



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P5-86-783

Ч.Д.Палев

НЕПРИВОДИМЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ  $gl(n,1)$   
В БАЗИСЕ ГЕЛЬФАНДА-ЦЕТЛИНА

Направлено в журнал "Функциональный  
анализ и его приложения"

1986

Среди простых конечномерных супералгебр Ли особое место занимают базисные супералгебры Ли/БСЛ/<sup>1/</sup>. Для них естественным образом обобщаются такие привычные понятия, как подалгебра Картана, корни и корневые векторы и др. Теория конечномерных представлений БСЛ во многом схожа с теорией представлений простых алгебр Ли. Мы имеем ввиду конечномерные неприводимые представления. Здесь не будем касаться не вполне приводимых представлений, чья общая теория находится в начальной стадии развития. Конечномерные же неприводимые модули БСЛ полностью классифицированы<sup>2/</sup>. За последние годы они активно изучаются. Получено немало новых результатов /см., например, <sup>3-6/</sup> и цитированную там литературу/. Тем не менее, остается еще много нерешенных проблем. Даже размерности многих неприводимых модулей неизвестны.

В настоящей заметке рассматриваются все конечномерные неприводимые модули супералгебры Ли  $gl(n, 1)$  для всякого  $n = 2, 3, \dots$ . В каждом модуле вводится базис, который является естественным обобщением базиса Гельфанда-Цетлина для  $gl(n)$ <sup>7/</sup>. Поскольку  $gl(n, 1)$  есть прямая сумма БСЛ  $sl(n, 1)$  и одномерного центра,  $gl(n, 1) = sl(n, 1) \oplus \mathbf{C}$ , полученные результаты описывают также неприводимые конечномерные представления  $sl(n, 1)$ .

Пусть  $e_{AB}$  есть  $(n+1)$ -мерная квадратная матрица, у которой 1 на пересечении  $A$ -той строки и  $B$ -того столбца и нули на остальных местах. Матрицы  $e_{AB}$ ,  $A, B = 1, \dots, n+1$  задают базис в  $gl(n, 1)$ . Генераторы  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  и  $e_{n+1, n+1}$  определяют четную подалгебру  $gl(n) \oplus \mathbf{C}$ , а  $e_{i, n+1}$ ,  $e_{n+1, i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  — нечетную часть. Пусть  $e_{11}, \dots, e_{n+1, n+1}$  — базис в подалгебре Картана  $\mathbf{H}$ , а  $e^1, \dots, e^{n+1}$  — сопряженный к нему базис дуального пространства  $\mathbf{H}'$ . Тогда  $e_{AB}$ ,  $A < B$  ( $A > B$ ) являются положительными (отрицательными) корневыми векторами в  $gl(n, 1)$ .

*Лемма.* Неприводимые конечномерные  $gl(n, 1)$  модули  $W([m]_{n+1})$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством всевозможных наборов  $n+1$  комплексных чисел.

$$[m]_{n+1} \equiv [m_{1, n+1}, \dots, m_{n+1, n+1}], \quad m_{i, n+1} - m_{i+1, n+1} \in \mathbf{Z}_+, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где  $m_{1, n+1} e^1 + \dots + m_{n+1, n+1} e^{n+1} = \Lambda$  есть старший вес  $W([m]_{n+1})$ .

Доказательство леммы, а также последующих утверждений, опускаются. Пусть  $gl(n)$  есть подалгебра  $gl(n, 1)$  с генераторами

$e_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ . Обозначим через  $V([m]_n)$ ,  $[m]_n = [m_{1n}, \dots, m_{nn}]$  неприводимый  $gl(n)$  модуль со старшим весом  $m_{1n}e^1 + \dots + m_{nn}e^n$ .

**Теорема.** Неприводимый  $gl(n, 1)$  модуль  $W([m]_{n+1})$  распадается в прямую сумму всех  $gl(n)$  модулей  $V([m]_n)$ , чьи сигнатуры удовлетворяют условиям: (а)  $m_{i, n+1} - m_{in} = \theta_i = 0, 1 \forall i = 1, \dots, n$ ; (б) если для какого-то  $k = 1, \dots, n$   $m_{k, n+1} + m_{n+1, n+1} = k - n$ , то  $m_{kn} = m_{k, n+1} - 1$ .

Пусть  $\Gamma([m]_n)$  есть базис Гельфанда-Цетлина <sup>/7/</sup> для  $V([m]_n)$ . Тогда объединение  $\Gamma([m]_n)$  всех подмодулей  $V([m]_n) \subset W([m]_{n+1})$ , т.е.  $\Gamma([m]_{n+1}) = \cup \Gamma([m]_n)$  задает базис в  $W([m]_{n+1})$ . Мы называем  $\Gamma([m]_{n+1})$  базисом Гельфанда-Цетлина в  $gl(n, 1)$  модуле  $W([m]_{n+1})$ .

