

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P5-86-679

Л.А.Бордаг, А.А.Капаев, А.В.Китаев

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ
Вещественных Решений
ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ
ПРИ $\nu = \pm 1/2$**

1986

Введение

Впервые исследование асимптотического поведения решений нелинейных дифференциальных уравнений без подвижных существенных особенностей было проведено в работе Бутру в начале века. В первой части работы^{/1/} он подробно изучает уравнения первого порядка типа Риккати и первое уравнение Пенлеве. Во второй части работы^{/2/} рассмотрены нелинейные уравнения второго и третьего порядка, в частности, второе, третье и четвертое уравнение Пенлеве. Согласно своему методу Бутру после простых преобразований выделяет в уравнении ведущие члены, которые и дают новое, усеченное уравнение. Затем он подробно исследует решения этого уравнения и показывает, что его решения хорошо приближают решения исходного уравнения при $x \rightarrow \pm \infty$. Для второго уравнения Пенлеве

$$u_{xx} = 2u^3 + xu + y$$

таким уравнением служит

$$y_{xx} = 2y^3 - 2y.$$

Впоследствии эти исследования были продолжены Виттихом и Шубартом методами неванлиновской теории (см. в кн.^{/3/}).

Новый этап активного изучения асимптотических свойств решений уравнений типа Пенлеве начался в связи с тем, что эти уравнения стали возникать при описании автомодельных решений нелинейных эволюционных уравнений^{/4,7/}. В работе^{/5/} было описано однопараметрическое семейство решений P_2 при $y=0$ и впервые получены формулы связи, т.е. формулы, связывающие параметры асимптотических разложений при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$. Затем появился ряд других работ по этой тематике^{/5-9/}, и, в частности, работа^{/9/}, в которой была анонсирована формула связи для семейства регулярных решений уравнения P_2 при $y \neq 0$. Тем не менее до сих пор не было получено достаточно полной картины асимптотического поведения решений P_2 даже для $y=0$. Только благодаря методу изомонодромных деформаций для P_2 ($y=0$) удалось получить формулы связи для различных семейств и дать наиболее полную картину асимптотических свойств решений P_2 при $y=0$ ^{/10,11/}. Заметим, что уже первые результаты, полученные для P_2 ($y=0$), были использованы

для сшивки асимптотических разложений решений довольно общих нелинейных уравнений^{/12-14/} и при изучении асимптотик решений уравнения КдФ^{/15,16/}. Поэтому детальное изучение асимптотических свойств решений уравнения P_2 весьма актуально.

Как уже отмечалось^{/17/}, при изучении прямой задачи монодромии для связанной с P_2 линейной системы дифференциальных уравнений случай $\nu = n, n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$ является выделенным и требует отдельного рассмотрения. В данной работе мы дадим полное качественное описание вещественных решений P_2 при $\nu = \pm 1/2$ и приведем асимптотики этих решений при $x \rightarrow \pm \infty$ и соответствующие формулы связи. Общий случай $\nu = n, n + 1/2, n \neq 0$ будет рассмотрен отдельно.

1. Связь решений уравнений P_2 при $\nu = 0$ и $\nu = \pm 1/2$

В работе^{/18/} было замечено, что по известному решению $w(x)$ уравнения $P_2(\nu = 0)$ можно построить решение $u(x)$ уравнения P_2 при $\nu = \pm 1/2$, используя следующую формулу:

$$u(x) = \mp \frac{d}{dx} \ln w\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (I)$$

Кроме того, было известно^{/19/}, что при $\nu = \pm 1/2$ P_2 имеет однопараметрическое семейство решений, выражающихся через функции Эйри по той же формуле (I). Другими словами, если $w(x)$ является решением P_2 при $\nu = 0$ либо решением уравнения Эйри, то функция $u(x)$, построенная по формуле (I), будет решением P_2 при $\nu = \pm 1/2$. В этом разделе мы докажем следующее утверждение, которое позволит нам описать все типы вещественных решений P_2 при $\nu = \pm 1/2$.

Утверждение. По любому решению $u(x)$ уравнения $P_2(\nu = \pm 1/2)$ можно найти такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что $u(x)$ представимо в виде (I), где $w(x)$ является решением уравнения

$$w_{xx} = \lambda w^3 + x w. \quad (2)$$

Если при $x \in \mathbb{R}$ решение $u(x) \in \mathbb{R}$, то и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — некоторое решение $P_2(\nu = \pm 1/2)$, тогда $u(x)$ является однозначной мероморфной функцией на \mathbb{C} с полюсами первого порядка, причем вычеты в них равны ± 1 ^{/20/}. Определим теперь по $u(x)$ функцию $v(x)$:

$$v(x) = \exp\left\{ \text{sign } \nu \int_{\gamma(x_0, x)} u(\tau) d\tau \right\}. \quad (3)$$

В этом выражении полагаем, что x_0, x не лежат в полюсах $u(x)$, и $\gamma(x_0, x)$ — некий путь, соединяющий x_0 и x и не проходящий через полюса $u(x)$. Фиксируем теперь произвольным образом точку x_0 . Определенная так функция $v(x)$ будет однозначной мероморфной функцией на \mathbb{C} . Полюса $v(x)$ будут расположены в тех же точках, что и

