объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-667

Л.А.Бордаг, В.Б.Матвеев

О МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С НЕДИАГОНАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Направлено в журнал "Letters
in Mathematical Physics"

1986

Введение

В 1972 году в работах [1,2] был предложен новый прием построения и доказательства существования и полноты волновых операторов в задачах потенциального рассеяния, использующий конструкцию вспомогательного одевающего оператора T. Это позволило исследовать широкие классы осциллирующих потенциалов. Одевающий оператор конструировался как псевдодифференциальный оператор. Символ его представлял собой подходящее приближенное решение уравнения Шредингера, обеспечивающее свойство ядерности оператора $HT-TH_0$ (или его сужения на подходящее подпространство), где H_0 и H – свободный и возмущенный операторы Шредингера соответственно. Аналогичная конструкция применима и оказывается достаточно полезной не только в задачах потенциального рассеяния, но и в более общих ситуациях. В настоящей работе мы показываем плодотворность подобного подхода в модели Фридрихса[3], где ядро оператора возмущения имеет слабую особенность вне диагонали. Впервые такая модель рассматривалась В.С.Буслаевым в 1970 году [5], однако используемая там довольно трудоемкая техника позволяла установить лишь существование волновых операторов

$$W_{\pm}(H,H_0) = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, \exp(itH)\exp(-itH_0). \qquad (1)$$

Здесь мы строим подходящий одевающий оператор T и устанавливаем существование и полноту обобщенных волновых операторов

$$W_{\pm}(H,H_0|T) = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, \exp(itH)\,T\exp(-itH_0), \qquad (2)$$

совпадение которых с $W_{\pm}(H,H_0)$ следует из того, что

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\,(T-I)\exp(-itH_0)=0. \qquad (3)$$

Доказательство сводится к анализу оператора $HT-TH_0$ и последующей ссылке на абстрактные теоремы Бирмана–Белопольского [6], доказанные в рамках теории рассеяния для пары пространств и, по-видимому, впервые примененные в задачах потенциального рассеяния в работах [1,2].

I. Описание модели

Моделью Фридрихса мы будем называть пару самосопряженных операторов H_0 и $H=H_0+V$ в $L_2(R)$ с областями определения $\mathcal{D}(H_0)$ и $\mathcal{D}(H)$ соответственно, действие которых на элемент $f\in\mathcal{D}(H_0)\cap\mathcal{D}(H)$ определяется формулой *)

$$(H_0 f)(\lambda)=\lambda f(\lambda),$$

$$(Hf)(\lambda)=\lambda f(\lambda)+\int v(\lambda,\mu)f(\mu)\,d\mu .$$

Ядро оператора V симметрично и имеет вид

$$v(\lambda,\mu)=\varphi_2(\lambda,\mu)+\frac{\varphi_1(\lambda,\mu)}{(\lambda-\varkappa(\mu))^{\alpha}},$$

где $0\le\alpha\le 1/2$, функции $\varphi_1(\lambda,\mu)$ и $\varphi_2(\lambda,\mu)$ представимы как

$$\varphi_1(\lambda,\mu)=\frac{\tilde{\varphi}_1(\lambda,\mu)(1-h((\lambda-\mu)/\varepsilon))}{(\lambda-\varkappa(\mu))^{\alpha}},\quad \varphi_2(\lambda,\mu)=\tilde{\varphi}_2(\lambda,\mu)\,h\!\left(\frac{\lambda-\mu}{\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon>0$, $h(x)$ – срезающая функция с масштабом I, равная I в окрестности нуля. Мы предполагаем, что функции $\varphi_1(\lambda,\mu)$ и $\varphi_2(\lambda,\mu)$ удовлетворяют условиям

$$\iint\varphi_2^2(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu<\infty,\quad \int\left(\frac{d}{d\mu}\varphi_2(\lambda,\mu)\right)^2 d\lambda<\infty, \tag{A}$$

$$\iint\frac{\varphi_1^2(\lambda,\mu)}{(\lambda-\varkappa(\mu))^{2\alpha}}\,d\lambda\,d\mu<\infty . \tag{B}$$

Оператор H мы можем теперь представить в виде

$$(Hf)(\lambda)=(H_0 f)(\lambda)+(V_1 f)(\lambda)+(V_2 f)(\lambda),$$

где V_2 – интегральный оператор с ядром $\varphi_2(\lambda,\mu)$, а V_1 – с ядром $\varphi_1(\lambda,\mu)(\lambda-\varkappa(\mu))^{-\alpha}$. Условия (A) и (B) обеспечивают полную непрерывность оператора V и, следовательно, совпадение областей определения операторов H и H_0, $\mathcal{D}(H)=\mathcal{D}(H_0)$. Область $\mathcal{D}(H_0)$ – это множество функций, удовлетворяющих условию

$$\int(1+|\lambda|^2)\,|f(\lambda)|^2\,d\lambda<\infty .$$

Самосопряженность оператора H_0 на этой области хорошо известна /4/.

