сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-86-800

П.Е.Жидков

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ВИДА УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ФРИЗА

1986

1^{0}. В работе изучаются вопросы устойчивости решений вида уединенной волны (солитоноподобных решений) для обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза:

$$u_t + u_x + u^{\nu} u_x + u_{xxx} = 0, \; -\infty < x < \infty \;, \; t > 0 \;, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \; . \tag{2}$$

Уравнение (I) описывает многочисленные физические явления (см. /I-4/). В частности, при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ оно превращается в уравнение Кортевега – де Фриза и модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза соответственно.

Уединенной волной (солитоноподобным решением) называется решение уравнения (I) вида $\Phi(x-vt)$, где $v=\mathrm{const}$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \Phi(x) = 0$. Исследованию устойчивости этих решений, численному и теоретическому, посвящены многочисленные работы (см. /3-5/). Первой строгой работой в этом направлении является работа Бенжамина /6/, в которой впервые введено понятие "устойчивости формы" солитона и доказана теорема об устойчивости для $\nu = 1$. Метод Бенжамина для некоторых уравнений развит в работах /7-I0/.

В настоящей статье доказана устойчивость уединенных волн по Бенжамину для $0 < \nu < 4$, $\nu = \frac{n}{2m-1}$, где n, m – натуральные. Развивается техника, предложенная в работах /II-I5/.

2^{0}. Уединенные волны для уравнения (I) найдены в /3/ и имеют вид

$$\Phi(x,t) = \left\{ A \,\mathrm{sech}\, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{A\nu}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)}} (x-vt-x_0) \right\}^{2/\nu} ,$$

где $A > 0$, x_0 – произвольные постоянные, $v=2A^2/\left[(\nu+1)(\nu+2)\right]+1$. Введем следующие обозначения. Обозначим через $H^1(R^1)$ пространство Соболева С.Л. с нормой $\|u\| = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (u^2+u_x^2)dx \right\}^{1/2}$, $|u|_p = \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^p dx\right\}^{1/p}$. Очевидно, что $\Phi(x) \in H^1(R^1)$, $|\Phi|_p < \infty$. Задача (I)-(2) имеет законы сохранения $\mathcal{E}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} u^{\nu+2} \right\} dx$, $K(u) = |u|_2^2$. Формальное доказательство этого факта очевидно. Действительно,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x u_{xt} - \frac{1}{\nu+1} u^{\nu+1} u_t)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u_t(u_{xx} + \frac{1}{\nu+1} u^{\nu+1})dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (u_x + u^{\nu} u_x + u_{xxx})(u_{xx} + \frac{1}{\nu+1} u^{\nu+1})dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(u_{xx} + \frac{1}{\nu+1} u^{\nu+1})^2 \right]_x dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} u_x(u_{xx} + \frac{1}{\nu+1} u^{\nu+1})\, dx = 0$$

и аналогично $\frac{dK(u(x,t))}{dt} = 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\nu \in (0,4)$, $\nu = \frac{n}{2m-1}$, где n, m – натуральные, и задача Коши (I)-(2) при любом $u_0 \in H^1(R^1)$ имеет решение $u(\cdot,t) \in H^1(R^1)$, определенное для всех $t > 0$ и непрерывное как отображение $t \to H^1(R^1)$, причем не зависят от времени t величины $\mathcal{E}(u)$ и $K(u)$. Оправданием такому предположению служит априорная оценка из леммы 2.2.

Введем в рассмотрение функцию $\rho(u,v) = \inf_{\tau \in R^1} \|u(\cdot) - v(\cdot - \tau)\|$, определенную для любых $u, v \in H^1(R^1)$. Основной результат работы составляет

Теорема 2.I

Пусть $\nu \in (0,4)$, $\nu = \frac{n}{2m-1}$, где n, m – натуральные. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого решения задачи Коши (I)-(2) $u(x,t)$, удовлетворяющего неравенству $\rho(\Phi(\cdot,0), u_0(\cdot)) < \delta$, для всех $t > 0$ имеет место неравенство $\rho(\Phi(\cdot,t), u(\cdot,t)) < \varepsilon$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\nu \in (0,4)$, $\nu = \frac{n}{2m-1}$, где n, m – натуральные.

