

**сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна**

P5-86-699

С.П.Радев, Т.Л.Бояджиев, И.В.Пузынин

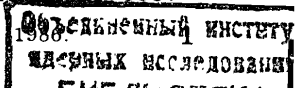
**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ДВУХСЛОЙНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ СТРУИ**

1986

В настоящей работе рассматривается задача о нелинейном развитии возмущений в осесимметрической струе, составленной из жидкого ядра и увлекаемого слоя несмешивающейся жидкости. Необходимость изучения нелинейной неустойчивости составной струи обусловлена тем, что в экспериментальных условиях отчетливо наблюдаются такие нелинейные эффекты, как появление второго максимума на одной /внутренней/ или обеих межфазных поверхностях, образование вторичных капель - сателлитов, чередующихся с основными каплями и т.д. В полной вязкой постановке обсуждаемая задача связана с большими трудностями, вытекающими из многослойности течения, наличия неизвестных межфазных границ, многопараметричности, большой размерности и нелинейности системы уравнений движения ядра и коаксиального слоя. В то же время можно ожидать, что подобно случаю однослойной струи ^{1,2/} нелинейные эффекты качественно хорошо будут описываться одномерными уравнениями движения, в которых не учитывается изменение течения в поперечном направлении. К этим уравнениям в ^{3/} применяется метод рядов Фурье ^{4/}, при помощи которого решение для возмущений определено с точностью до первых двух гармоник - основной и кратной. В принципе в решение можно включить и следующие гармоники, но это связано с очень трудоемкими выкладками. Учитывая, кроме того, что для нахождения неизвестных амплитудных множителей численно решается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, представляется целесообразным построить прямое численное решение исходных пространственно одномерных уравнений движения.

В работе ^{5/} с этой целью предложен сплайн-разностный метод, который применен к численному анализу нелинейной неустойчивости однослойной струи. Сохраняя основные идеи, ниже мы построили обобщение сплайн-разностного метода ^{5/} применительно к возмущенному течению двухслойной струи. Хотя метод дает возможность проводить расчеты при любом наборе безразмерных параметров, из-за многопараметричности задачи исчерпывающий анализ допустимых случаев связан с большими затратами вычислительных ресурсов и трудно обозрим. Поэтому для рассмотрения были выбраны некоторые типичные случаи.

Как и при однослойной струе, показано, что образование сателлитных капель имеет место во всем диапазоне неустойчивости. При прочих фиксированных параметрах размер сателлита определяется, в общем случае, волновым числом. Однако в некоторой степени размер зависит также от того, какая из неустойчивых мод линейного приближения возбуждается на начальной стадии: большей моде соот-



ветствуют большие вторичные капли. Из-за наличия в течении двух межфазных поверхностей сателлитные капли различаются по структуре. Когда в точке распада одновременно обрываются обе поверхности, отрывающиеся сателлитные /так же, как и основные/ капли имеют форму ядра, заключенного в сферическую оболочку. Если первым распадается ядро, основные и вторичные капли отрываются как от однослойной струи и увлекаются жидкостью слоя. Описанные формы распада наблюдались в экспериментах^{16/}. Показано также, что на начальном этапе развитие возмущений в струе происходит в соответствии с линейной теорией. Сравнение коэффициентов нарастания, определенных из дисперсионного соотношения линеаризованной задачи и на основе численных расчетов, показывает, что отклонения между ними становятся более существенными на конечных стадиях вблизи момента распада.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение ядра составной струи в одномерной постановке известно, если заданы его радиус h_1 и аксиальная скорость u_1 ; в цилиндрической системе координат Ogz , жестко связанной с осью струи, они являются функциями времени t и аксиальной координаты z /напомним, что в принятом одномерном приближении зависимостью от радиальной координаты r пренебрегают/. Аналогично движение коаксиального слоя определено при помощи h_2 - полного радиуса струи и скорости u_2 /см. рис.1/. Остальные гидродинамические величины /радиальные компоненты скоростей и давление/ выражаются через h_j и u_j , $j=1,2$.

Для дальнейшего рассмотрения удобно нестационарное течение струи считать возникшим из некоторого невозмущенного /стационарного/ состояния. Если не учитывать действие массовых сил и взаимодействие с внешней средой, таким для составной струи является течение, для которого

$$u_j = \tilde{u}_j, \quad h_j = \tilde{h}_j. \quad /1.1/$$

Равенства /1.1/ определяют цилиндрическую составную струю радиуса \tilde{h}_2 с цилиндрическим ядром радиуса \tilde{h}_1 и невозмущенными скоростями \tilde{u}_2 и \tilde{u}_1 соответственно. Ниже величины \tilde{h}_2 и \tilde{u}_1 будем использовать в качестве характерных масштабов для перехода в уравнения движения к безразмерному виду. Отсюда в безразмерной записи

$$U_1 = 1, \quad U_2 = \tilde{u}_2 / \tilde{u}_1, \quad H_1 = \tilde{h}_1 / \tilde{h}_2 \equiv \delta, \quad H_2 = 1. \quad /1.2/$$

