}\exp\left(-\int\limits_{y_0}^{z}\frac{U'(\Phi)}{2\Phi'}d\theta\right)\right| \le \text{const}\cdot\Phi(z)\,e^{\sigma z} \le \text{const}, \quad z \ge y_0.$$

Решая линейное уравнение /12/ и применяя полученные оценки, выводим

$$|\Phi_c(y)| \le \text{const}\cdot(1+y)\,e^{-\sigma y}, \quad y \ge y_0.$$

Оценка для $|\Phi_c'(y)|$ вытекает непосредственно из /12/. Теперь, учитывая, что Φ_c - четная функция, а Φ_c' - нечетная, получаем окончательно утверждения леммы 1.

Лемма 2 /см. [2,3,9] /. Пусть $u(x,t) \in C([0,T);\ H^s(\boldsymbol{R}))$, $s > 3/2$ - решение /1/. (i). Пусть $d(u,\Phi) < \|\Phi\|$. Тогда inf в /7/ достигается в конечной точке $\zeta = \zeta(t)$.

(ii). $d(u,\Phi)$ - непрерывная функция от $t \in [0,T)$. В (i) $\|\cdot\|$ - норма в $L_2(\boldsymbol{R})$.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

1. Основным моментом в доказательстве теоремы 1 является доказательство следующего утверждения. Существуют константы $\delta_0 > 0$, $m > 0$, не зависящие от t, такие, что из $d(u,\Phi) < \delta_0$ следует

$$E(u) - E(\Phi) \ge md^2(u,\Phi), \qquad /13/$$

в специальном случае, когда

$$Q(u) = Q(\Phi). \qquad /14/$$

Поэтому сначала докажем /13/. Зафиксируем $t \in [0,T)$ и пусть минимум в /7/ достигается /в силу леммы 2/ в точке $\zeta = \zeta(t)$. Положим $h(x,t) = u(x,t) - \Phi(x - \zeta - ct)$. Таким образом, имеем $d(u,\Phi) = \|h\|_1$. Подставляя в /13/ $u = \Phi + h$, получаем

$$\Delta E = E(u) - E(\Phi) = -2\int(\Phi'' + a(\Phi))h\,dx + \int(h_x^2 - a'(\Phi^*)h^2)\,dx,$$

$$\Phi^* = \Phi + \theta h, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

При помощи /11/ и /14/ последовательно выводим

$$-2\int(\Phi''+a(\Phi))h\,dx=-2c\int\Phi h\,dx=c\int h^2dx.$$

Отсюда

$$\Delta E=\int(h_x^2+(c-a'(\Phi)h^2)dx+\int(a'(\Phi)-a'(\Phi^*))h^2\,dx=\delta^2E+I,$$

где $I\le K\sup|h|^{\alpha}\ ||h||^2_1$; K - константа /Гёлдера/.

Чтобы оценить вторую вариацию E, представим δ^2E в виде $\delta^2E=(Lh,h)$, где

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+c-a'(\Phi)=-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}U''(\Phi). \qquad /15/$$

Оператор L допускает самосопряженное расширение в $L_2(\boldsymbol{R})$ с непрерывным спектром $\sigma_{ess}=[\sigma^2,\infty)$, так как потенциал $c-a'(\Phi)$ стремится к пределу $c-a'(0)=\sigma^2$ при $|x|\to\infty$. Собственные числа оператора L являются простыми. Из /11/ вытекает, что $L\Phi'=0$, и так как Φ' аннулируется только в нуле, то L имеет одно отрицательное собственное число. Из-за инвариантности L относительно сдвига аргумента $x\to x+\theta$; спектр /15/ не зависит от t. Эти свойства оператора L мы будем существенно использовать при получении оценки для δ^2E.

Обозначим через λ_- и ϕ_- отрицательное собственное число оператора L и соответствующую ему нормированную собственную функцию. Кроме того, обозначим через $\ell>0$ самое малое положительное собственное число оператора L /если L не имеет положительных собственных чисел, положим $\ell=\sigma^2$/.

