

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P5-86-653

С.П.Радев, Т.Л.Бояджиев, И.В.Пузынин

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ЖИДКОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ СТРУИ**

1986

ВВЕДЕНИЕ

На конечных стадиях развития осесимметричных возмущений в жидкой капиллярной струе заметное влияние на форму ее поверхности оказывают нелинейные эффекты. Прежде всего они приводят к образованию вторичной капли /сателлита/, размеры которой в общем случае отличаются от размеров основной капли. Расчету условий образования и размеров вторичных капель посвящено множество экспериментальных и теоретических работ. В некоторых работах исследуются также возможности управления процессом распада струи при помощи изменения формы и величины начального /вынуждающего/ воздействия.

Чаще всего задача о нелинейной неустойчивости рассматривается для изолированной струи в невязкой постановке. С точки зрения используемых приближений для уравнений движения можно выделить две основные группы работ. В первой из них уравнения движения для невязкой жидкости записываются в полной двумерной постановке: обычно уравнение Лапласа для потенциала возмущений с нелинейными граничными условиями. Ко второй группе относится хорошо зарекомендовавшее себя одномерное приближение для уравнений движения ^{1,2}, когда зависимостью от радиальной координаты пренебрегают.

Отметим еще второе существенное различие между отдельными решениями, вытекающее из способа их построения. Как правило, для того, чтобы получить решение в аналитическом виде, применяют разложения в ряды со степенями малой амплитуды возмущений ³⁻⁸. По существу это эквивалентно исследованию слабо нелинейного взаимодействия возмущений в струе. В сравнительно небольшом числе работ рассматривается случай конечных амплитуд возмущений - естественно, речь идет о численных методах решения. В ⁹ предложено численное решение одномерных уравнений движения при помощи метода Лакса - Вендроффа. Отмечается, что требование устойчивости схемы накладывает на шаг сетки по времени и пространству довольно жесткие ограничения. В работе ¹⁰ уравнение Лапласа для потенциала скоростей решается методом конечных элементов в области с подвижной границей. В работах ^{11,12} построены численные решения для квазиодномерных уравнений движения, полученных усреднением исходных уравнений в поперечном сечении струи.

Оставаясь в рамках невязкого потенциального течения, можно учесть некоторые дополнительные эффекты, такие, как взаимодействие с окружающей средой через давление, влияние осевой ротации и др. Подобная задача решена в ¹³, где применялись разложения по конечному, достаточно большому числу гармоник.

Математические методы разложения по малому параметру, упомянутые выше, сводятся к разложению решения в ряд по основной и высшим гармоникам возмущения. Представляется интересным построить прямое численное решение нестационарных одномерных уравнений, в которых мы имели бы дело с семейством решений заданной формы, не предполагая при этом малости амплитуды возмущений.

С этой целью в настоящей работе используется численный метод, основанный на аппроксимации формы поверхности, скорости и давления в струе сплайнами. Применяется метод сплайн-коллокации в сочетании с формулами неявного численного дифференцирования по пространственной переменной повышенного порядка точности^{/14/}. Временные производные аппроксимируются схемой с весовым множителем. В результате приходим к семейству разностных схем, порядок аппроксимации каждой из которых зависит от параметра. Для проведения численных расчетов использована неявная симметрическая схема типа Кранка - Никольсона, имеющая на достаточно гладких решениях порядок $O(\tau^2 + h^4)$, что подтверждается численными экспериментами. При помощи метода Ньютона соответствующая нелинейная система сводится к системе линейных уравнений с блочно-трехдиагональной циклической матрицей, которая решается матричной прогонкой.