Кроме того, для удобства введем новые независимые

$$r = a\sigma_2^{1/2} t, \quad \xi = az - \omega t \quad /1.3/$$

и зависимые переменные

$$u_j = U_j + \sigma_2^{1/2} v_j, \quad /1.4/$$

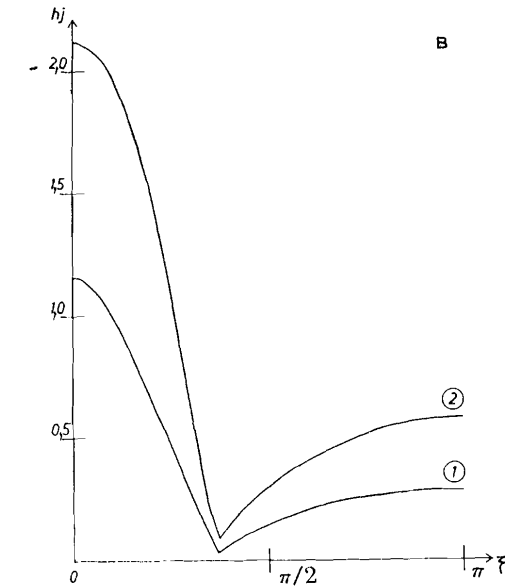
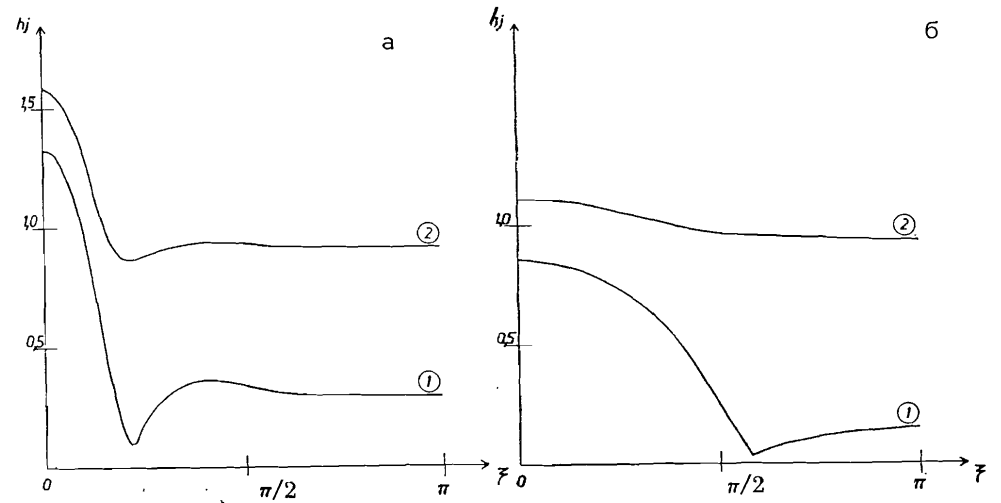


Рис.1. Формы распада составной струи: $\alpha = 0,5$; $\sigma_1 = 0,02$; $\delta = 0,5$; $\rho_0 = 1$, $h_{10} = 0,05$; $a/\sigma_1/\sigma_2 = 100$, $r_b = 0,211$; $b/\sigma_1/\sigma_2 = 0,75$; $r_b = 2,0265$; $v/\sigma_1/\sigma_2 = 0,25$; $r_b = 3,535$.

где $\sigma_2 = T_2 / \rho_2 H_2 U_2^2$ - безразмерный параметр задачи, отражающий эффект поверхностного натяжения T_2 внешней межфазной поверхности /на внутренней поверхности ему соответствует параметр $\sigma_1 = T_1 / \rho_1 H_2 U_1^2$ /. Далее α будет использоваться как волновое число, а ω - как угловая частота возмущений.

При помощи соотношений /1.3/ и /1.4/ одномерные уравнения движения записываются в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0, \quad /1.5/$$

где векторы

$$Q = (F_1, v_1, F_2, v_2)^T,$$

$$R = ((c_1^* + v_1) F_1, c_1^* v_1 + \frac{v_1^2}{2} + \sigma_0^{-1} p_1 + \rho_0 p_2, (c_2^* + v_2) F_2 + c_2^* v_2 + \frac{v_2^2}{2} + p_2)^T. \quad /1.6/$$

В /1.6/ использованы следующие обозначения:

$$c_j^* = \sigma_2^{1/2} (U_j - \omega/a), F_1 = h_1^2, F_2 = h_2^2 - h_1^2, \sigma_0 = \sigma_2/\sigma_1, \rho_0 = \rho_2/\rho_1. \quad /1.7/$$

Что касается их физического смысла, то величины c_j^* пропорциональны невозмущенным скоростям ядра и слоя относительно новой /подвижной/ координатной системы, имеющей скорость ω/a в исходной системе Oxz , а F_j - поперечные сечения обеих частей струи. Без ограничения общности можно принять $\omega/a = U_1 (c_1^* = 0)$.