*) Здесь и ниже интегрирование без указания пределов считается распространенным на R и в двойных интегралах соответственно на R^2.

2. Построение одевающего оператора и доказательство существования и полноты волновых операторов $W_\pm(H,H_0)$

Будем искать одевающий оператор T в виде $T=I+K$, где I – единичный, а K – интегральный оператор, определяемый из уравнения

$$KH_0-H_0K=V_1 .$$

Ядро оператора K, очевидно, имеет вид $k(\lambda,\mu)=\dfrac{\varphi_1(\lambda,\mu)}{(\lambda-\varkappa(\mu))^{\alpha}(\lambda-\mu)}$.

Покажем, что для пары H и H_0 и оператора T существуют локальные обобщенные волновые операторы

$$W_\pm(H,H_0|T,\Delta)=\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\exp(itH)\,T\exp(-itH_0)E_0(\Delta),$$

$$W_\pm(H_0,H|T^*,\Delta)=\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\exp(itH_0)\,T^*\exp(-itH)PE(\Delta), \tag{4}$$

где Δ – ограниченный открытый интервал вещественной оси, $E_0(\Delta)$, $E(\Delta)$ – соответствующие спектральные проекторы операторов H_0 и H, P – проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора H.

Обозначим $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_\infty$ класс ядерных и класс вполне непрерывных операторов. Используя теорему 4.4 работы /6/, можно показать /2/, что при выполнении условий

$$(HT-TH_0)E_0(\Delta)\in\mathfrak{S}_1, \tag{I}$$

$$(T-I)\in\mathfrak{S}_\infty, \tag{II}$$

$$\mathcal{D}(H)=\mathcal{D}(H_0) \tag{III}$$

существуют локальные обобщенные волновые операторы (4) и имеет место равенство

$$W_\pm^*(H,H_0|T,\Delta)=W_\pm(H_0,H|T^*,\Delta).$$

Операторы $W_{\pm}(H,H_o|T,\Delta)$ осуществляют унитарную эквивалентность операторов $HPE(\Delta)$ и $H_oE_o(\Delta)$.

Проверим выполнение условий (I–III).

Условие I. Покажем, что оператор $(HT-TH_o)E_o(\Delta)\in\mathfrak{S}_1$. Поскольку $HT-TH_o=V_2+VK$, то

$$((HT-TH_o)E_o(\Delta)f)(\lambda)=\int\varphi_2(\lambda,t)\chi_\Delta(t)f(t)\,dt+$$

$$\int\left(\varphi_2(\lambda,\mu)+\frac{\varphi_1(\lambda,\mu)}{(\lambda-\varkappa(\mu))^\alpha}\right)\int\frac{\varphi_1(\mu,t)\chi_\Delta(t)f(t)}{(\mu-t)(\mu-\varkappa(t))^\alpha}\,dt\,d\mu,$$

где $\chi_\Delta(t)$ – характеристическая функция промежутка Δ. Используя теорему Фубини о перестановке порядков интегрирования, получаем, что ядро оператора $(HT-TH_o)E_o(\Delta)$ имеет вид

$$\varphi_2(\lambda,t)\chi_\Delta(t)+\int\frac{\varphi_2(\lambda,\mu)\varphi_1(\mu,t)\chi_\Delta(t)\,d\mu}{(\mu-t)(\mu-\varkappa(t))^\alpha}+$$

$$+\int\frac{\varphi_1(\lambda,\mu)\varphi_1(\mu,t)\chi_\Delta(t)\,d\mu}{(\lambda-\varkappa(\mu))^\alpha(\mu-t)(\mu-\varkappa(t))^\alpha}; \qquad (5)$$