Имеет место

Лемма 2.I

Функционалы $\mathcal{E}$, K определены и непрерывно дифференцируемы на $H^1(R^1)$, причем $d\mathcal{E}(u,h) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x h_x - \frac{1}{\nu+1} h u^{\nu+1})dx$, $dK(u,h) = 2\int_{-\infty}^{\infty} u(x)h(x)dx$.

Доказательство

То, что функционалы $\mathcal{E}$, K определены на $H^1(R^1)$, вытекает из теоремы вложения Соболева $H^1(R^1) \to L_{\nu+2}(R^1)$. Докажем их дифференцируемость. Рассмотрим, например, функционал $\mathcal{E}(u)$. Для любых $u, h \in H^1(R^1)$

$$\mathcal{E}(u+h) - \mathcal{E}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u_x h_x + \frac{1}{2} h_x^2 - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \left[(\nu+2) h u^{\nu+1} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} h^2 (u + \theta h)^{\nu} \right] \right\} dx, \quad (3)$$

где $\theta(x) \in (0,1)$.

Оценим $\left| \int_{-\infty}^{\infty} h^2 (u+\theta h)^{\nu}\, dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} h^2 (|u| + |h|)^{\nu}\, dx \le const \int_{-\infty}^{\infty} h^2 (\|u\| + \|h\|)^{\nu}\, dx$ (здесь использовалась теорема вложения $H^1(R^1)$ в $C(R^1)$). Отсюда и из (3) вытекает, что функционал $\mathcal{E}$ дифференцируем на $H^1(R^1)$ и $d\mathcal{E}(x,h) = \int_{-\infty}^{\infty} (h_x u_x - \frac{1}{\nu+1} h u^{\nu+1})dx$.

Докажем непрерывность производной $\mathcal{E}'(u)$. Рассмотрим

$$\|\mathcal{E}'(u) - \mathcal{E}'(u_0)\| = \sup_{\|h\|=1} \left| [\mathcal{E}'(u) - \mathcal{E}'(u_0)]\, h \right| =$$

$$\sup_{\|h\|=1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ h_x(u_x - u_{0x}) - \frac{1}{\nu+1} h (u^{\nu+1} - u_0^{\nu+1}) \right\} dx \right| \le$$

$$|h_x|_2 |u_x - u_{0x}|_2 + \frac{1}{\nu+1} |h|_2 |u^{\nu+1} - u_0^{\nu+1}|_2 .$$

Очевидно, что $|u_x - u_{0x}|_2 \to 0$ при $u \to u_0$ в $H^1(R^1)$, поэтому достаточно доказать, что $|u^{\nu+1} - u_0^{\nu+1}|_2 \to 0$ при $u \to u_0$ в $H^1(R^1)$. Оценим $|u^{\nu+1} - u_0^{\nu+1}|_2^2 = (\nu+1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} [u_0 + \theta(x)(u - u_0)]^{2\nu} (u - u_0)^2 dx$, где $\theta(x) \in (0,1)$. Отсюда $|u^{\nu+1} - u_0^{\nu+1}|_2^2 \le const(\|u_0\| + \|u\|)^{2\nu} |u - u_0|_2^2 \to 0$ при $u \to u_0$ в $H^1(R^1)$.

Функционал $K(u)$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 2.2

Для любых $K_0 > 0$, $\mathcal{E}_0 > 0$ множество функций $u \in H^1(R^1)$, удовлетворяющих неравенствам $K(u) \le K_0$, $|\mathcal{E}(u)| \le \mathcal{E}_0$, ограничено в $H^1(R^1)$.

Доказательство вытекает из оценки

$$|u|_{\nu+2} \le const\, |u|_2^{1/2+1/(\nu+2)}\, |u_x|_2^{1/2-1/(\nu+2)} . \quad (4)$$

Получим неравенство (4). По теореме вложения Соболева

$$|u|_{\nu+2} \le const(|u|_2^2 + |u_x|_2^2)^{1/2} = const\|u\|.$$

Делая замену $x = \varepsilon s$, $v(s) = u(\varepsilon s)$, придем к неравенству

$$|v|_{\nu+2} \le const(|v|_2^2 \varepsilon^{1-\frac{2}{\nu+2}} + |v_x|_2^2 \varepsilon^{-1-\frac{2}{\nu+2}})^{1/2},$$

которое, очевидно, справедливо для любых $\varepsilon > 0$, $v \in H^1(R^1)$, причем постоянная не зависит от ε. Дифференцируя по ε, легко проверить, что выражение в правой части последнего неравенства минимально при $\varepsilon = \frac{|u_x|_2}{|u|_2}\left(\frac{1+2/(\nu+2)}{1-2/(\nu+2)}\right)^{1/2}$. Подставляя это значение ε , получим неравенство (4).