Для замыкания уравнений /1.5/, /1.6/ нужно присоединить равенства

$$p_j = \frac{1}{h_j} - a^2 \frac{\partial^2 h_j}{\partial \xi^2}, \quad /1.8/$$

которые выражают давления в ядре и слое посредством значений главной кривизны обеих поверхностей. Эти уравнения необходимо также снабдить соответствующими краевыми и начальными условиями. С этой целью будем исходить из постановки задачи, при которой прослеживается развитие во времени заданного начального возмущения. Возмущения считаются периодическими по пространству с длиной волны $\lambda = 2\pi/a$

$$h_j(r, \xi + 2\pi) = h_j(r, \xi), \quad v_j(r, \xi + 2\pi) = v_j(r, \xi). \quad /1.9/$$

Для конкретного выбора формы начального возмущения будем исходить из решения линеаризованной задачи /1.5/-/1.8/. Применимость линеаризации обоснована для малых амплитуд начальных возмущений и малых времен τ . В работе /7/ показано, что линеаризованная система /1.5/-/1.8/ имеет элементарные решения в виде бегущих волн

$$h_j = \bar{h}_j e^{i(\xi + q\tau)}, \quad v_j = \bar{v}_j e^{i(\xi + q\tau)}, \quad /1.10/$$

где q - собственное число, а (\bar{h}_j, \bar{v}_j) - собственный вектор задачи. Действительная часть $q = q_r$ имеет смысл скорости распространения, а мнимая q_i - коэффициента нарастания малых возмущений, когда $q_i < 0$.

Собственное число q находится из дисперсионного соотношения линеаризованных уравнений /1.5/-/1.8/

$$q^2 (q + c_2^*)^2 + \frac{1}{2} (1 - \delta^2) (1 - a^2) q^2 + \left[-\frac{1}{2} \delta^2 \rho_0 (1 - a^2) + \frac{1}{2} (\delta \sigma_0)^{-1} (1 - a^2 \delta^2) \right] (q + c_2^*) + \frac{1}{4} (\delta \sigma_0)^{-1} (1 - \delta^2) (1 - a^2) (1 - a^2 \delta^2) = 0. \quad /1.11/$$

Если составная струя имеет однородный профиль невозмущенной скорости $U_1 = U_2$ / а только этот случай мы будем иметь в виду ниже/, то уравнение /1.11/ имеет либо две пары комплексно сопряженных чисто мнимых собственных чисел $q_m (m=1,2)$, если $0 < a < 1$, либо пару сопряженных мнимых и пару действительных чисел, если $1 < a < \delta^{-1}$. Каждой мнимой паре соответствует два семейства волн:

одно с возрастающей, а другое - с убывающей амплитудой, распространяющихся со средней скоростью струи. Семейства волн с возрастающими амплитудами характеризуются разными коэффициентами нарастания и волновыми диапазонами: первое семейство, имеющее меньший коэффициент, существует в интервале $0 < a < 1$, второе - в интервале $0 < a < \delta^{-1}$.

При каждом фиксированном волновом числе фундаментальное решение линеаризованной системы выражается линейной комбинацией из собственных векторов, соответствующих каждому из собственных чисел. Если в начальный момент в этой комбинации сохраним только собственный вектор, получаемый при помощи собственного числа с наибольшим коэффициентом нарастания, то в струе будут развиваться наиболее быстро растущие возмущения. Подобные начальные условия будем называть согласованными с большей модой. Они определены с точностью до произвольного множителя, например начальной амплитуды h_{10} внутренней поверхности.

Мы будем использовать также второй способ возбуждения волн в струе при помощи задания независимых гармонических возмущений обеих поверхностей:

$$h_1 = H_1 + h_{10} \cos \xi, \quad h_2 = H_2 + h_{20} \cos \xi, \quad v_1 = v_2 = 0, \quad /1.12/$$

где h_{10} и h_{20} - заданные константы / $|h_{10}|$ и $|h_{20}|$ - соответствующие начальные амплитуды возмущений/.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Пусть смешанная задача, соответствующая уравнениям /1.5/ и /1.8/ с заданными начальными /1.10/ и периодическими граничными условиями /1.9/, имеет решение. Для численного нахождения решения введем на плоскости (ξ, τ) равномерную сетку $\omega = \{\xi_i, \tau_k\}$ $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots$ с шагами $\Delta \xi$ и $\Delta \tau$ соответственно. Если $f(\xi, \tau)$ - заданная функция, то положим $f_i \equiv f(\xi_i, \tau_k)$, $\tilde{f}_i \equiv f(\xi_i, \tau_{k-1})$. Все рассматриваемые функции считаются необходимым числом раз дифференцируемыми.

Для проведения численных расчетов в настоящей работе использовалась неявная консервативная сплайн-разностная схема /5/:

$$T \frac{Q_i - \tilde{Q}_i}{\Delta \tau} + 3D(R_i + \tilde{R}_i) = 0. \quad /2.1/$$

Здесь T и $D^{(1)}$ - операторы, заданные на множестве периодических сеточных функций по формулам $Tf_i = f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}$, $D^{(1)}f_i = (f_{i+1} - f_{i-1})/2\Delta \xi$. На достаточно гладких решениях схема имеет порядок аппроксимации $O(\Delta \tau^2 + \Delta \xi^4)$, что в /5/ подтверждено также численными экспериментами.