Для сравнения с результатами других авторов и с экспериментом проведена большая серия расчетов. Показано, что известные разложения /с точностью до третьей гармоники и выше/ качественно хорошо описывают процесс дробления струи. Основные различия обнаруживаются на конечных стадиях развития волн, а также и в том, что вторичная капля присутствует при всех длинах волн. Продемонстрировано хорошее совпадение с экспериментально определенным профилем давления в основной капле и сателлите. Задаваясь начальными возмущениями разной формы и амплитуды /в виде набора нескольких гармоник, δ -образные и др./, мы изучили их развитие во времени. Выявлены два кратных волновых числа, в окрестности которых время распада проходит через локальные минимумы. Больше из двух соответствует волновому числу наиболее быстро растущих линейных волн. Показано, что при помощи изменения длины волны, формы и амплитуды начального возмущения можно в значительной степени управлять устойчивостью струи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Oxz - цилиндрическая система координат с осью Oz вдоль оси осесимметрической жидкой струи радиуса $r = h(z, t)$ и однородного профиля скорости $u(z, t)$. Струя считается изолированной, жидкость - невязкой и несжимаемой. Нас будут интересовать периодические вдоль оси Oz возмущения

$$u(z + \lambda, t) = u(z, t), \quad h(z + \lambda, t) = h(z, t), \quad /1.1/$$

где $\lambda = 2\pi/a$ - длина волны, a - волновое число. Возмущенное течение удобно рассматривать в системе отсчета, жестко связанной с невозмущенным цилиндрическим столбом жидкости:

$$z \rightarrow \alpha z - \omega t, \quad t \rightarrow \alpha \sqrt{\sigma} t. \quad /1.2/$$

В формуле /1.2/ через ω обозначена круговая частота возмущений, а через σ - безразмерный параметр задачи: реципрочное число Вебера $\sigma = T/\rho R_N U_N^2$; T - поверхностное натяжение, ρ - плотность жидкости, R_N и U_N - невозмущенные значения радиуса и скорости. Если ввести новую искомую функцию $u = 1 + \sqrt{\sigma} \bar{u}$, то в переменных вида /1.2/ безразмерные одномерные уравнения движения принимают^{/4/} вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad /1.3/$$

$$\text{где } Q(u, h) = (h^2, u)^T, \quad R(u, h, p) = (h^2(c_* + u), c_*u + \frac{u^2}{2} + p)^T,$$

скорость $c_* = \sqrt{\sigma}(1 - \frac{\omega}{a})$, а знак \sim над u опускаем. Сюда надо добавить уравнение для давления

$$p = \frac{1}{h} - a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \quad /1.4/$$

записанное с точностью до несущественной аддитивной постоянной /внешнее давление/. Без ограничения общности положим $c_* = 0$, т.е. $\omega = a$.

Для системы уравнений /1.3/, /1.4/ ставится смешанная граничная задача с периодическими краевыми условиями вида /1.1/. В качестве начального возмущения естественно записать решение соответствующей линеаризованной задачи

$$h(z, t) = 1 + h_0 \cos z e^{qt}, \quad u(z, t) = -2q u_0 \sin z e^{qt}, \quad /1.5/$$

в котором следует положить $t = 0$ и $q = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - a^2)}$. Напомним, что величина q в /1.5/ имеет смысл коэффициента нарастания малых возмущений. При таком выборе начальных условий прослеживается развитие во времени основной неустойчивой моды.

Можно рассмотреть случай, когда еще на начальном этапе вместе с основной модой возбуждаются ее высшие гармоники. Тогда условия /1.5/ нужно заменить на

$$h(z, t) = \sum_{n=1}^N h_{on} \cos n z e^{q_n t}, \quad u(z, t) = \sum_{n=1}^N u_{on} \sin n z e^{q_n t}, \quad /1.6/$$

где $u_{on} = -2q_n h_{on} / n$, $q_n = n \sqrt{\frac{1}{2}(1 - a^2 n^2)}$. Для достаточно малых волновых чисел в диапазон неустойчивости $0 < a_n < 0$ попадает конечное число гармоник. Ввиду нелинейности одномерных уравнений движения /1.3/, /1.4/ члены сумм /1.6/ не являются