полюса $u(x)$, имеющие вычеты, равные -1 , а нули — в полюсах $u(x)$ с вычетами, равными $+1$. Покажем теперь, что для построенной так функции v выражение $\frac{v_{xx}}{v^3} + \frac{x}{2v^2}$ будет постоянным. Действительно, согласно (3)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v_{xx}}{v^3} + \frac{x}{2v^2} \right) = \text{sign } \nu \int_{\gamma(x_0, x)} u(\tau) d\tau \exp(\text{sign } \nu \int_{\gamma(x_0, x)} u(\tau) d\tau).$$

Справа мы получаем нуль, так как по предположению $u(x)$ является решением $P_2(\nu = \pm 1/2)$, следовательно, слева выражение в скобках равно константе, которую мы обозначим $\lambda(x_0)$. Тем самым мы по u построили решение уравнения

$$v_{xx} = \lambda v^3 - \frac{x}{2} v.$$

Определив теперь функцию $w(x)$ следующим образом: $w(x) \equiv \sqrt[3]{2} v(\sqrt{2}x)$, мы получим, что w является решением уравнения (2). Докажем теперь, что если $x, u(x) \in \mathbb{R}$, то и λ можно выбрать вещественным за счет выбора надлежащим образом x_0 . Пусть x_0 и x_1 лежат на вещественной оси так, что на отрезке $[x_0, x_1]$ нет полюсов $u(x)$. Перепишем теперь выражение (3) так:

$$v(x) = \exp\left\{ \text{sign } \nu \int_{x_0}^x u(\tau) d\tau \right\}, \quad x \in [x_0, x_1] \subset \mathbb{R},$$

ясно, что $v(x)$ — вещественная функция, и тем самым λ также вещественно. Утверждение полностью доказано.

Если в уравнении (2) $\lambda = 0$, то оно сводится к уравнению Эйри. Если же $\lambda \neq 0$, то мы можем сделать замену $w(x) = \sqrt{\lambda} \tilde{w}(x)$ и прийти к уравнению $P_2(\nu = 0)$ для $\tilde{w}(x)$. Легко заметить, что при такой замене мы получим при вещественной $w(x)$ либо вещественную функцию $\tilde{w}(x)$, если $\lambda > 0$, либо чисто мнимую, если $\lambda < 0$. Следовательно, чтобы описать все вещественные решения уравнения $P_2(\nu = \pm 1/2)$ нам нужно описать вещественные решения уравнения (2) при $\lambda = 0$, а также вещественные и чисто мнимые решения уравнения P_2 при $\nu = 0$. Вещественные решения уравнения Эйри хорошо описаны в литературе, вещественные и чисто мнимые решения P_2 при $\nu = 0$ качественно описаны в работах^{/10,11/}. Опираясь на эти результаты, мы опишем все типы вещественных решений уравнения P_2 при $\nu = \pm 1/2$.

2. Описание асимптотики вещественных решений уравнения P_2 при $\nu = \pm 1/2$

Мы ограничимся рассмотрением случая $\nu = -1/2$, так как при замене $u(x)$ на $-u(x)$ мы переходим от решения $u(x)$ уравнения P_2 при $\nu = -1/2$ к решению $\tilde{u}(x) = -u(x)$ уравнения P_2 при $\nu = +1/2$.

Рассмотрим сначала однопараметрическое семейство решений уравнения $P_2(\nu = -1/2)$, порожденное функциями Эйри. В уравнении (2) при $\lambda = 0$ сделаем замену $w(x) = \sqrt[3]{2} v(-\sqrt[3]{2} x)$, функция $v(x)$ при этом будет удовлетворять уравнению $v_{xxx} + \frac{x}{2} v = 0$. Запишем $v(x)$ в виде $v(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — линейно независимые решения с асимптотиками

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} (-x)^{1/4} \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) (1 + O((-x)^{-3/2})), \\ f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} x^{-1/4} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) O(x^{-3/2}) \right\}, \\ g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} (-x)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) (1 + O((-x)^{-3/2})), \\ g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} x^{-1/4} \left\{ \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) O(x^{-3/2}) \right\}. \end{aligned}$$

Построенное по $v(x)$ решение $u(x)$ уравнения $P_2(\nu = -1/2)$ будет иметь следующую асимптотику* при $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} u(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-\frac{x}{2}} (1 + O((-x)^{-3/2})), \quad \alpha = 0; \quad \alpha \neq 0, \quad (4) \\ u(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{-\frac{x}{2}} (1 + O((-x)^{-3/2})) + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{-\frac{x}{2}} \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) (1 + O((-x)^{-3/2})). \end{aligned}$$

При $x \rightarrow +\infty$ это семейство решений будет иметь следующую асимптотику:

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{2}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}\right). \quad (5)$$

Это утверждение справедливо и при $\alpha = 0$.

Таким образом, мы построили семейство решений $P_2(\nu = -1/2)$ с полюсами на вещественной оси, накапливающимися на $+\infty$. Качественный вид решений этого семейства приведен на рисунке I.