Уравнения /1.8/ для давлений аппроксимируются соотношениями

$$\alpha^2 (2D^{(2)} h_{\nu i} - D^{(1)} m_{\nu i}) + p_{\nu i} - \frac{1}{h_{\nu i}} = 0, \quad \nu = 1, 2, \quad /2.2/$$

где оператор $D^{(2)} f_i \equiv (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) / \Delta \xi^2$, а величины $\{m_{\nu i}\}$ удовлетворяют уравнениям

$$T m_{\nu i} - 6 D^{(1)} h_{\nu i} = 0, \quad \nu = 1, 2. \quad /2.3/$$

Соотношения /2.1/-/2.3/ при $i = 1, 2, \dots, N_E$ представляют собой замкнутую систему нелинейных уравнений

$$F_i(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0 \quad /2.4/$$

относительно неизвестных $y_i = (v_{1i}, h_{1i}, m_{1i}, p_{1i}, v_{2i}, h_{2i}, m_{2i}, p_{2i})^T$, причем $y_0 = y_N, y_{N+1} = y_1$ в силу граничных условий. Здесь F_i - векторы левых частей в /2.1/-/2.3/, индекс T обозначает транспонирование. Для решения этой системы целесообразно использовать метод Ньютона; в результате на s -й итерации / $s = 1, 2, \dots$ / приходим к линейной задаче

$$a_i^{(s)} y_{i-1} + b_i^{(s)} y_i + c_i^{(s)} y_{i+1} = d \quad /2.5/$$

с блочно-трехдиагональной циклической матрицей. Элементы a_i, b_i, c_i последней и правые части d_i имеют вид

$$a_i = \frac{\partial F_i}{\partial y_{i-1}}, \quad b_i = \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \quad c_i = \frac{\partial F_i}{\partial y_{i+1}}, \quad /2.6/$$

$$d_i = a_i^{(s-1)} y_{i-1} + b_i^{(s-1)} y_i + c_i^{(s-1)} y_{i+1} - F_i. \quad /2.7/$$

Градиенты в правых частях /2.6/ вычисляются для значений $y_i^{(s-1)}$ величин y_i с предыдущей итерации. В качестве исходного приближения $y_i^{(0)}$ принимаются значения y_i с предыдущего временного слоя. Задача /2.5/ решается по методу циклической матричной прогонки. Итерации прекращаются при $\max |F_i| \leq \epsilon = 10^{-6}$. Обычно, вплоть до небольшой окрестности времени τ_b разрыва струи, $s_{\max} \leq 2 \div 4$.

Отметим особенность численной реализации. Из численных экспериментов видно, что достаточно долгое время струя развивается в соответствии с линейной теорией. При этом производные искомым функций как по времени, так и по пространственной координате малы по модулю. Это позволяет на линейном участке использовать крупную сетку - $\Delta \tau \approx 0,1$, $\Delta \xi = \pi/16$. Экспериментально установлено, что нелинейные эффекты начинают влиять существенно при толщине профиля ядра $h_U \approx (0,4 \div 0,5) h_2(\xi, \tau)$. При выполнении условия $h_2(\xi, \tau) \leq h_U$ шаги сетки автоматически уменьшаются: $\Delta \tau := \Delta \tau / 2$, $\Delta \xi := \Delta \xi / 2$, $N_E := 2N_E$. Для задания исходного приближения на следующем слое использовалась интерполяция кубическими эрмитовыми сплайнами.

Эрмитовый кубический сплайн $S(\xi)$ дефекта 2, интерполирующий функцию $f(\xi)$ в узлах $\xi_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$, на интервале $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ определяется по формуле

$$S(\xi) = \phi_1(\theta) f_i + \phi_2(\theta) f_{i+1} + \phi_3(\theta) f'_i + \phi_4(\theta) f'_{i+1}, \quad /2.8/$$

где $\theta = (\xi - \xi_i) / \Delta \xi$, а $\phi_j(\theta)$, $j = 1, 2, 3, 4$ - кубические полиномы от $\theta^{1/8}$.

Таким образом, для построения $S(\xi)$ необходимы значения $f \equiv f(\xi_i)$, а также производные $f'_i \equiv f'(\xi_i)$ интерполируемой функции в узлах. Следует различать два случая.

При интерполяции профилей $h_{\nu}(\xi, \tau), \nu = 1, 2$, в качестве $h'_{\nu i}$ можно выбрать величины $m_{\nu i}$. Тем самым соответствующие функции /2.8/ превращаются в кубические периодические сплайны класса C^2 , причем точность $O(\Delta \xi^4)$ интерполяции имеет место для любого $x \in [0, 2\pi]$.

Если величины f'_i неизвестны, то, следуя /8/, можно положить $f'_i = D^{(1)} f_i$. После элементарных преобразований, для $\theta = 1/2$ получим

$$S(\xi_i + \Delta \xi / 2) = (-f_{i-1} + 9f_i + 9f_{i+1} - f_{i+2}) / 16. \quad /2.9/$$

Разлагая в ряд Тейлора правую часть, имеем

$$S(\xi_i + \Delta \xi / 2) = f(\xi_i + \Delta \xi / 2) + O(\Delta \xi^4). \quad /2.10/$$

Следовательно, погрешность формулы /2.9/ имеет такой же порядок, что и разностная схема.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Линейный анализ уравнений движения /1.5/ показывает, что картина распада составной струи /7/ качественно меняется в зависимости от отношения коэффициентов поверхностных натяжений σ_1 / σ_2 , причем можно выделить три характерных интервала его изменения: $\sigma_1 / \sigma_2 \gg 1$, $\sigma_1 \sim \sigma_2$ и $\sigma_1 \ll \sigma_2$. Ввиду многопараметричности задачи имеется также зависимость от безразмерных отношений толщин ядра и струи δ и соответствующих плотностей $\rho_0 = \rho_2 / \rho_1$. По отношению к параметру δ наиболее интересными являются случаи $\delta < \sqrt{2}/2$, для которых при помощи σ_1 / σ_2 можно менять вклад каждой из межфазных поверхностей в неустойчивость струи. Параметр ρ_0 приводит к новым эффектам, если $\rho_0 < 1$. Для начала мы рассмотрим случай $\rho_0 = 1$.