Обозначим первое, второе и третье слагаемое в формуле (5) соответственно $g_1(\lambda,t)$, $g_2(\lambda,t)$, $g_3(\lambda,t)$. Ядерность соответствующих операторов G_2 и G_3 докажем, представляя каждый из них в виде суперпозиции двух операторов Гильберта–Шмидта, т.е. класса $\mathfrak{S}_2$. В случае G_2 – это будут операторы с ядрами $\varphi_2(\lambda,\mu)$ и $\varphi_1(\lambda,\mu)\chi_\Delta(t)(\mu-t)^{-1}(\mu-\varkappa(t))^{-\alpha}$. Они принадлежат классу $\mathfrak{S}_2$, так как выполнены условия (А) и (В). Оператор G_3 представим в виде суперпозиции двух операторов с ядрами $\varphi_1(\lambda,\mu)(\lambda-\varkappa(\mu))^{-\alpha}$ и $\varphi_1(\lambda,\mu)\chi_\Delta(t)(\mu-t)^{-1}(\mu-\varkappa(t))^{-\alpha}$, которые также принадлежат классу $\mathfrak{S}_2$ в силу условия (В). Осталось доказать принадлежность классу $\mathfrak{S}_1$ оператора с ядром $g_1(\lambda,t)$. Согласно /7/, если выполнены следующие условия: $(Af)(\lambda)=\int_a^b A(\lambda,t)f(t)\,dt$,

$$\int_a^b|A(\lambda,t)|^2d\lambda<\infty,\quad \int_a^b|B(\lambda,s)|^2d\lambda<\infty,\quad a\le\lambda,\ s\le b,$$

где $B(\lambda,s)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\left|B(\lambda,t)-\frac{A(\lambda,s+h)-A(\lambda,s)}{h}\right|^2d\lambda=0,\ s\in[a,b],$$

то $A\in\mathfrak{S}_p$, где $p>2/3$, в частности, $A\in\mathfrak{S}_1$ для $\Delta=[a,b]\subset R$.

В нашем случае $A(\lambda,t)=\varphi_2(\lambda,t)\chi_\Delta(t)$, и так как $\varphi_2(\lambda,t)$ удовлетворяет условию (А), то оператор A с ядром $A(\lambda,t)$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_1$ на Δ. Рассмотрим промежуток $\Delta_\varepsilon=(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$, построим оператор A_ε с ядром $A_\varepsilon(\lambda,t)=\varphi_2(\lambda,t)\chi_{\Delta_\varepsilon}(t)$. Ясно, что он также принадлежит $\mathfrak{S}_1$ на Δ_ε. Следовательно, для любой $f\in L_2(\Delta_\varepsilon)$ существует представление

$$\int_{\Delta_\varepsilon}\varphi_2(\lambda,t)f(t)\,dt=\sum_{n=0}^\infty S_n\left[\int_{\Delta_\varepsilon}\omega_n(t)\overline{f(t)}\,dt\right]\theta_n(\lambda),$$

где ω_n, θ_n ортонормированные в $L_2(\Delta_\varepsilon)$ системы, сингулярные числа S_n удовлетворяют соотношению $\sum_{n=0}^\infty|S_n|<\infty$. Так как из $f\in L_2(R)$ следует, что $f\in L_2(\Delta)$ и $\chi_\Delta f\in L_2(\Delta_\varepsilon)$, то оператор с ядром $g_1(\lambda,t)$ можно преобразовать следующим образом:

$$(G_1f)(\lambda)\equiv\int\varphi_2(\lambda,t)\chi_\Delta(t)f(t)\,dt=\int_{\Delta_\varepsilon}\varphi_2(\lambda,t)\chi_\Delta(t)f(t)\,dt,$$

поскольку $\varphi_2(\lambda,t)=0$ вне ε-окрестности диагонали, т.е. вне Δ_ε. Следовательно, для любого $\lambda\in\Delta_\varepsilon$ получаем

$$(G_1f)(\lambda)=\sum_{n=0}^\infty S_n\left[\int_{\Delta_\varepsilon}\omega_n(t)\overline{\chi_\Delta(t)f(t)}\,dt\right]\theta_n(\lambda)=\sum_{n=0}^\infty S_n\left[\int_\Delta\omega_n(t)\overline{f(t)}\,dt\right]\theta(\lambda)$$

Продолжим $\tilde\omega_n$, $\tilde\theta_n$ на всю ось, положив ω_n равной нулю вне промежутка Δ; а θ_n – вне Δ_ε, тогда для любой функции $f\in L_2(R)$ получим, что

$$(G_1f)(\lambda)=\sum_{n=0}^\infty S_n\left[\int_R\tilde\omega_n(t)\overline{f(t)}\,dt\right]\tilde\theta_n(\lambda)$$

и $\tilde\omega_n,\tilde\theta_n\in L_2(R)$. Отсюда ясно, что оператор G_1 принадлежит классу и тем самым условие (I) полностью проверено.