Остальные вещественные решения P_2 при $\nu = -1/2$ мы построим по вещественным и мнимым решениям P_2 при $\nu = 0$. Ниже мы дадим описание этих решений, опираясь на результаты работ^{/10,11/}. В отличие от работы^{/II/} здесь будем описывать сингулярные решения не распределением полюсов, а главными членами их асимптотик. Кроме того, будем везде ниже полагать, что в уравнении (2) $\lambda = 2$ (этого легко добиться простой заменой переменных).

* В последнем выражении мы оставили экспоненциально малый член, т.к. параметр β/α , описывающий это семейство, входит только в него.

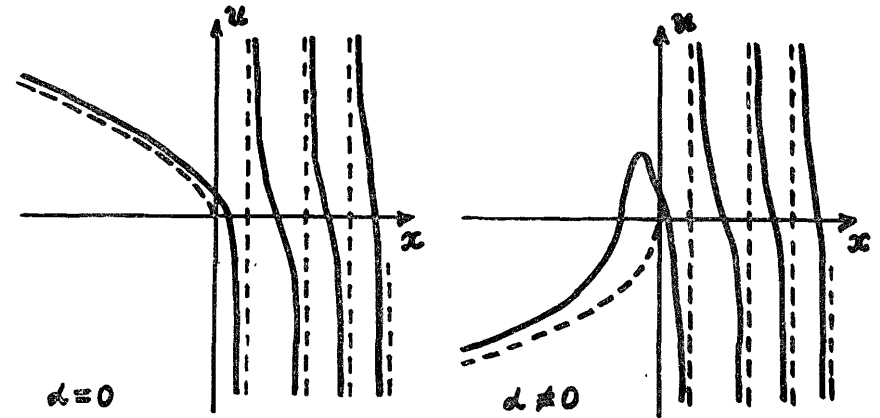


Рис. I

При $x \rightarrow -\infty$ вещественное или чисто мнимое решение $w(x)$ ** может иметь асимптотику только одного из трех ниже приведенных видов,

$$w_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \alpha (-x)^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} - \frac{3}{4} \alpha^2 \ln(-x) - \frac{3}{2} \alpha^2 \ln 2 - \arg \Gamma\left(\frac{\alpha^2}{2i}\right) - \theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad \theta \in \mathbb{R}, \text{ либо } \alpha \geq 0 \text{ либо } i\alpha \geq 0; \quad (6)$$

$$w_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-\frac{x}{2}} (1 + O((-x)^{-3/2})) - \frac{\beta}{2\sqrt{2}\pi} (-2x)^{-1/4} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}} (1 + O((-x)^{-3/2})), \quad \beta \in \mathbb{R}; \quad (7)$$

$$w_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{3}{2} \alpha \ln(-x) + 3\alpha \ln 2 - \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha\right) - \theta\right), \quad \alpha, \theta \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Аналогичную картину мы получаем и при $x \rightarrow +\infty$:

$$w_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3} x^{3/2}} (1 + O(x^{-3/2})) + \frac{1}{4x} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3} x^{3/2}} (1 + O(x^{-3/2}))\right)^3, \quad \alpha^2 \in \mathbb{R}; \quad (9)$$

$$w_5(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a_{-1} \sqrt{\frac{x}{2}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2} + \frac{3}{4} \beta \ln x + \frac{7}{4} \beta \ln 2 + \frac{1}{2} \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\beta\right) + \frac{1}{2} \chi\right), \quad a_{-1} = \pm 1, \beta, \chi \in \mathbb{R}; \quad (10)$$

$$w_6(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a_{-1} \left\{ i \sqrt{\frac{x}{2}} - i\beta (2x)^{-1/4} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - \frac{3}{2} \beta^2 \ln x + \frac{\pi}{4} - \frac{7}{2} \beta^2 \ln 2 - \arg \Gamma(-i\beta^2) - \chi\right) \right\}, \quad a_{-1} = \pm 1, \beta, \chi \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

** Везде в дальнейшем мы будем обозначать решения P_2 при $\nu = 0$ через $w(x)$, а решения P_2 при $\nu = -1/2$ через $u(x)$.

** Заметим, что нули и полюса $w(x)$ и $u(x)$ в формулах (6-11) не совпадают с нулями и полюсами функций, стоящих справа, они лишь лежат в окрестности порядка $O(|x|^{-3/2})$ этих точек и тем самым наши формулы дают правильное асимптотическое описание решений P_2 везде вне этих окрестностей.

