объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-86-783

Ч.Д.Палев

НЕПРИВОДИМЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ gl(n,1) В БАЗИСЕ ГЕЛЬФАНДА-ЦЕТЛИНА

Направлено в журнал "Функциональный анализ и его приложения"

1986

Среди простых конечномерных супералгебр Ли особое место занимают базисные супералгебры Ли/БСЛ/[1]. Для них естественным образом обобщаются такие привычные понятия, как подалгебра Картана, корни и корневые векторы и др. Теория конечномерных представлений БСЛ во многом схожа с теорией представлений простых алгебр Ли. Мы имеем ввиду конечномерные неприводимые представления. Здесь не будем касаться не вполне приводимых представлений, чья общая теория находится в начальной стадии развития. Конечномерные же неприводимые модули БСЛ полностью классифицированы[2]. За последние годы они активно изучаются. Получено немало новых результатов /см., например, [3–6] и цитированную там литературу/. Тем не менее, остается еще много нерешенных проблем. Даже размерности многих неприводимых модулей неизвестны.

В настоящей заметке рассматриваются все конечномерные неприводимые модули супералгебры Ли $g\ell(n,1)$ для всякого $n = 2,3,\dots$ В каждом модуле вводится базис, который является естественным обобщением базиса Гельфанда-Цетлина для $g\ell(n)$[7]. Поскольку $g\ell(n,1)$ есть прямая сумма БСЛ $s\ell(n,1)$ и одномерного центра, $g\ell(n,1) = s\ell(n,1) \oplus \mathbf{C}$, полученные результаты описывают также неприводимые конечномерные представления $s\ell(n,1)$.

Пусть e_{AB} есть $(n+1)$-мерная квадратная матрица, у которой 1 на пересечении A-той строки и B-того столбца и нули на остальных местах. Матрицы e_{AB}, $A,B = 1,\dots n+1$ задают базис в $g\ell(n,1)$. Генераторы e_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$ и $e_{n+1,n+1}$ определяют четную подалгебру $g\ell(n) \oplus \mathbf{C}$, а $e_{i,n+1}$, $e_{n+1,i}$, $i = 1,\dots,n$ — нечетную часть. Пусть $e_{11},\dots,e_{n+1,n+1}$ — базис в подалгебре Картана H, а $e^1,\dots,e^{n+1}$ — сопряженный к нему базис дуального пространства H'. Тогда e_{AB}, $A < B$ $(A > B)$ являются положительными (отрицательными) корневыми векторами в $g\ell(n,1)$.

Лемма. Неприводимые конечномерные $g\ell(n,1)$ модули $W([m]_{n+1})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством всевозможных наборов $n+1$ комплексных чисел.

$$[m]_{n+1} \equiv [m_{1,n+1},\dots,m_{n+1,n+1}],\quad m_{i,n+1}-m_{i+1,n+1}\in \mathbf{Z}_+,\quad i=1,\dots,n-1,$$

где $m_{1,n+1}e^1+\dots+m_{n+1,n+1}e^{n+1} = \Lambda$ есть старший вес $W([m]_{n+1})$.

Доказательство леммы, а также последующих утверждений, опускаются. Пусть $g\ell(n)$ есть подалгебра $g\ell(n,1)$ с генераторами

e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $V([m]_n)$, $[m]_n = [m_{1n}, \ldots, m_{nn}]$ неприводимый $g\ell(n)$ модуль со старшим весом $m_{1n} e^1 + \ldots + m_{nn} e^n$.

Теорема. Неприводимый $g\ell(n,1)$ модуль $W([m]_{n+1})$ распадается в прямую сумму всех $g\ell(n)$ модулей $V([m]_n)$, чьи сигнатуры удовлетворяют условиям: (а) $m_{i,n+1} - m_{in} = \theta_i = 0,1 \ \forall i = 1, \ldots, n$; (б) если для какого-то $k = 1, \ldots, n$ $m_{k,n+1} + m_{n+1,n+1} = k - n$, то $m_{kn} = m_{k,n+1} - 1$.

Пусть $\Gamma([m]_n)$ есть базис Гельфанда-Цетлина /7/ для $V([m]_n)$. Тогда объединение $\Gamma([m]_n)$ всех подмодулей $V([m]_n) \subset W([m]_{n+1})$, т.е. $\Gamma([m]_{n+1}) = \cup \Gamma([m]_n)$ задает базис в $W([m]_{n+1})$. Мы называем $\Gamma([m]_{n+1})$ базисом Гельфанда-Цетлина в $g\ell(n,1)$ модуле $W([m]_{n+1})$.