Выполнение условия (II) сразу следует из того, что $T-I=K$ и $K\in\mathfrak{S}_\infty$ в соответствии с условием (В).

Условие (III) выполнено благодаря тому, что оператор возмущения V вполне непрерывен.

Из построения оператора T сразу видно, что для него выполнено равенство (3) и, следовательно, его можно заменить на единичный в правых частях формул (4) так, как предельные значения останутся теми же. Таким образом, существуют пределы

$$W_\pm(H,H_o|\Delta)=s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itH)\exp(-itH_o)E_o(\Delta),$$

$$W_{\pm}(H_0, H, \Delta) = \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\, \exp(itH_0)\exp(-itH)PE(\Delta) \qquad (6)$$

и имеют место равенства

$$W_{\pm}(H, H_0 | T, \Delta) = W_{\pm}(H, H_0 | \Delta),$$
$$W_{\pm}(H_0, H | T^*, \Delta) = W_{\pm}^*(H, H_0 | \Delta).$$

Построенный нами оператор T не зависит от интервала Δ и все условия (I–Ш) выполняются при замене Δ на Δ_j одновременно для всех j, где Δ_j принадлежит системе ограниченных открытых интервалов $\{\Delta_j\}$, покрывающих вещественную ось с точностью до множества меры нуль. Поэтому /8/ из существования и полноты локальных волновых операторов (6) следует, что существуют и полны волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0)$ и выполнено

$$W_{\pm}(H, H_0 | \Delta) = W_{\pm}(H, H_0).$$

Заключение

Отметим, что для приведенного способа построения оператора T характерна линейность T относительно взаимодействия V или же относительно его главной части. Число задач, в которых действует та же схема, нетрудно умножить, если учесть, что уравнение вида $KH_0 - H_0K = V_1$ при довольно общих предположениях легко решаются относительно K в рамках абстрактной теории операторов (см. /9,10/).

Литература

I. Матвеев В.Б., Скриганов М.М. ДАН СССР, 1972, 202, 755.
2. Матвеев В.Б. Теор. и матем. физика, 1973, 15, № 3, с. 353.
3. Фридрихс К.О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, 1969, "Мир", М.
4. Фадеев Л.Д. Тр. МИАН им. В.А.Стеклова, 1964, 73, с. 292.

5. Буслаев В.С. Вестник ЛГУ, 1970, сер.матем., № 13, с. 155.
6. Белопольский А.Л., Бирман М.Ш. Изв. АН СССР, 1968, сер.матем., 32, с. 1163.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, "Наука", М., 1965, с.154.
8. Бирман М.Ш. Изв. АН СССР, 1968, сер.матем., 32, с. 914.
9. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве, 1971, "Наука", М.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов, 1972, "Мир", М.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 октября 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна,1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды ХП Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Бордаг Л.А., Матвеев В.Б. Р5-86-667

О модели Фридрихса с недиагональной сингулярностью

Рассмотрена модель Фридрихса, т.е. пара операторов H_0 и $H = H_0 + V$, где H_0 и H-свободный и возмущенный операторы Шредингера. Возмущение V-интегральный оператор с ядром, имеющим особенность вне диагонали. Построен подходящий одевающий оператор T и доказано существование и полнота обобщенных волновых операторов

$$W_{\pm}(H, H_0|T) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itH)\, T \exp(-itH_0).$$

Кроме того, показано, что эти операторы совпадают с $W_{\pm}(H,H_0) \equiv W_{\pm}(H, H_0|I)$, и, следовательно, абсолютно непрерывные части операторов H и H_0 унитарно эквивалентны.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Bordag L.A., Matveev V.B. P5-86-667

On the Friedrichs Model with Nondiagonal Singularity

The Friedrichs model, i.e. a pair of operators H_0 and $H = H_0 + V$, where H_0 and H are the free and perturbated Schrödinger operators respectively have been investigated. The perturbation V is an integral operator with nondiagonal singularity. We have constructed an convenient intertwining operator T and proved the existence and completeness of the generalized wave operators

$$W_{\pm}(H, H_0|T) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itH)\, T \exp(-itH_0).$$

It is also shown that these operators coincide with $W_{\pm}(H,H_0) \equiv W_{\pm}(H, H_0|I)$ and therefore the absolutely continuous parts of H and H_0 are unitary equivalent.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986