Используя эти результаты и формульное утверждение, можно описать асимптотики всех вещественных решений $u(x)$. Из (6-8) получаем, что при $x \rightarrow +\infty$ $u(x)$ может иметь асимптотику только одного из трех типов:

$$u_1(x) \rightarrow \sqrt{\frac{x}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{x}{3}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} d^2 \ln x - \frac{5}{4} d^2 \ln 2 - \arg \Gamma\left(\frac{d^2}{2i}\right) - \theta + \frac{\pi}{4}\right), \theta, d^2 \in \mathbb{R}; \quad (12)$$

$$u_2(x) \rightarrow \frac{1}{2x} (1 + O((-x)^{-3})) + \frac{b}{2\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}} (1 + O(x^{-\frac{3}{2}})), \quad b \in \mathbb{R}; \quad (13)$$

$$u_3(x) \rightarrow -\sqrt{\frac{x}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{x}{3}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} d \ln x + \frac{5}{2} d \ln 2 - \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + id\right) - \theta\right), \quad \alpha, \theta \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Используя теперь формулы (9-11), получаем, что и при $x \rightarrow -\infty$ вещественное решение $u(x)$ может иметь асимптотику только одного из трех ниже указанных видов:

$$u_4(x) \rightarrow \sqrt{-\frac{x}{2}} (1 + O((-x)^{-\frac{3}{2}})) + \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} (-x)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3} (-x)^{\frac{3}{2}}} (1 + O((-x)^{-\frac{3}{2}})), \quad a^2 \in \mathbb{R}; \quad (15)$$

$$u_5(x) \rightarrow \sqrt{-x} \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\beta \ln(-x) + 3\beta \ln 2 + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\beta\right) + \chi\right), \quad \beta, \chi \in \mathbb{R}; \quad (16)$$

$$u_6(x) \rightarrow -\beta^{\frac{2}{3}} \sqrt{-x} \sin\left(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\beta^2 \ln(-x) - 3\beta^2 \ln 2 - \arg \Gamma(-i\beta^2) - \chi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \beta, \chi \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Заметим, что выражение (15) лишь на экспоненциально малые члены отличается от полученного ранее при рассмотрении решений $u(x)$, порожденных функциями Эйри (4).

Таким образом, мы описали все возможные типы асимптотического поведения вещественных решений P_2 при $\nu = -\frac{1}{2}$. Следующей нашей задачей является установление связи между параметрами, входящими в асимптотические формулы для решений $u(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$.

3. Формулы связи

Метод изомонодромных деформаций^{/10/}, основанный на вычислении данных монодромии системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированных с P_2 ($\nu = 0$), позволяет не только явно найти вид асимптотических формул, но и определить характер асимптотики решения $u(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если задана асимптотика при $x \rightarrow -\infty$ и наоборот. В рамках этого метода решения естественным образом параметризуются данными монодромии, которые являются первыми интегралами P_2 ($\nu = 0$). На практике же удобнее другая параметризация, использующая в качестве параметров амплитуды и фазы, как в наших формулах $a, b, d, \beta, \theta, \chi$.

Поэтому, используя метод изомонодромных деформаций, мы из явных формул, выражающих эти параметры через данные монодромии, исключим данные монодромии и получим формулы связи параметров асимптотических разложений на $-\infty$ и на $+\infty$. Эта процедура исключения данных монодромии уже была проделана в работах^{/10,11/} для уравнения P_2 при $\nu = 0$. Из наших рассуждений ясно, что эти формулы полностью переносятся и на случай $\nu = -\frac{1}{2}$. В этом параграфе мы еще раз приведем эти формулы связи, одновременно перечисляя все возможные классы вещественных решений P_2 при $\nu = -\frac{1}{2}$. На соответствующих рисунках будет дана качественная картина поведения решений семейств $\mathcal{W}(x)$ и порожденных ими семейств решений $u(x)$.

Тип I (рис.2). Однопараметрическое семейство решений $u(x)$ с асимптотиками соответственно $u_1(x)$ (12) и $u_4(x)$ (15), порожденное семействами $\mathcal{W}(x)$ и $i\mathcal{W}(x)$ с асимптотиками $\mathcal{W}_1(x)$ (6) и $\mathcal{W}_4(x)$ (9). Формулы связи для этих семейств были получены Абловицем и Сегуром^{/5/} и имеют вид

$$d^2 = -\frac{1}{\pi} \ln(1-a^2), \quad \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a, & 0 < a^2 < 1 \\ \arg a, & a^2 < 0 \end{cases}$$

$$\arg a = \begin{cases} 0, & a^2 > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a^2 < 0 \end{cases}$$

Для наших целей достаточно следующих формул:

$$d^2 = -\frac{1}{\pi} \ln(1-a^2), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad a^2 < 1.$$

Заметим, что все вычеты в полюсах $u(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ равны +1.