**Следствие.** Базис Гельфанда-Цетлина в  $W([m]_{n+1})$  состоит из всевозможных схем:

$$(m) \equiv \begin{bmatrix} [m]_{n+1} \\ [m]_n \\ \vdots \\ [m]_i \\ \vdots \\ m_{11} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} m_{1, n+1} \dots m_{n, n+1} \quad m_{n+1, n+1} \\ m_{1n} \dots m_{nn} \\ \dots \\ m_{ii} \dots m_{ii} \\ \dots \\ m_{11} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где строка  $[m]_{n+1}$  фиксирована (см. <sup>/1/</sup>), числа  $[m]_n$  пробегает все  $gl(n)$  сигнатуры в  $W([m]_{n+1})$  (см. теорему) и, кроме того, выполняются обычные условия для базиса  $\Gamma([m]_n)$ :  $m_{i, j+1} - m_{ij} \in \mathbf{Z}_+$ ,  $m_{ij} - m_{i+1, j+1} \in \mathbf{Z}_+$ ,  $i \leq j = 1, \dots, n-1$ .

Пусть  $(m) \pm ij$  есть схема, которая получается из  $(m)$  заменой  $m_{ij} \rightarrow m_{ij} \pm 1$ . Положим  $l_{AB} = m_{AB} - A$ . Тогда действие  $gl(n, 1)$  в  $W([m]_{n+1})$  определяется полностью соотношениями

$$e_{AA}(m) = \left( \sum_{k=1}^A m_{kA} - \sum_{k=1}^{A-1} m_{k, A-1} \right) (m), \quad A = 1, \dots, n+1$$

$$e_{k, k-1}(m) = \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{\prod_{i=1}^k (\ell_{ik} - \ell_{j, k-1} + 1) \prod_{i=1}^{k-2} (\ell_{i, k-2} - \ell_{j, k-1})}{\prod_{i \neq j=1}^{k-1} (\ell_{i, k-1} - \ell_{j, k-1} + 1) (\ell_{i, k-1} - \ell_{j, k-1})} \right|^{\frac{1}{2}} (m)_{-j, k-1},$$

$k = 2, \dots, n$

$$e_{k-1, k}(m) = \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{\prod_{i=1}^k (\ell_{ik} - \ell_{j, k-1}) \prod_{i=1}^{k-2} (\ell_{i, k-2} - \ell_{j, k-1} - 1)}{\prod_{i \neq j=1}^{k-1} (\ell_{i, k-1} - \ell_{j, k-1}) (\ell_{i, k-1} - \ell_{j, k-1} - 1)} \right|^{\frac{1}{2}} (m)_{j, k-1}, \quad k = 2, \dots, n$$

$$e_{n, n+1}(m) = \sum_{i=1}^n \theta_i (-1)^{i-1} (-1)^{\theta_1 + \dots + \theta_{i-1}} (\ell_{i, n+1} + \ell_{n+1, n+1} + 2n+1)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left| \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\ell_{k, n-1} - \ell_{in} - 1)}{\prod_{k \neq i=1}^n (\ell_{k, n+1} - \ell_{i, n+1})} \right|^{\frac{1}{2}} (m)_{in}$$

$$e_{n+1, n}(m) = \sum_{i=1}^n (1 - \theta_i) (-1)^{i-1} (-1)^{\theta_1 + \dots + \theta_{i-1}} (\ell_{i, n+1} + \ell_{n+1, n+1} + 2n+1)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left| \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\ell_{k, n-1} - \ell_{in})}{\prod_{k \neq i=1}^n (\ell_{k, n+1} - \ell_{i, n+1})} \right|^{\frac{1}{2}} (m)_{-in}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кас V.G. Adv. Math. — 1977. — V.26. — p.8-96.
2. Кас V.G. Lect. Notes Math. — 1978. — V.626. — p.597-626.
3. Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras. An Introduction. — Lect. Notes Math. — 1979. — V.716.
4. Лейтес Д.А. Супералгебры Ли. Современные проблемы математики. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1984. — Т.25. — с.3-49.
5. Bars I., Morel B., Ruegg H. J. Math. Phys. — 1983. — V.24. — p.2253-2262.
6. Delduc F., Gourdin M. J. Math. Phys. — 1985. — V.26. — p.1865-1879.
7. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. Докл. АН СССР. — 1950. — Т.71. — с.825-828.

Рукопись поступила в издательский отдел  
5 декабря 1986 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физике. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Палев Ч.Д.

P5-86-783

Неприводимые конечномерные представления супералгебр Ли  $gl(n, 1)$  в базисе Гельфанда-Цетлина

Рассмотрены все конечномерные неприводимые представления общей линейной супералгебры Ли  $gl(n, 1)$  для всякого  $n = 2, 3, \dots$ . Для каждого  $gl(n, 1)$  модуля определено понятие базиса Гельфанда-Цетлина. Найдены явные выражения для трансформации базиса под действием генераторов алгебры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Palev Ch.D.

P5-86-783

Finite-Dimensional Irreducible Representations of the Lie Superalgebras  $gl(n, 1)$  in a Gel'fand-Zetlin Basis

All finite-dimensional irreducible representations of the general linear Lie superalgebras  $gl(n, 1)$  for any  $n = 2, 3, \dots$  are considered. For every  $gl(n, 1)$  module a concept of a Gel'fand-Zetlin basis is defined. Explicit expressions for the transformation of the basis under the action of the generators are found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986