независимыми, и форма поверхности будет определяться взаимодействием между гармониками. В настоящей работе $N \leq 4$.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

При построении разностных схем для уравнений дивергентного вида, к которым относится и система /1.3/, принципиальным является выбор способа дискретизации градиента. Обычно используемые для этой цели формулы явного численного дифференцирования первого или второго порядка точности обладают значительными внутренними /схемными/ дисперсией и диссипацией. При определенных условиях это может привести /15/ к существенному искажению разностного решения. Гораздо эффективнее в ряде случаев, например, для задач с большими градиентами искомым функций, являются методы неявного численного дифференцирования, использующие в том или ином виде сплайны /см., например, /14, 16-18/ /. К преимуществам последних следует отнести такие, как простое получение высокого порядка точности и "автоматическое" восполнение найденного разностного решения до континуального представления.

Пусть $f(z)$ - периодическая на интервале $[0, 2\pi]$ функция, $y \equiv \{y_i\}$, $y_i = f(z_i)$ - сеточная функция на равномерной сетке $\omega = \{z_i, i=0, \pm 1, \dots\}$ с шагом Δz . Далее всегда будем считать, что рассматриваемые функции обладают гладкостью, обеспечивающей корректность проводимых выкладок. В работе /14/ /см. также /10// предложены формулы неявного численного дифференцирования повышенной точности, которые могут быть записаны в виде

$$f'(x_i) \approx y'_i = \alpha_1 D^{(1)} y_i + \beta_1 m_i, \quad /2.1/$$

$$f''(x_i) \approx y''_i = \alpha_2 D^{(2)} y_i + \beta_2 D^{(1)} m_i; \quad /2.2/$$

где величины m_i удовлетворяют системе уравнений с циклической трехдиагональной матрицей

$$T(b) m_i \equiv m_{i-1} + b m_i + m_{i+1} = (2+b) D^{(1)} y_i, \quad /2.3/$$

$$a D^{(1)} y_i \equiv (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2\Delta z \quad \text{и} \quad D^{(2)} y_i \equiv (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / \Delta z^2.$$

Подбором параметров α_ν, β_ν , $\nu = 1, 2$ и b можно "регулировать" точность. Случай $\alpha_\nu = 1$ и $\beta_\nu = 0$ соответствует центральным разностным производным первого и второго порядков с точностью $O(\Delta z^2)$. При $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$ и $b = 4$ получаем формулу

$$T(b) y'_i = 6D^{(1)} y_i, \quad /2.4/$$

определяющие моменты $m_i = y'_i$ кубического интерполяционного сплайна; ввиду равномерности сетки имеет место оценка $\max |f'(z_i) - y'_i| = O(\Delta z^4)$. Общий случай рассмотрен в /14/.

Для приложений иногда удобнее формулы дифференцирования, содержащие только значения сеточной функции. Подействуем на обе

стороны соотношений /2.1/ оператором $T(b)$. Учитывая коммутативность $D^{(1)}$ и $T(b)$ /что легко проверить непосредственно/, получим

$$T(b) y'_i = B y'_i \equiv D^{(1)} [\alpha_1 T(b) + \beta_1 (2+b) E] y_i, \quad /2.5/$$

где E - единичный оператор. При $\alpha_1 \neq 0$ оператор $B^{(1)}$ определен на пятиточечном шаблоне. Методом разложения в ряд Тейлора можно получить оценку $\max |f'(z_i) - y'_i| = O(\Delta z^6)$, если $b = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{6}$, $\beta_1 = \frac{5}{3}$.

Рассмотрим сначала одно уравнение дивергентного вида

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad /2.6/$$

где $Q(u)$ и $R(u)$ - заданные функции переменной u . Предположим, что задача, соответствующая /2.6/ с начальным условием $u(z, 0) = u^0(z)$ и периодическими граничными условиями, имеет решение $u(z, t)$. Вдоль этого решения величины Q и R являются сложными функциями независимых переменных z, t .