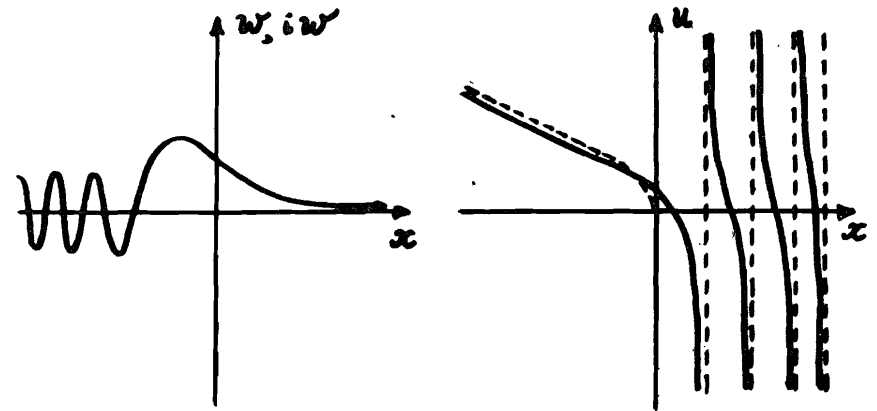


Рис.2

Тип 2 (рис.3). Двухпараметрическое семейство $u(x)$ с асимптотиками $u_1(x)$ (I2) и $u_5(x)$ (I6), порожденное семейством решений $w(x)$ с асимптотиками $w_1(x)$ (6) и $w_5(x)$ (I0). Формулы связи здесь имеют следующий вид:

$$\beta = \frac{1}{\pi} \ln \left\{ 2(1 - e^{-\pi\alpha^2})^{1/2} e^{\pi\alpha^2} |\cos\theta| \right\},$$

$$\chi = \arctg \frac{(1 - e^{-\pi\alpha^2}) \sin 2\theta}{1 + (1 - e^{-\pi\alpha^2}) \cos 2\theta}, \quad a_{-1} = \text{sign}(\cos\theta).$$

Их можно обратить* и выразить параметры α и θ через β и χ, a_{-1} :

$$\alpha^2 = -\frac{1}{\pi} \ln \left\{ 2e^{-2\pi\beta} \left[(1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} \cos\chi - 1 \right] \right\},$$

$$\theta = \arctg \frac{(1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} \sin\chi}{(1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} \cos\chi - 1} + \frac{\pi}{2} (1 - a_{-1} \text{sign}(1 - (1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} \cos\chi)).$$

Функция $u(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ имеет в полюсах вычеты, равные поочередно $+1$ и -1 , при $x \rightarrow +\infty$ все вычеты в полюсах функций $u(x)$ и $w(x)$ равны $+1$.

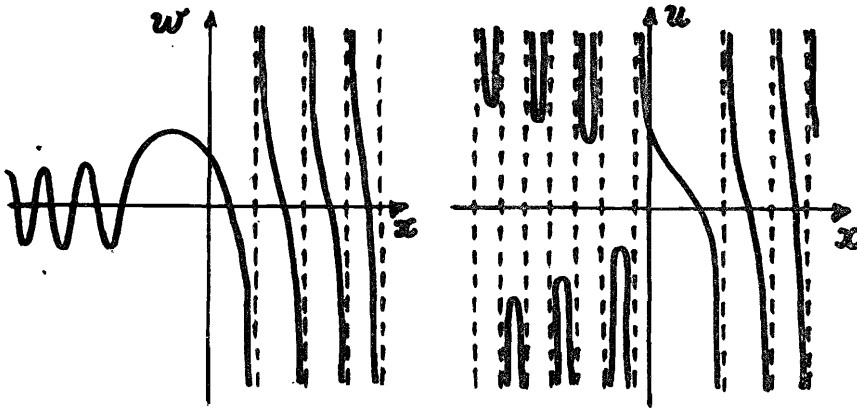


Рис.3

* Прямые и обратные формулы связи нужны нам для того, чтобы по заданному поведению $u(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ (и, соответственно, при $x \rightarrow +\infty$) определить поведение $u(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (соответственно при $x \rightarrow -\infty$).

Тип 3 (рис.4). Двухпараметрическое семейство решений $u(x)$ с асимптотиками $u_1(x)$ (I2) и $u_6(x)$ (I7), построенное по семейству $w(x)$ с асимптотиками $w_1(x)$ (6) и $w_6(x)$ (II). Формулы связи здесь таковы:

$$\beta^2 = -\frac{1}{\pi} \ln \left\{ 2(e^{-\pi\alpha^2} - 1)^{1/2} e^{\pi\alpha^2} |\cos\theta| \right\},$$

$$\chi = \begin{cases} \arctg \frac{(e^{-\pi\alpha^2} - 1) \sin 2\theta}{(e^{-\pi\alpha^2} - 1) \cos 2\theta - 1} + \frac{\pi}{2} (1 - \text{sign}(1 - (e^{-\pi\alpha^2} - 1) \cos 2\theta)), \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } (e^{-\pi\alpha^2} - 1) \cos 2\theta - 1 = 0, \sin 2\theta < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ если } (e^{-\pi\alpha^2} - 1) \cos 2\theta - 1 = 0, \sin 2\theta > 0; \end{cases}$$

$$a_{-1} = -\text{sign}(\cos\theta).$$

Обращение этих формул дает следующий результат:

$$\alpha^2 = -\frac{1}{\pi} \ln \left\{ 2e^{2\pi\beta^2} \left[1 - \cos\chi (1 - e^{-2\pi\beta^2})^{1/2} \right] \right\},$$

$$\theta = \arctg \frac{(1 - e^{-2\pi\beta^2})^{1/2} \sin\chi}{(1 - e^{-2\pi\beta^2})^{1/2} \cos\chi - 1} + \frac{\pi}{2} (1 + a_{-1}).$$

Легко заметить, что дискретный параметр a_{-1} не входит в число параметров асимптотик $u_5(x)$ и $u_6(x)$. С другой стороны, он присутствует в асимптотике $u_1(x)$ (через θ), но в этом нет противоречия, так как функция $\text{ctg } \pi$ -периодична. Все вычеты функции $u(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ равны $+1$.