В силу (4) $|u|_{\nu+2}^{\nu+2} \leq \mathrm{const}\,|u|_2^{\frac{\nu+2}{2}+1} \cdot |u_x|^{\frac{\nu+2}{2}-1} \leq \mathrm{const}\,|u_x|_2^{\frac{\nu}{2}}$. Поскольку $\nu/2 < 2$, величина $|u_x|_2^2$ ограничена постоянной, зависящей лишь от K_0 и $\mathcal{E}_0$.

Лемма 2.2 доказана.

3^0. В этом пункте изучаются солитоноподобные решения $\Phi(x,t)$ уравнения (I). Рассмотрим следующую задачу минимизации

$$I_\mu = \inf\left\{ \mathcal{E}(u) \mid u \in H^1(R^1) \ , \ K(u) = \mu \right\} \ , \qquad (5)$$

где $\mu > 0$.

Лемма 3.I

Имеет место неравенство $-\infty < I_\mu < 0$.

Доказательство

То, что $I_\mu > -\infty$, вытекает из неравенства (4). Докажем, что $I_\mu < 0$. Возьмем произвольную функцию $u \in H^1(R^1)$, удовлетворяющую условиям $u(x) \geq 0$ для всех $x \in R^1$ и $K(u) = \mu$. Рассмотрим функции $u_\lambda(x) = \lambda^{1/2} u(\lambda x)$, где $\lambda > 0$. Тогда $K(u_\lambda) = \mu$, $\mathcal{E}(u_\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\lambda^2 u^2(x) - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\lambda^{\nu/2} u^{\nu+2}(x)\right\} dx$, откуда видно, что $\mathcal{E}(u_\lambda) < 0$ для достаточно малых $\lambda > 0$.

Лемма 3.I доказана.

Рассмотрим $|\Phi|_2^2$. Эта величина не зависит от t и

$$|\Phi|_2^2 = A^{4/\nu - 1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathrm{sech}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\nu s}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)}}\right]\right\}^{4/\nu} ds$$

и, таким образом, каждому значению $\mu > 0$ соответствует одно и только одно с точностью до сдвига x_0 солитоноподобное решение Φ с $|\Phi|_2^2 = \mu$.

Имеет место следующая теорема о разрешимости задачи (5).

Теорема 3.I

(а) Пусть $\{u_n\}$ - любая минимизирующая последовательность задачи (5). Тогда существует последовательность $\{y_n\} \subset R^1$ такая, что последовательность $\{u_n(x+y_n)\}$ компактна в $H^1(R^1)$.

(б) Для любого $\mu > 0$ задача минимизации (5) имеет одно с точностью до сдвига x_0 и знака решение, совпадающее с солитоноподобным решением $\Phi(x,0)$, для которого $|\Phi|_2^2 = \mu$.

Докажем эту теорему в предположении $\nu = \frac{2n-1}{2m-1}$, где n , m - натуральные.

Лемма 3.2

Для любых $\theta > 1$, $\mu > 0$ имеет место неравенство $I_{\theta\mu} < \theta I_\mu$.

Доказательство

Пусть $\{u_n\}$ - минимизирующая последовательность для задачи (5), $|u_n|_2^2 = \mu$. В силу леммы 3.I имеем: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{-1}{(\nu+1)(\nu+2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_n^{\nu+2}\, dx\right] < 0$. Рассмотрим последовательность $\{\theta^{1/2} u_n\}$. Очевидно, $|\theta^{1/2} u_n|_2^2 = \theta\mu$, $\mathcal{E}(\theta^{1/2} u_n) = \theta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}u_{nx}^2 - \frac{\theta^{\nu/2}}{(\nu+1)(\nu+2)} u_n^{\nu+2}\right\} dx$. Следовательно, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(\theta^{1/2} u_n) < \theta \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n) = \theta I_\mu$, и лемма доказана.