Зафиксируем y и продифференцируем по c равенство

$$\Phi''(y,c)=\frac{1}{2}U'(\Phi(y,c))=\frac{1}{2}U'(\Phi(y,c),c).$$

Тогда, обозначая через нижний индекс c соответствующие частные производные, получаем

$$\Phi_c''(y,c)=\frac{1}{2}U''(\Phi(y,c))\,\Phi_c(y,c)+\Phi(y,c).$$

Полагая $y=x-\zeta-ct$, доходим до соотношения

$$\Phi=-L\Phi_c. \qquad /16/$$

Разложим h и Φ_c по собственным функциям L:

$$h=h_-+h_0+h_+,\quad h_-=(h,\phi_-)\phi_-,\quad h_0=\frac{(h,\Phi')\Phi'}{||\Phi'||^2},$$

$$\Phi_c=f_-+f_0+f_+,\quad f_-=(\Phi_c,\phi_-)\phi_-,\quad f_0=\frac{(\Phi_c,\Phi')\Phi'}{||\Phi'||^2}.$$

Таким образом, $Lh=\lambda_-h_-+Lh_+$, $L\Phi_c=\lambda_-f_-+Lf_+$,

$$(Lh,h)=\lambda_-||h_-||^2+(Lh_+,h_+). \qquad /17/$$

Наша первая цель - оценить снизу (Lh_+,h_+). Из спектрального разложения оператора L вытекает

$$(Lh_+,h_+)\ge\ell||h_+||^2. \qquad /18/$$

С другой стороны, из /14/, /16/ следует, что

$$\frac{1}{2}||h||^2=-(\Phi,h)=(L\Phi_c,h_-+h_0+h_+)=\lambda_-(f_-,h_-)+(Lf_+,h_+).$$

Отсюда немедленно получаем

$$|(Lf_+,h_+)|\ge|\lambda_-||f_-||\ ||h_-||+\frac{1}{2}||h||^2|. \qquad /19/$$

Кроме того, из спектрального разложения L в силу неравенства Коши-Буняковского вытекает, что

$$(Lf_+,h_+)^2\le(Lf_+,f_+)(Lh_+,h_+). \qquad /20/$$

Теперь воспользуемся условием /H2/. Имеем

$$0<\frac{d}{dc}Q(\Phi)=2(\Phi,\Phi_c)=-2(L\Phi_c,\Phi_c)=-2\lambda_-||f_-||^2-2(Lf_+,f_+).$$

Так как f_-, f_+, Lf_+ являются функциями одного и того же аргумента $y=x-\zeta-ct$, то оба слагаемых в верхнем выражении не зависят от t. Следовательно, мы можем фиксировать константу m_1, $0<m_1<1$, эвентуально зависящую от c, но не зависящую от t, таким образом, чтобы

$$(Lf_+,f_+)\le-m_1\lambda_-||f_-||^2. \qquad /21/$$

Комбинируя /19/, /20/ и /21/, получаем еще одну оценку снизу для (Lh_+,h_+):

$$(Lh_+,h_+)\ge\frac{(\lambda_-||f_-||\ ||h_-||+\frac{1}{2}||h||^2)^2}{-m_1\lambda_-||f_-||^2}= \qquad /22/$$

$$=-\frac{\lambda_-}{m_1}||h_-||^2-\frac{||h_-||\ ||h||^2}{m_1||f_-||}+\frac{||h||^4}{-4m_1\lambda_-||f_-||^2}.$$

Располагая оценками /18/ и /12/, положим $\mu=(\ell-\lambda_-)/(\ell-\frac{\lambda_-}{m_1})$ /очевидно, $0<\mu<1$/, умножим /22/ на μ, а /18/ на $1-\mu$, и сложим полученные неравенства. В комбинации с /17/ доходим до неравенства

$$(Lh,h)\ge m_2||h_-+h_+||^2-m_3||h||^3+m_4||h||^4, \qquad /23/$$

где

$m_2 = (1-\mu)\ell$, $m_3 = \mu(m_1\|f_-\|)^{-1}$, $m_4 = \mu(-4m_1\lambda_-\|f_-\|^2)^{-1}$.

Очевидно, $m_j > 0$ - константы, которые могут эвентуально зависеть от c, но не зависят от t.