На рис.1а, б, в, показаны формы распада составной струи в коротковолновом диапазоне $\alpha = 0,5$ и для трех типичных значений отношения σ_1 / σ_2 . Первые два рисунка иллюстрируют чаще всего встречающуюся форму распада составной струи, когда первым на капли распадается ядро. В то время как линейные волны приводят к образованию капель одинаковых размеров, при нелинейном развитии возмущений из ядра наряду с основными каплями формируются капли - сателлиты. Основное различие между случаями рис.1а, б, и 1в состоит в величине образующегося сателлита. С уменьшением отношения σ_1 / σ_2 точка отрыва ядра передвигается в сторону сателлита, уменьшая его размер. Кроме того, как видно на рис.1в, обе поверхности обнаруживают тенденцию к сближению в точке раз-

рыва ядра, превращая ее в точку распада составной струи в целом. При этом струя распадается на капли, содержащие центральное ядро и концентрическую сферическую оболочку, состоящую из слоя жидкости, причем такая форма в одинаковой степени относится как к основным, так и к вторичным каплям. Конфигурация составной струи, показанной на рис.1в, соответствует второй типичной форме распада составной струи - одновременного обрывания обеих поверхностей. Третья форма получается в случае $\rho_0 < 1$ и о ней будет сказано ниже.

С гидродинамической точки зрения рис.1а и 1в соответствуют двум разным предельным ситуациям, обнаруживаемым также при линейном анализе задачи. Напомним, что в рамках последнего различия между случаями $\sigma_1/\sigma_2 \gg 1$ и $\sigma_1/\sigma_2 \ll 1$ прослеживается при определении максимального коэффициента нарастания возмущений αq . Этот коэффициент для конечных возмущений удобно ввести по аналогии с однослойной струей как среднее арифметическое из коэффициентов нарастания горба и впадины волны:

$$q_j = \frac{1}{2} \left(\frac{dS_{j+}}{d\tau} + \frac{dS_{j-}}{d\tau} \right), \quad j = 1, 2, \quad /3.1/$$

где

$$S_{j+} = \ln \left| \frac{\max h_j(\xi, \tau) - 1}{h_{j0}} \right|, \quad S_{j-} = \ln \left| \frac{\min h_j(\xi, \tau) - \delta}{h_{j0}} \right|.$$

Здесь индексом $j = 1$ обозначен коэффициент нарастания, относящийся к поверхности ядра, индексом $j = 2$ - относящийся к поверхности слоя. Очевидно, вследствие нелинейного развития возмущений величины q_j являются функциями времени τ при каждом фиксированном волновом числе α и при фиксированных значениях безразмерных параметров составной струи и начальной амплитуды.

Представление о характере изменения величин $S_{j\pm}$ дает рис.2. Как и следовало ожидать, на начальной стадии, пока амплитуды малы, развитие возмущений происходит в соответствии с линейной теорией.

Рис.2. Нарастание горба и впадины волны на обеих поверхностях: $\alpha = 0,5, \sigma_1 = 0,015, \sigma_2 = 0,02, \delta = 0,5, \rho_0 = 1, h_{10} = 0,05$.

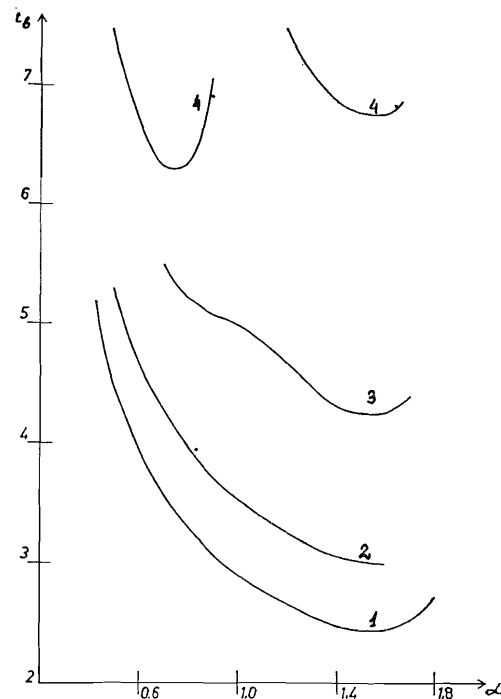
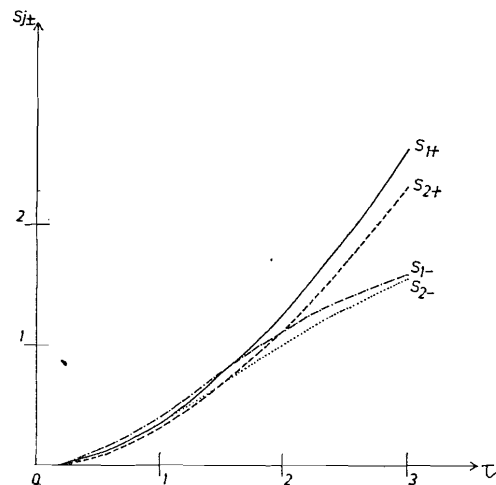


Рис.3. Время распада струи: $\delta = 0,5, \rho_0 = 1, h_{10} = 0,05$. 1- $\sigma_1 = 0,015, \sigma_2 = 0,02$, 2- $\sigma_1 = 0,02, \sigma_2 = 0,04$; 3- $\sigma_1 = 0,02, \sigma_2 = 0,08$; 4- $\sigma_1 = 0,02, \sigma_2 = 0,2$.