Следствие. Базис Гельфанда-Цетлина в $W([m]_{n+1})$ состоит из всевозможных схем:

$$(m) \equiv \begin{bmatrix} [m]_{n+1} \\ [m]_n \\ \vdots \\ [m]_i \\ \vdots \\ m_{11} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} m_{1,n+1}, \ldots\ldots, m_{n,n+1}, m_{n+1,n+1} \\ m_{1n}, \ldots\ldots\ldots\ldots, m_{nn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{1i}, \ldots\ldots, m_{ii} \\ \ldots\ldots \\ m_{11} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где строка $[m]_{n+1}$ фиксирована (см. /1/), числа $[m]_n$ пробегают все $g\ell(n)$ сигнатуры в $W([m]_{n+1})$ (см. теорему) и, кроме того, выполняются обычные условия для базиса $\Gamma([m]_n)$: $m_{i,j+1} - m_{ij} \in \mathbf{Z}_+$, $m_{ij} - m_{i+1,j+1} \in \mathbf{Z}_+$, $i \le j = 1, \ldots, n-1$.

Пусть $(m)_{\pm ij}$ есть схема, которая получается из (m) заменой $m_{ij} \to m_{ij} \pm 1$. Положим $\ell_{AB} = m_{AB} - A$. Тогда действие $g\ell(n,1)$ в $W([m]_{n+1})$ определяется полностью соотношениями

$$e_{AA}(m) = \left(\sum_{k=1}^{A} m_{kA} - \sum_{k=1}^{A-1} m_{k,A-1} \right)(m), \quad A = 1, \ldots, n+1$$

$$e_{k,k-1}(m) = \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{\prod_{i=1}^{k} (\ell_{ik} - \ell_{j,k-1} + 1) \prod_{i=1}^{k-2} (\ell_{i,k-2} - \ell_{j,k-1})}{\prod_{i \neq j = 1}^{k-1} (\ell_{i,k-1} - \ell_{j,k-1} + 1)(\ell_{i,k-1} - \ell_{j,k-1})} \right|^{1/2} (m)_{-j,k-1},$$

$k = 2, \ldots, n$

$$e_{k-1,k}(m) = \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{\prod_{i=1}^{k} (\ell_{ik} - \ell_{j,k-1}) \prod_{i=1}^{k-2} (\ell_{i,k-2} - \ell_{j,k-1} - 1)}{\prod_{i \neq j = 1}^{k-1} (\ell_{i,k-1} - \ell_{j,k-1})(\ell_{i,k-1} - \ell_{j,k-1} - 1)} \right|^{1/2} (m)_{j,k-1}, \quad k = 2, \ldots, n$$

$$e_{n,n+1}(m) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i (-1)^{i-1} (-1)^{\theta_1 + \ldots + \theta_{i-1}} (\ell_{i,n+1} + \ell_{n+1,n+1} + 2n + 1)^{1/2} \times$$

$$\times \left| \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\ell_{k,n-1} - \ell_{in} - 1)}{\prod_{k \neq i = 1}^{n} (\ell_{k,n+1} - \ell_{i,n+1})} \right|^{1/2} (m)_{in}$$

$$e_{n+1,n}(m) = \sum_{i=1}^{n} (1 - \theta_i)(-1)^{i-1} (-1)^{\theta_1 + \ldots + \theta_{i-1}} (\ell_{i,n+1} + \ell_{n+1,n+1} + 2n + 1)^{1/2} \times$$

$$\times \left| \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\ell_{k,n-1} - \ell_{in})}{\prod_{k \neq i = 1}^{n} (\ell_{k,n+1} - \ell_{i,n+1})} \right|^{1/2} (m)_{-in}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kac V.G. Adv. Math. — 1977. — V.26. — p.8-96.
2. Kac V.G. Lect.Notes Math. — 1978. — V.626. — p.597-626.
3. Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras. As Introduction. — Lect. Notes Math. — 1979. — V.716.
4. Лейтес Д.А. Супералгебры Ли. Современные проблемы математики. — М.,: ВИНИТИ АН СССР, 1984. — Т.25, — с.3-49.
5. Bars I., Morel B., Ruegg H. J. Math. Phys. — 1983. — V.24. — p.2253-2262.
6. Delduc F., Gourdin M. J. Math. Phys. — 1985. — V.26. — p.1865-1879.
7. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. Докл. АН СССР. — 1950. — Т.71. — с.825-828.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 декабря 1986 года.

Палев Ч.Д. Р5-86-783

Неприводимые конечномерные представления супералгебр Ли $g\ell(n, 1)$ в базисе Гельфанда-Цетлина

Рассмотрены все конечномерные неприводимые представления общей линейной супералгебры Ли $g\ell(n, 1)$ для всякого $n = 2,3,\ldots$. Для каждого $g\ell(n, 1)$ модуля определено понятие базиса Гельфанда-Цетлина. Найдены явные выражения для трансформации базиса под действием генераторов алгебры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Palev Ch.D. P5-86-783

Finite-Dimensional Irreducible Representations of the Lie Superalgebras **gl(n, 1)** in a Gel'fand-Zetlin Basis

All finite-dimensional irreducible representations of the general linear Lie superalgebras $g\ell(n, 1)$ for any $n = 2,3,\ldots$ are considered. For every $g\ell(n, 1)$ module a concept of a Gel'fand-Zetlin basis is defined. Explicit expressions for the transformation of the basis under the action of the generators are found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986