Чтобы окончательно получить оценку для $\delta^2 E$, остается оценить $\|h_0\|$ через $\|h_- + h_+\|$.

Для этого мы воспользуемся тем фактом /лемма 2 (i)/, что минимум в /7/ достигается в конечной точке $\zeta = \zeta(t)$, когда $\delta_0 \le \|\Phi\|_1$. Следовательно, в точке минимума $\frac{\partial}{\partial\zeta} d^2(u,\Phi) = 0$, или, что эквивалентно, $(h, \Phi''' - \Phi') = 0$. Отсюда последовательно получаем $(h_0, \Phi' - \Phi''') = (h_- + h_+, \Phi''' - \Phi')$, и, так как $h_0 = \beta\Phi'$,

$$|\beta| = \frac{\|h_0\|}{\|\Phi'\|}, \quad \text{то}$$

$$|\beta|(\|\Phi'\|^2 + \|\Phi''\|^2) \le \|\Phi''' - \Phi'\| \, \|h_- + h_+\|.$$

Следовательно,

$$\|h_0\| \le m_0 \|h_- + h_+\|, \qquad /24/$$

где

$$m_0 = \|\Phi''' - \Phi'\| \, \|\Phi'\| (\|\Phi'\|^2 + \|\Phi''\|^2)^{-1}$$

зависит только от c.

Объединяя /23/, /24/ и оценку для $|I|$, получаем

$$\Delta E \ge \|h\|^2 \left(\frac{m_2}{1+m_0} - m_3\|h\| + m_4\|h\|^2 - K \sup|h|^a\right).$$

С другой стороны, непосредственно оценивая ΔE, получаем

$$\Delta E \ge \|h_x\|^2 - \|h\|^2 \sup|c - a'(\Phi^*)| .$$

Выбирая $\delta_0 > 0$ достаточно малым, при $\|h\|_1 < \delta_0$ из верхних двух неравенств получим, что $\Delta E \ge m\|h\|_1^2$, где константа m не зависит от t.

2. Доказательство теоремы в случае $Q(u) = Q(\Phi)$

Возьмем константу $M \ge m$, такую, чтобы $\Delta E \le M d^2(u_0,\Phi)$ /напомним, что ΔE не зависит от t/. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и обозначим

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{M}} \min\left(\epsilon, \frac{\delta_0}{2}\right). \qquad \text{Тогда}$$

$$d(u_0,\Phi) < \delta \Rightarrow d(u_0,\Phi) < \frac{\delta}{2} \Rightarrow$$

/так как $d(u,\Phi)$ - непрерывна/ $d(u,\Phi) < \delta_0$,

$t \in [0, T_0)$, $T_0 > 0 \Rightarrow \Delta E \ge m d^2(u,\Phi)$, $t \in [0, T_0)$.

Обозначим через T_{max} самое большое T_0, для которого эта оценка остается в силе. Если допустить, что $T_{max} < T$, то для $t \in [0, T_{max})$ будем иметь

$$m d^2(u,\Phi) \le \Delta E < M\delta^2 \Rightarrow d(u,\Phi) < \frac{\delta_0}{2} \Rightarrow d(u,\Phi) < \delta_0 \quad \text{для} \quad t \in [0, T_1),$$

$$T_1 > T_{max} \Rightarrow \Delta E > m d^2(u,\Phi), \quad t \in [0, T_1),$$

что противоречит допущенному. Следовательно, $T_{max} = T$, и для $t \in [0, T)$ имеем:

$$m d^2(u,\Phi) \le \Delta E < M\delta^2 \Rightarrow d(u,\Phi) < \epsilon, \quad t \in [0, T).$$

3. Доказательство теоремы в случае $Q(u) \ne Q(\Phi)$

Фиксируем интервал параметров $A = [c - \Delta, c + \Delta]$ таким образом, чтобы:

а/ $0 < \Delta < c - a'(0)$,

б/ в A выполнялись условия /H1/ и /H2/.