Лемма 3.3 /I4/

Пусть h - функция, определенная на $[0,\lambda]$ с $\lambda > 0$, удовлетворяет условию $h(\theta\alpha) < \theta h(\alpha)$ для всех $\alpha \in (0,\lambda)$, $\theta \in (1, \lambda/\alpha]$. Тогда справедливо неравенство $h(\lambda) < h(\alpha) + h(\lambda - \alpha)$ для всех $\alpha \in (0,\lambda)$.

Доказательство

Пусть для определенности $\alpha \geq \lambda - \alpha$, тогда имеем:

$$h(\lambda) < \frac{\lambda}{\alpha}\, h(\alpha) = h(\alpha) + \frac{\lambda - \alpha}{\alpha} h(\alpha) \leq h(\alpha) + h(\lambda - \alpha) \ ,$$

и лемма доказана.

Докажем п. (а) теоремы 3.I . В силу лемм 3.2 и 3.3 имеем:

$$I_\mu < I_{\mu-\alpha} + I_\alpha \qquad (6)$$

для любых $\alpha \in (0,\mu)$, $\mu > 0$. Как доказано в работах /I2-I5/, из условия (6) вытекает компактность в $H^1(R^1)$ любой минимизирующей последовательности задачи минимизации (5) с точностью до сдвигов, т.е. п.(а) теоремы 3.I .

Из доказанного п. (а) теоремы 3.I и леммы 2.I вытекает, что при любом $\mu > 0$ задача минимизации (5) имеет решение.

Лемма 3.4

Любое решение задачи минимизации (5) - дважды непрерывно дифференцируемая функция, являющаяся решением краевой задачи

$$u'' + \frac{1}{\nu+1} u^{\nu+1} = cu \ , \quad -\infty < x < \infty \ , \qquad (7)$$

$$u(-\infty) = u(+\infty) = 0 \qquad (8)$$

с некоторым $c \in R^1$.

Доказательство

Пусть u_μ – решение задачи минимизации (5) с некоторым $\mu>0$. Применяя теорему о задаче на условный экстремум /I6/, получаем:

$$\mathcal{E}'(u_\mu) + \frac{1}{2}cK'(u_\mu) = 0$$

для некоторого $c\in R^1$, откуда для произвольного $\varphi\in H^1(R^1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{u_\mu'\varphi' - \frac{1}{\nu+1}u_\mu^{\nu+1}\varphi + cu_\mu\varphi\right\}dx = 0 .$$

Следовательно, по определению u_μ – обобщенное решение уравнения (7), причем в силу теоремы вложения Соболева u_μ – непрерывная функция и $u(-\infty)=u(+\infty)=0$. Следовательно /I7/, $u_\mu\in C^2(R^1)$, u_μ является классическим решением задачи (7)-(8).

Лемма 3.4 доказана.

Изучим уравнение (7).

Лемма 3.5

При любом $c>0$ задача (7)-(8) имеет единственное нетривиальное решение с точностью до сдвига $x\to x+x_0$, которое положительно. При $c\le 0$ задача (7)-(8) не имеет нетривиальных решений.

Доказательство

Легко проверить, что для любого решения уравнения (7) справедливо тождество

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}u'^2(x) - \frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}u^{\nu+2}\right\} = 0 .$$

Из этого тождества вытекает, что для любого решения уравнения (7) величина $M(u)=\left\{\frac{1}{2}u^2(x)-\frac{1}{2}cu^2(x)+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}u^{\nu+2}(x)\right\}$ не зависит от x. Выберем произвольное x_0 и рассмотрим задачу Коши для уравнения (7) с начальными условиями

$$u(x_0)=a,\quad u'(x_0)=0 . \tag{9}$$

Для того, чтобы решение задачи (7), (9) удовлетворяло условию (8), необходимо, чтобы $\frac{1}{2}ca^2-\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}a^{\nu+2}=0$. Отсюда вытекает: $a=\left(\frac{c}{2(\nu+1)(\nu+2)}\right)^{1/\nu}$. Обозначим это значение a через a_0.