Построим кубический периодический сплайн класса C^2 , интерполирующий суперпозицию $R(u(z, t))$ в узлах сетки ω . Моменты $m_i = (\partial R / \partial z)_i$ сплайна должны удовлетворять условиям /2.3/ при $b = 4$, а также уравнению /2.6/ на прямых $z = z_i$. Отсюда с учетом соотношений /2.5/ вытекает ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$)

$$T(4) \frac{dQ_i}{dt} + 6D R_i = 0. \quad /2.7/$$

Систему /2.7/ квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следует решать с начальными условиями $y_i(0) = u^0(z_i)$.

Для перехода к конечно-разностной схеме аппроксимируем производную по времени схемой с весовым множителем $\sigma \in [0, 1]$ /19/. В результате приходим к семейству схем

$$T(4) \frac{Q_i - \check{Q}_i}{\Delta t} + 6D [(1-\sigma) R_i + \sigma \check{R}_i] = 0, \quad /2.8/$$

где Δt - шаг по времени, а $f_i \equiv f(z_i, t_k)$, $\check{f}_i \equiv f(z_i, t_{k-1})$.

При $\sigma = 1/2$ /схема типа Кранка - Никольсона/ точность аппроксимации по времени имеет порядок $O(\Delta t^2)$. Полагая $v_0 = 2\Delta z / 3\Delta t$, окончательно имеем

$$F_i \equiv v_0 (Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1}) + R_{i+1} - R_{i-1} - v_0 (\check{Q}_{i-1} + 4\check{Q}_i + \check{Q}_{i+1}) + \check{R}_{i+1} - \check{R}_{i-1}. \quad /2.9/$$

Соотношения /2.8/ представляют собой систему нелинейных уравнений, связывающих значения сеточной функции $y_i = u(z_i, t_k)$ и $\check{y}_i = u(z_i, t_{k-1})$ на шеститочечном прямоугольном шаблоне. Для ее решения целесообразно использовать метод Ньютона. На каждой итерации в приходим к трехточечной циклической разностной задаче

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad /2.10/$$

коэффициенты которой вычисляются следующим образом:

$$a_i = \left(v_0 \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial u} \right)_{i-1}^{(s-1)}, \quad b_i = 4v_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial u} \right)_i^{(s-1)}, \quad /2.11/$$

$$c_i = \left(v_0 \frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial u} \right)_{i+1}^{(s-1)}, \quad d_i = a_i y_{i-1}^{(s-1)} + b_i y_i^{(s-1)} + c_i y_{i+1}^{(s-1)} - F_i^{(s-1)},$$

$s = 1, 2, \dots$

При численной реализации на каждом временном слое в качестве исходного приближения для величин $y_i^{(s)}$ в итерационном процессе можно брать их значения \check{y}_i с предыдущего слоя.

Метод легко обобщается на системы дивергентного вида /2.6/, когда $u(z, t)$, а также $Q(u)$ и $R(u)$ суть M -мерные векторы. Размерность нелинейной системы /2.9/ в этом случае равна $N \times M$. Коэффициенты a_i, b_i и c_i линейной системы /2.10/ представляют собой матрицы порядка $M \times M$, а правые части d_i - M -мерные векторы. При этом производные в правых частях /2.11/ заменяются соответствующими градиентами.

Для обращения блочно-трехдиагональной задачи /2.10/ удобно использовать метод циклической матричной прогонки. Решение ищется в виде

$$y_i = \lambda_i + \mu_i y_N, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad /2.12/$$