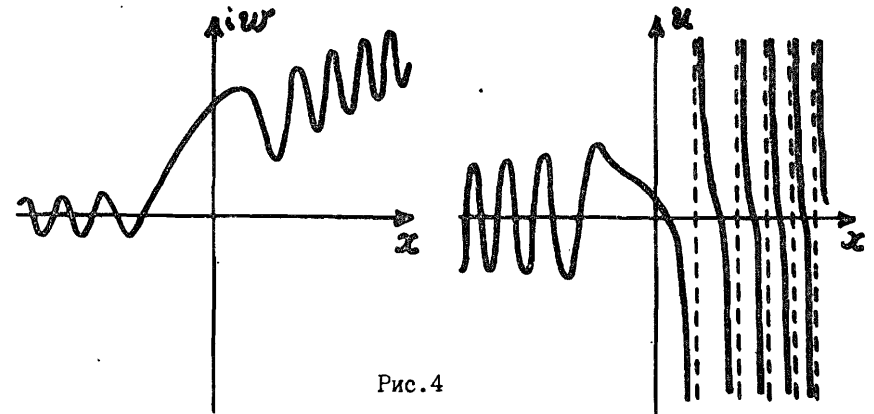


Рис.4

Тип 4 (рис.5). Представлен одним решением $u(x)$ с асимптотиками $u_2(x)$ (I3) и $u_4(x)$ (I5), которое получается из $w(x)$ с асимптотиками $w_2(x)$ (7) и $w_4(x)$ (9), где мы должны положить $b=0$ и $a=1$. Обе функции не имеют полюсов на вещественной оси.

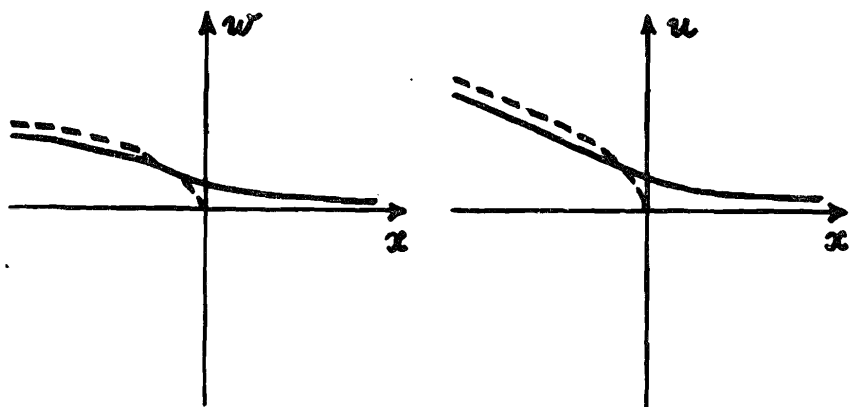


Рис.5

Тип 5 (рис.6). Однопараметрическое семейство решений $u(x)$ с асимптотиками соответственно $u_2(x)$ (I3) и $u_5(x)$ (I6), построенное по семейству $w(x)$ с асимптотиками $w_2(x)$ (7) и $w_5(x)$ (I0). Формулы связи таковы: $\beta = \frac{1}{\pi} \ln b$, $a_{-1} = \text{sign } b$, $\chi = -\text{arctg } b = -a_{-1} e^{\pi\beta}$. Вычеты в полюсах $u(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ равны поочередно $+1, -1$.

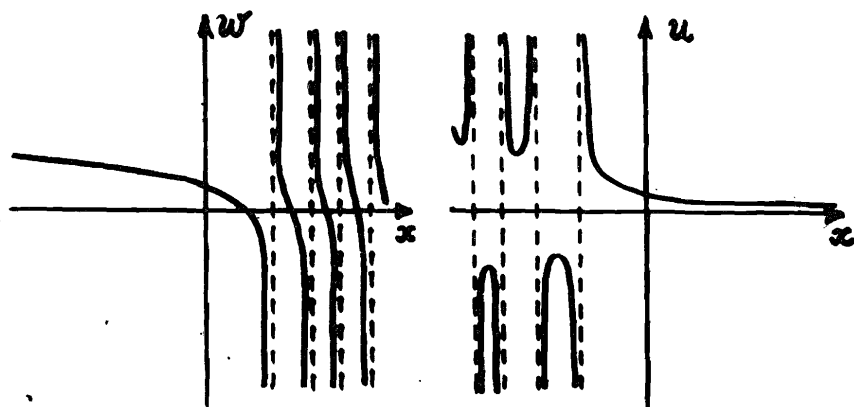


Рис.6

Тип 6 (рис.7). Однопараметрическое семейство решений $u(x)$ с асимптотиками $u_3(x)$ (I4) и $u_4(x)$ (I5), порожденное семейством $w(x)$ с асимптотиками $w_3(x)$ (8) и $w_4(x)$ (9). Здесь мы должны положить

$$d = \frac{1}{2\pi} \ln(a^2 - 1), \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \text{sign } a, \quad a^2 > 1$$

(из-за периодичности ctg можно считать $\theta = \pi/2$). Вычеты в полюсах $u(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ равны -1 .