рией, что объясняет прямолинейные участки кривых $S_{j\pm}$ на рис.2. Из-за нелинейности на конечных стадиях развития /вблизи момента распада/ коэффициенты нарастания горбов волн на обеих поверхностях возрастают, в то время как соответствующие коэффициенты для впадин убывают. Однако средние коэффициенты нарастания, посчитанные для внутренней и внешней поверхностей, практически совпадают с определенными из линейной теории, за исключением небольшого интервала времени вблизи

момента распада, который составляет около 20% от всего времени распада.

Как было сказано выше, представляет интерес изучение расчетного времени распада τ_b от волнового числа α . Численные расчеты показывают, что для изображенной на рис.3 кривой 1 / $\sigma_1 \gg \sigma_2$ / время распада проходит через минимум, который лежит в окрестности d_{opt} - волнового числа; в предельном случае $\sigma_1/\sigma_2 \rightarrow \infty$ имеем $d_{opt} = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta^{-1}$. Этот вывод согласуется с результатами /3/ и объясняется тем, что ядро струи можно считать практически изолированным - им контролируется неустойчивость составной струи.

Во втором предельном случае $\sigma_1 \ll \sigma_2$ /кривая 3/ струя практически однородна и неустойчивое поведение определяется внешней поверхностью. Это подтверждается наличием минимума времени распада в диапазоне длинных волн / $d_{opt} \approx \sqrt{2}/2$ /. Интересно отметить, что оптимальным волновым числам α_{opt} в обоих случаях соответствуют примерно одинаковые по размеру сателлитные капли; это видно на рис.4 и 5 и наблюдается в экспериментах /6/. Разница только в том, что сателлитная капля на рис.5 отрывается вместе с окружающей ее концентрической оболочкой /это относится и к основным каплям/, а на рис.3 сателлитная капля /так же, как и основная/ формируется из жидкости ядра и увлекается слоем.

Между рассмотренными предельными значениями отношения σ_1/σ_2 лежит область, которую мы условно обозначим как область, где параметры σ_1 и σ_2 имеют одинаковый порядок.

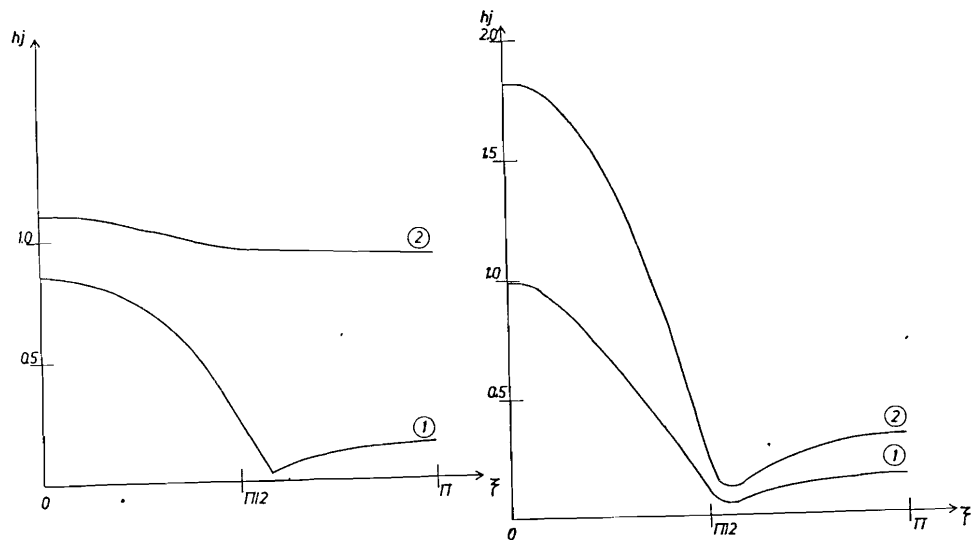


Рис.4. Оптимальный распад ядра составной струи: $a = 1,414$, $\sigma_1 = 0,015$, $\sigma_2 = 0,02$, $\delta = 0,5$, $\rho_0 = 1$, $h_{10} = 0,05$, $\tau_b = 3,48$.

Рис.5. Оптимальный распад составной струи как целое: $a = 0,707$, $\sigma_1 = 0,02$, $\sigma_2 = 0,8$, $\delta = 0,5$, $\rho_0 = 1$, $h_{10} = 0,05$, $\tau_b = 4,145$.