Покажем, что решение задачи Коши (7), (9) при $a=a_0$ удовлетворяет условиям (8). Действительно, тогда $ca_0-\frac{1}{\nu+1}a_0^{\nu+1}<0$ и, следовательно, решение задачи Коши $u(x)$ возрастает слева от x_0 и убывает справа от x_0. Докажем, например, что $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$. Функция $u(x)$ не может достигать минимума справа от x_0 в области $0<u<a_0$, поскольку

в точке минимума $M(u)\ne M(a_0)$. Кроме того, функция $u(x)$ не может обратиться в нуль справа от x_0, поскольку, если $u(x_1)=0$ для некоторого $x_1>x_0$, то $u'(x_1)\ne 0$, и опять получаем $M(u(x_1))\ne M(a_0)$. Следовательно, функция $u(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $u=\alpha$ при $x\to+\infty$, причем $0\le\alpha<a_0$. В силу уравнения (7) для α должно быть выполнено условие $c\alpha-\frac{1}{\nu+1}\alpha^{\nu+1}=0$, поэтому α может быть равно 0 либо $\gamma=[c(\nu+1)]^{1/\nu}$. Но $\frac{1}{2}c\gamma^2-\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\gamma^{\nu+2}<0$, поэтому в силу тождества (9) $\alpha=0$ и доказано, что $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$. Из рассуждений ясно, что решение $u(x)$ задачи (7)-(8) единственно с точностью до сдвига $x\to x+x_0$, где $x_0=\mathrm{const}$, и положительно.

Вторая часть леммы доказывается с помощью аналогичных рассуждений.

Лемма доказана.

Заметим, что солитонное решение $\phi(x,t)$ удовлетворяет задаче (7)-(8) с $c=2A^2/[(\nu+1)(\nu+2)]$. Отсюда и из лемм 3.4, 3.5 вытекает

Лемма 3.6

Любое решение задачи минимизации (5) совпадает с солитоноподобным решением Φ, для которого $|\Phi|_2^2=\mu$, с точностью до сдвига $\phi(x,t)\to\phi(x+x_0,t)$, где $x_0=\mathrm{const}$.

Тем самым теорема 3.I доказана для случая $\nu=\frac{2n-1}{2m-1}$, где n, m – натуральные. Для случая $\nu=\frac{2n}{m-1}$ доказательство аналогично.

Теорема 3.I доказана.

4°. Докажем теперь основную теорему 2.I об устойчивости. Опять предположим, что $\nu=\frac{2n-1}{2m-1}$, где n, m – натуральные. Случай $\nu=\frac{2n}{2m-1}$ может быть рассмотрен аналогично.

Лемма 4.I

Функционалы K, $\mathcal{E}$ непрерывны в метрике ρ, т.е. для любых $u\in H^1(R^1)$, $\{u_n\}\subset H^1(R^1)$ таких, что $\rho(u_n,u)\to 0$ при $n\to\infty$, справедливо: $K(u_n)\to K(u)$, $\mathcal{E}(u_n)\to\mathcal{E}(u)$ при $n\to\infty$.

Доказательство

По условию найдется такая последовательность $\{\tau_n\}\subset R^1$, что $v_n(x)=u_n(x-\tau_n)\to u$ при $n\to\infty$ в $H^1(R^1)$. Поэтому в силу леммы 2.I $K(u_n)=K(v_n)\to K(u)$ и $\mathcal{E}(u_n)=\mathcal{E}(v_n)\to\mathcal{E}(u)$ при $n\to\infty$.

Лемма 4.I доказана.