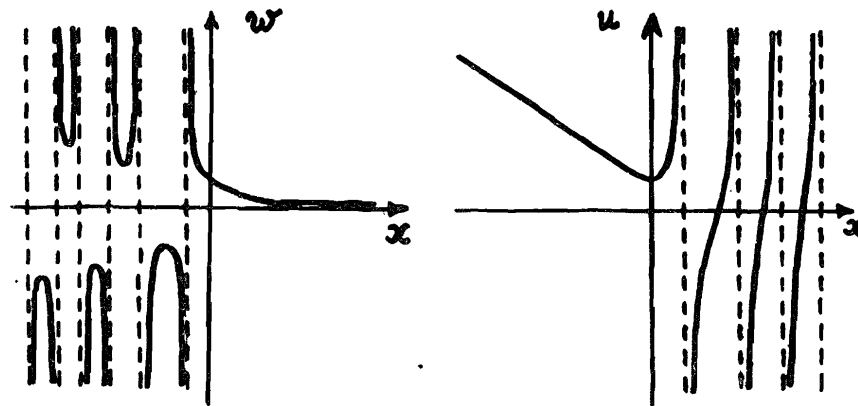


Рис.7

Тип 7 (рис.8). Двухпараметрическое семейство решений $u(x)$ с асимптотиками $u_3(x)$ (I4) и $u_5(x)$ (I6), построенное по семейству $w(x)$ с асимптотиками $w_3(x)$ (8) и $w_5(x)$ (I0). Формулы связи здесь имеют вид

$$\beta = \frac{1}{\pi} \ln \left\{ 2(1 + e^{2\pi d})^{1/2} e^{-2\pi d} |\cos \theta| \right\},$$

$$\chi = \begin{cases} \text{arctg} \frac{(1 + e^{2\pi d}) \sin 2\theta}{1 + (1 + e^{2\pi d}) \cos 2\theta} - \frac{\pi}{2} (1 + \text{sign}(1 + (1 + e^{2\pi d}) \cos 2\theta))), \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ при } 1 + (1 + e^{2\pi d}) \cos 2\theta = 0, \sin 2\theta > 0, \\ +\frac{\pi}{2}, \text{ при } 1 + (1 + e^{2\pi d}) \cos 2\theta = 0, \sin 2\theta < 0; \end{cases}$$

$$a_{-1} = -\text{sign}(\cos \theta).$$

Обращение этих формул дает

$$d = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ 2e^{-2\pi\beta} (1 - \cos \chi (1 + e^{2\pi\beta})^{1/2}) \right\},$$

$$\theta = \arctg \frac{(1 + e^{2\pi\beta}) \sin \chi}{(1 + e^{2\pi\beta}) \cos \chi - 1} + \frac{\pi}{2} (1 + a_-, \text{sign}(1 - (1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} \cos \chi)).$$

Решения этого семейства $u(x)$ имеют при $x \rightarrow +\infty$ вычеты в полюсах, равные -1 , а при $x \rightarrow -\infty$ равные поочередно $+1$ и -1 .

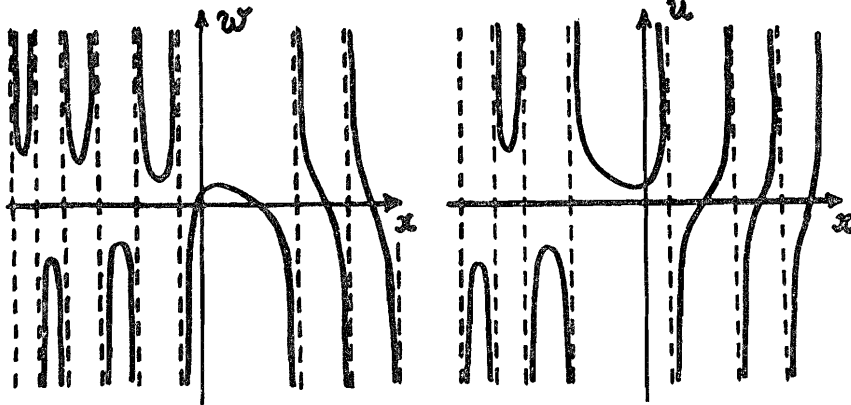


Рис.8

Мы описали таким образом все типы вещественных решений уравнения $P_2(\nu = -\frac{1}{2})$. Рассмотрение полученных вещественных решений приводит к выводу: у P_2 при $\nu = -\frac{1}{2}$ есть только одно вещественное решение (тип 4 рис.5), не имеющее полюсов на вещественной оси. В случае $\nu = 0$ у P_2 было однопараметрическое семейство решений без полюсов на вещественной оси^[5]. При $\nu = -\frac{1}{2}$ такого семейства нет и это хорошо согласуется с результатами работы^[9].