Как показывает линейный анализ, с уменьшением σ_1/σ_2 кривая зависимости времени распада от волнового числа проходит через два минимума: один соответствует $a_{opt}^{(1)} \approx \sqrt{2}/2$, а другой - $a_{opt}^{(2)} \approx \sqrt{2}/2 \delta^{-1}$. Грубо говоря, кривая $\tau_b - a$ как бы включает оба минимума, соответствующих двум предельным случаям $\sigma_1/\sigma_2 \rightarrow 0$ и $\sigma_1/\sigma_2 \rightarrow \infty$. С уменьшением σ_1/σ_2 определяющим /меньшим/ оказывается $a_{opt} \approx \sqrt{2}/2$, причем переход от большего к меньшему a_{opt} происходит скачком. Подобное поведение остается в силе и при нелинейном развитии возмущений, хотя оба волновых числа несколько сближаются. По-видимому, объяснение малоождаемого скачкообразного изменения a_{opt} нужно искать в ограниченности области применимости одномерных уравнений движения составной струи. Как известно, эти уравнения получены при предположении о постоянстве давления поперек струи. Когда вклад поверхностных натяжений обеих поверхностей одного порядка, учет взаимодействия ядра и слоя через давление может оказаться существенным.

В плоскости $\tau - a$ переход от коротковолнового минимума к длинноволновому осуществляется через семейство кривых, имеющих в длинноволновом диапазоне инфлексную точку.

Чтобы закончить рассмотрение типичных форм распада составной струи, рассмотрим случай $\rho_0 < 1$ в области $\sigma_1 \ll \sigma_2$ /рис.6/. С точки зрения отношения σ_1/σ_2 этот случай относится к форме распада, изображенной на рис.5. Однако уменьшение плотности в слое вносит

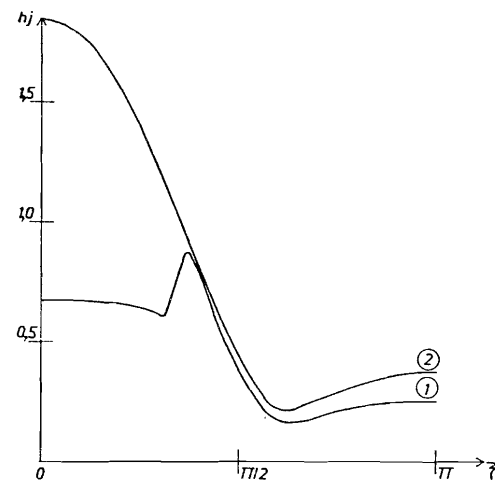


Рис.6. Соприкосновение поверхностей составной струи: $a = 0,707$, $\sigma_1 = 0,00015$, $\sigma_2 = 0,02$, $\delta = 0,5$, $\rho_0 = 0,5$, $h_{10} = 0,05$, $\tau_b = 3,4$.

в развитие возмущений новый эффект: задолго до образования капель обе поверхности сильно приближаются одна к другой и на некотором участке становятся параллельными. В этой конфигурации двухслойная струя теряет устойчивость из-за соприкосновения межфазных поверхностей. Интересно отметить, что линейное решение приводит к непосредственному пересечению поверхностей. Таким образом, образование участка соприкосновения является существенно нелинейным эффектом. При рассмотрении этого участка на основе одномерных уравнений движения нужно соблюдать некоторую осторожность, так как они, вообще говоря, неприменимы при малых толщинах зазора между поверхностями. Это же замечание относится и к области вблизи точки распада струи на конечных стадиях развития возмущений.

Специального внимания заслуживает вопрос о влиянии начальных возмущений на течение струи. При малых начальных амплитудах этот вопрос мы непосредственно связали с решением линеаризованной задачи. Сравнивая с однослойной струей /5/, где фундаментальное решение линейной задачи состоит из возрастающей и убывающей гармоник, мы видим, что в случае двухслойной струи оно имеет четыре линейно-независимые гармоники - две возрастающие и две убывающие /при каждом фиксированном волновом числе в диапазоне $0 < a < 1$ /. Это приводит к большому разнообразию в способе возбуждения возмущений в составной струе. Выше мы рассмотрели только один способ возбуждения, основанный на гармонике с большим коэффициентом нарастания; при этом задается начальная амплитуда внутренней поверхности /начальные условия согласованы с большим коэффициентом нарастания/. Как оказалось, при таком способе возбуждения существенным является выбор старшего коэффициента нарастания /при данном a /. При прочих фиксированных параметрах, при изменении начальных амплитуд h_{10} или h_{20} , форма распада и размер капель практически не меняются; от величины амплитуды, однако, зависит время распада струи.

На рис.7 демонстрируется вариант начальных условий, когда возбуждается только гармоника с меньшим коэффициентом нарастания. Первое отличие от рис.1б состоит в том, что обе поверхности развиваются в противофазе - впадине внешней поверхности соответ-

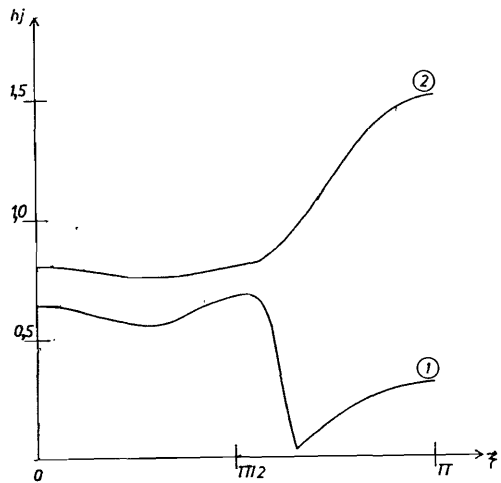


Рис.7. Возбуждение меньшей гармоники составной струи: $a = 0,5$, $\sigma_1 = 0,015$, $\sigma_2 = 0,02$, $\delta = 0,5$, $\rho_0 = 1$; начальные условия, согласованные с меньшей модой, $h_{10} = 0,05$, $\tau_b = 2,555$.