Обозначим через $q > 0$ минимум в A функции $\frac{1}{2\sqrt{Q}} \frac{dQ}{dc}$. Если $d(u_0, \Phi) \le q\Delta$, то существует $c_0 \in A$ такое, что $Q(u_0) = Q(\Phi_0)$, где для кратности мы обозначили $\Phi_0 = \Phi(y, c_0)$. Действительно,

$$d(u_0,\Phi) \ge \|u_0 - \Phi(x-\zeta)\| \ge \big|\, \|u_0\| - \|\Phi\| \,\big| ,$$

и, следовательно,

$$\|u_0\| \le \sqrt{Q(\Phi(y,c))} + q\Delta \le \sqrt{Q(\Phi(y, c+\Delta))}.$$

Аналогично $\|u_0\| \ge \sqrt{Q(\Phi(y, c-\Delta))}$. Отсюда вытекает существование $c_0 \in A$.

Имеем

$$d^2(\Phi,\Phi_0) \le \|\Phi - \Phi_0\|_1^2 \le (c - c_0)^2 \left(\max_A \|\Phi_c\|^2 + \max_A \|\Phi_c'\|^2\right) =$$

$$= (c - c_0)^2 M_1^2, \quad M_1 = \text{const}.$$

С другой стороны,

$$\big|\, \|u_0\| - \|\Phi\| \,\big| = \big|\, \|\Phi_0\| - \|\Phi\| \,\big| \ge q|c - c_0|.$$

Верхние две оценки дают

$$d(\Phi,\Phi_0) \le \frac{M_1}{q} d(u_0,\Phi).$$

Пусть теперь $\epsilon_1 > 0$. Ищем δ_1, $0 < \delta_1 < q\Delta$ такое, чтобы $d(u_0, \Phi) < \delta_1 \Rightarrow d(u, \Phi) < \epsilon_1$ для $t \in [0, T)$. Существование δ_1 вытекает из импликаций

$$d(u_0, \Phi) < \delta_1 \Rightarrow d(u_0, \Phi_0) < (1 + \frac{M_1}{q})\delta_1 = \delta \Rightarrow$$

/из доказанной части теоремы 1/

$$d(u, \Phi_0) < \epsilon, \quad t \in [0, T) \Rightarrow$$

$$d(u, \Phi) < \epsilon + \frac{M_1}{q}\delta_1 = \epsilon_1, \quad t \in [0, T).$$

Тем самым теорема 1 доказана.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность П.Е.Жидкову и В.Г.Маханькову за полезное обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T.B. Proc.R.Soc. Lond., 1972, A328, p.153.
2. Bona J. Proc.Soc. Lond., 1975, A344, p.363.
3. Жидков Е.П., Илиев И.Д., Кирчев К.П. Сиб.матем.ж., т.26, № 6, с.39.
4. Weinstein M.I. Comm.Pure Appl.Math., 1986, v.39, No.1, p.51.
5. Жидков П.Е. ОИЯИ, Р5-86-800, Дубна, 1986.
6. Cazenave T., Lions P.L. Comm.Math.Phys., 1982, v.85, No.4, p.549.
7. Kato T. Manuscripta Math., 1979, v.28, p.88.
8. Kuznetsov E.A. Phys.Lett. A., 1984, v.101, No.7, p.314.
9. Жидков Е.П., Кирчев К.П. ЭЧАЯ, 1985, т.16, вып.3, с.597.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Илиев И.Д., Кирчев К.П. Р5-86-801

Об устойчивости бегущих волн для нелинейных уравнений типа уравнения Кортевега-де Фриза

Доказано, что если нелинейность удовлетворяет некоторым условиям, то уравнение $u_t + (a(u))_x + u_{xxx} = 0$, $x \in R$, $t \geq 0$ имеет решения вида бегущей волны в классе убывающих функций, и эти решения являются устойчивыми.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Iliev I.D., Kirchev K.P. P5-86-801

The Stability of Traveling Wave-Solutions of KdV-Type Nonlinear Equations

It is proved that if the nonlinearity satisfies sufficient conditions, then the equation $u_t + (a(u))_x + u_{xxx} = 0$, $x \in R$, $t \geq 0$ has decreasing traveling wave-solutions which are stable.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Thechniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986