Доказательство теоремы 2.I

Предположим, что теорема неверна. Тогда найдутся такие последовательности $\{u_0^n\} \subset H^1(R^1)$ и $\{t_n\} \subset R^1$, что $\rho(u_0^n, \Phi|_{t=0}) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\rho(u_n, \Phi)|_{t=t_n} \geqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где u_n – решение задачи Коши (I)-(2) с $u_0 = u_0^n$, Φ – солитоноподобное решение. Положим $|\Phi|_2^2 = \mu > 0$. По лемме 4.I $K(u_n) \to \mu$, $\mathcal{E}(u_n) \to \mathcal{E}(\Phi)$ при $n \to \infty$. Положим $v_n = \left(\frac{\mu}{K(u_n)}\right)^{1/2} u_n$. Очевидно, что $K(v_n) = \mu$, $\alpha_n = \left(\frac{\mu}{K(u_n)}\right)^{1/2} \to 1$ при $n \to \infty$. Ясно, что $\mathcal{E}(v_n) \to \mathcal{E}(\Phi)$ при $n \to \infty$. Но Φ – решение задачи минимизации (5) в силу теоремы 3.I. По этой теореме найдется последовательность $\{y_n\} \subset R^1$ такая, что последовательность $w_n(x) = v_n(x+y_n, t_n)$ компактна в $H^1(R^1)$. Нетрудно проверить, что тогда последовательность $\{u_n(x+y_n, t_n)\}$ компактна в $H^1(R^1)$. Пусть $\{(u_{n_k}(x+y_{n_k}, t_{n_k})\}$ – ее сходящаяся последовательность, предел которой $\bar{u}(x)$. По лемме 2.I $\mathcal{E}(\bar{u}) = \mathcal{E}(\Phi)$, $K(\bar{u}) = K(\Phi)$, т.е. $\bar{u}$ – решение задачи минимизации (5). По теореме 3.I $\bar{u}(x) = \Phi(x+y, 0)$ для некоторого $y \in R^1$. Следовательно, $\rho(u_{n_k}, \Phi)|_{t=t_n} \to 0$ при $k \to \infty$, что противоречит нашему предположению.

Теорема 2.I доказана.

Литература

I. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Мир, М., I977.
2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Наука, М., I980.
3. Маханьков В.Г. Солитоны и численный эксперимент. ЭЧАЯ, I984, т. I4, вып. I, с. I23-I80.
4. Makhankov V.G. Dynamics of classical solitons(in nonintegrable systems).-Phys.Rep.,1978,vol.35C,N°1,1-128.
5. Zakharov V.E.,Kyznetsov E.A.,Rubenchik A.M. Soliton stability.- Ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР, Препринт, I983, № I99, 62 с.
6. Benjamin T.B. The stability of solitary waves.-Proc.Royal Soc.London,1972,vol.328,153-183.
7. Bona J.L. On the stability theory of solitary waves.-Proc.Royal Soc.London,1975,vol.A344,363-374.
8. Жидков П.Е. Об устойчивости солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера. - Дифференц. ур-ния, I986, т. XXII, № 6, с. 994-I004.
9. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики. ЭЧАЯ, I985, т. I6, № 3, с. 597-648.
I0. Strauss W.A. Stable and unstable states of nonlinear wave equations.-Contemp.Math.,1983,vol.17,429-441.
II. Cazenave T.,Lions P.L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations.-Commun.Math.Phys, 1982,vol.85,549-561.
I2. Lions P.L.Principle de concentration-compacite en calcul des variations. - C.r.Acad.sci.,1982,ser I,t.294,N°7,261-264.
I3. Lions P.L. Applications de la methode de concentration-compacite a l'existence de fonctions extremales.-C.r.Acad.sci.,1983,ser I, t.296,645-648.
I4. Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations.The locally compact case,part 1.-Ann.Inst.Henri Poincare,1984,vol 1,109-145.
I5. Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations.The locally compact case,part 2.- Ann.Inst.Henri Poincare,1984,vol.1N°4,223-283.
I6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Наука, М., I965.
I7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Наука, М., I983.

Рукопись поступила в издательский отдел
I2 декабря I986 года.

Жидков П.Е. Р5-86-800

Устойчивость решений вида уединенной волны для обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза

Методом концентрации-компактности Лионса исследована устойчивость формы солитоноподобных решений для обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза с нелинейностью $u^{\nu}u_x$ в одномерной геометрии. Ранее аналогичные исследования проводились для уравнения Кортевега – де Фриза и модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза. Область устойчивости совпадает с интервалом $0 < \nu < 4$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой.

Zhidkov P.E. P5-86-800

Stability of Solutions of Solitary Wave Type for Korteveg – de Vries Generalized Equation

Using the Lions concentration-compactness method the form stability of solitonlike solutions for Korteveg – de Vries generalized equation with $u^{\nu}u_x$ nonlinearity in one-dimensional geometry is investigated. Earlier the analogous investigations were carried out for the Korteveg – de Vries equations and for the modified Korteveg – de Vries equation. The stability region coincides with the $0<\nu<4$ interval.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986