вует горб внутренней. Первым разбивается ядро, образуя основную и сателлитную капли, и, что любопытно, сателлит формируется на участке, на котором расположен горб внешней поверхности; по сравнению с рис.1б размер сателлита сильно уменьшается. На рисунке заметна тенденция к

сближению поверхностей: их можно привести в соприкосновение при подходящем выборе отношения σ_1/σ_2 и фиксированных прочих параметрах, причем можно сохранить ρ_0 равным единице.

В работе ^{13/} использованы начальные условия типа /1.12/, при которых независимо и одновременно гармонически возбуждаются обе поверхности. Развитие поверхностей ядра и слоя при таких начальных возмущениях показано на рис.8 при помощи функций $S_{j\pm}$. Ход этих кривых в длинноволновом диапазоне качественно подобен случаю однослойной струи. Для сравнения была проведена большая серия численных расчетов. В результате можно сформулировать следующий общий вывод: при фиксированных безразмерных параметрах задачи форма распада и размеры основных капель и сателлитов не

зависят от величин начальных амплитуд. Форма распада соответствует линейной теории и чаще всего на конечных стадиях распада возмущения поверхностей являются однофазными. Однофазность возмущений всегда имеет место, если обе начальные амплитуды положительны.

В заключение следует еще раз отметить, что ввиду многопараме-

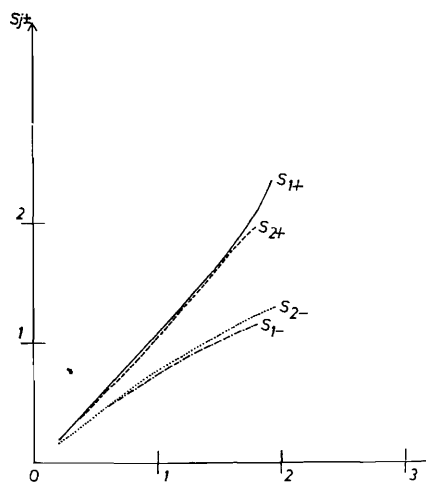


Рис.8. Нарастание горба и впадины волны на обеих поверхностях: параметры, как на рис.2; начальные условия 1,12: $h_{10} = h_{20} = 0,05$.

тричности задачи в настоящей работе исследована роль главным образом отношения поверхностных натяжений и, частично, влияние отношения плотностей, а также некоторых начальных условий. Тем не менее на этой основе можно утверждать, что как объект управления неустойчивость двухслойной струи предоставляет более разнообразные возможности, чем однослойная струя ^{15/}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я., Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости, Научн.тр. Ин-та мех. МГУ, М., №25.
2. Lee H.C., IBM J.Res.Develop., 1974, 18, p.364.
3. Епихин В.Е., Радев С.П., Шкадов В.Я., В сб: Механика, Труды V-го нац. конгр. по теор. и прикл. мех., Варна, 1985, с.592.
4. Маркова М.П., Шкадов В.Я., Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, №3, с.30.
5. Радев С.П., Бояджиев Т.Л., Пузынин И.В., Сообщения ОИЯИ, P5-86-653, Дубна, 1986.
6. Hertz C.H., Hermanrud B., J.Fluid Mech., 1983, 131, p.271.
7. Радев С.П., Шкадов В.Я., Теор. и прикл. мех., 1985, XVI, №3, с.68.
8. Завьялов Ю.С. и др. Методы сплайн-функций. "Наука", М., 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 октября 1986 года.

Радев С.П., Бояджиев Т.Л., Пузынин И.В.
Численное моделирование нелинейной неустойчивости
двухслойной капиллярной струи

P5-86-699

В гидравлическом приближении течение невязкой двухслойной струи, состоящей из ядра и увлекаемого слоя жидкости, описывается системой из четырех нелинейных дифференциальных уравнений относительно полей скоростей и радиусов. Для указанной системы формулируется смешанная задача с периодическими граничными условиями. Проведено численное исследование влияния нелинейностей на некоторые решения соответствующей линеаризованной задачи. В частности, выяснена роль отношения поверхностных натяжений и, частично, отношения плотностей слоев. Для проведения расчетов использовалась консервативная сплайн-разностная схема, описанная ранее /5/. Показано, что как объект управления неустойчивость двухслойной струи предоставляет более разнообразные возможности, чем однослойная струя.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Radev S.P., Boyadjiev T.L., Puzynin I.V.
Numerical Study of Nonlinear Instability
in Two-Layer Capillary Jet

P5-86-699

In hidravlic approach the flow of nonviscous two-layer jet (inner and outer layer) is described by a system of four nonlinear differential equations for the vectors of velocities and radii of the jet. For this system a problem is formulated with periodical boundary conditions. A numerical study how the nonlinearity effects some of the solutions of the corresponding linearized problem is performed. In particular, the role is investigated of such parameters as the ratio of the surface strain and the ratio of the densities in the jet. For this conservative spline-difference scheme is used. It is shown that the two-layer jet, being a system with more parameters that the one-layer jet, is better controlled.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986