Приведем еще две таблицы, из которых следует, как по заданному поведению $u(x)$ на одной из бесконечностей определить, в зависимости от параметров, поведение на другой бесконечности. В левом столбце таблиц - заданное поведение при $x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow +\infty$), в правых - искомого поведения при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) вместе с условиями на параметры асимптотик.

Таблица I

$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$		
$u \rightarrow u_4$	$a^2 = 1$	$a^2 < 1$	$a^2 > 1$
	$u \rightarrow u_2$	$u \rightarrow u_1$	$u \rightarrow u_3$
$u \rightarrow u_5$	$\cos \chi (1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} = 1$	$\cos \chi (1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} < 1$	$\cos \chi (1 + e^{2\pi\beta})^{1/2} > 1$
	$u \rightarrow u_2$	$u \rightarrow u_3$	$u \rightarrow u_4$
$u \rightarrow u_6$	$u \rightarrow u_6$		

$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$		
$u \rightarrow u_1$	$\theta = \pi/2$	$\theta \neq \pi/2, d^2 > 0$	$\theta \neq \pi/2, d^2 < 0$
	$u \rightarrow u_4$	$u \rightarrow u_5$	$u \rightarrow u_6$
$u \rightarrow u_2$	$b = 0$		$b \neq 0$
	$u \rightarrow u_4$		$u \rightarrow u_5$
$u \rightarrow u_3$	$\theta = \pi/2$		$\theta \neq \pi/2$
	$u \rightarrow u_4$		$u \rightarrow u_5$

Авторы благодарны А.Р.Итсу за то, что он обратил их внимание на эту тематику, В.Б.Матвееву за интерес к работе и В.Г.Маханькову за поддержку.

Литература

1. Boutroux P. Ann. Écol. Norm. Supér. (3), 1913, 30, p.255 .
2. Boutroux P. Ann. Écol. Norm. Supér. (3), 1914, 31, p.99 .
3. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., ГИФМЛ, 1960.
4. Lakshmanan M., Kaliappan P. J. Math. Phys., 1983, 24, 4, p.795 .
5. Ablowitz M.J., Segur H. Phys. Rev. Lett., 1977, 38, 20, p.1103 .
6. Ablowitz M.J., Kruskal M., Segur H. J. Math. Phys., 1979, 20, 6, p.999 .
7. Miles J.W. J. Fluid Mech., 1978, 84, part 1, p.181 .
8. Абдуллаев А.С. ДАН СССР, 1983, 273, № 5, с.1033.
9. McCoy B.M., Tang Sh. Preprint ITP-SB-85-19, New York, 1985 .
10. Its A.R., Novokshenov V.Yu. Lect. Notes in Math., 1986, 1191, p.1 .
11. Караев А.А. Lect. Notes in Math., 1986, 1191, p.261 .
12. Новокшенов В.Ю. Дифф. уравнения, 1985, 21, № II, с.1915.
13. Haberman R. Stud. Appl. Math., 1977, 57, 3, p.247 .
14. Redekopp Larry G., Stud. Appl. Math., 1980, 63, № 3, p.185 .
15. Ablowitz M.J., Segur H. Stud. Appl. Math., 1977, 57, 1, p.13 .
16. Rosales R. Proc. Roy. Soc. London Series A, 1978, 361, p.265 .

17. Flashka H., Newell A. C. Commun. Math. Phys., 1980, 76, p. 65 .
 18. Громак В.И. Дифф. уравнения, 1982, 18, № 5, с. 753.
 19. Gambier B. Acta Math., 1910, 33, p. 1 .
 20. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., ГИИЛ, 1950.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике гяжельх ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды .XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 октября 1986 года.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Бордаг Л.А., Капаев А.А., Китаев А.В.

P5-86-679

Асимптотическое описание вещественных решений второго уравнения Пенлеве при $\nu = \pm 1/2$

Доказано утверждение о связи решений второго уравнения Пенлеве (P_2) при $\nu = \pm 1/2$ с решениями P_2 при $\nu = 0$ и с решениями уравнения Эйри. На основе этого утверждения получено описание асимптотик вещественных решений P_2 при $\nu = \pm 1/2$. Выписаны соответствующие формулы связи и указаны все возможные классы вещественных решений P_2 ($\nu = \pm 1/2$). Приведены графики качественного поведения решений этих семейств.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Bordag L.A., Kapayev A.A., Kitaev A.V.

P5-86-679

The Asymptotical Description of the Real Solutions to the Second Painleve Equation for $\nu = \pm 1/2$

It is proved a new statement on the connection between the solutions of the second Painleve equation (P_2) for $\nu = \pm 1/2$ with those for $\nu = 0$ as well as with the Airy function. This allows the description of the asymptotics of the real solutions to P_2 with $\nu = \pm 1/2$. The corresponding connection formulae are given and all possible classes of real solutions to P_2 ($\nu = \pm 1/2$) are found. The figures for the qualitative behaviour of all classes of solutions are represented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986