где векторы λ_i удовлетворяют уравнениям

$$b_1 \lambda_1 + c_1 \lambda_2 = d_1$$

$$a_i \lambda_{i-1} + b_i \lambda_i + c_i \lambda_{i+1} = d_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \quad /2.13/$$

$$a_{N-1} \lambda_{N-2} + b_{N-1} \lambda_{N-1} = d_{N-1},$$

а матрицы μ_i - уравнениям

$$b_1 \mu_1 + c_1 \mu_2 = -a_1,$$

$$a_i \mu_{i-1} + b_i \mu_i + c_i \mu_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \quad /2.14/$$

$$a_{N-1} \mu_{N-2} + b_{N-1} \mu_{N-1} = -c_1,$$

к которым применима обычная матричная прогонка /19/. Известные y_N вычисляются из соотношения

$$(b_N + a_N \lambda_{N-1} + c_N \mu_1) y_N = d_N - a_N \mu_{N-1} - c_N \mu_1. \quad /2.15/$$

Метод устойчив и корректен /в обычном смысле /19//, если все матрицы b_i невырождены и $\|b_i^{-1} a_i\| + \|b_i^{-1} c_i\| \leq 1$, причем хотя бы для одного $1 \leq i \leq N$ выполнено строгое неравенство.

Рассмотрим применение указанного алгоритма для решения задачи /1.3/, /1.4/. Разностная аппроксимация первых двух /гидродинамических/ уравнений /1.3/ производится по схеме /2.9/. При ап-

проксимации уравнения /1.4/ для давления, с целью сохранения общей точности $O(\Delta z^4)$ схемы, следует использовать формулу /2.2/ неявного дифференцирования: при $\alpha_2 = -2$ и $\beta_2 = 1$. Удобно ввести в качестве новых переменных моменты $m_i = (\partial h / \partial z)_i$ сплайна, приближающего профиль $h(z, t)$ струи; тем самым для профиля струи имеем кусочно-полиномиальное аналитическое решение во всей рассматриваемой области (z, t) . В конечном итоге приходим к следующей нелинейной системе $(y_i \equiv (u_i, h_i, m_i, p_i)^T)$:

$$F_{1i} \equiv v_0 [u_{i-1} - \check{u}_{i-1} + 4(u_i - \check{u}_i) + u_{i+1} - \check{u}_{i+1}] + p_{i+1} - \check{p}_{i+1} - p_{i-1} - \check{p}_{i-1} + \frac{1}{2}(w_{i+1} + \check{w}_{i+1} - (w_{i-1} + \check{w}_{i-1})) = 0, \quad /2.16/$$

$$F_{2i} \equiv v_0 [f_{i-1} - \check{f}_{i-1} + 4(f_i - \check{f}_i) + f_{i+1} - \check{f}_{i+1}] + f_{i+1} u_{i+1} + \check{f}_{i+1} \check{u}_{i+1} - (\check{f}_{i-1} u_{i-1} + f_{i-1} \check{u}_{i-1}) = 0, \quad /2.17/$$

$$F_{3i} \equiv m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} - \frac{3}{\Delta z}(h_{i+1} - h_{i-1}) = 0, \quad /2.18/$$

$$F_{4i} \equiv 2\left(\frac{\alpha}{\Delta z}\right)^2 (h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}) - \frac{\alpha^2}{2\Delta z}(m_{i+1} - m_{i-1}) + p_i - \frac{1}{h_i} = 0, \quad /2.19/$$

где положено $w_i \equiv (u_i)^2$, $f_i \equiv (h_i)^2$. Выпишем также элементы матриц a_i, b_i, c_i системы /2.10/:

$$a_{111} = v_0 - u_{i-1}, \quad a_{114} = -1, \quad a_{121} = -f_{i-1}, \quad a_{122} = -2h_{i-1}(u_{i-1} - v_0),$$

$$a_{131} = -\frac{3}{\Delta z}, \quad a_{142} = -2\alpha^2, \quad a_{143} = -\frac{\alpha^2 \Delta z}{2},$$

$$b_{111} = 4v_0, \quad b_{122} = 8v_0 h_i; \quad b_{133} = -4, \quad b_{42i} = 4\alpha^2 - \left(\frac{h_i}{\Delta z}\right)^2, \quad b_{144} = -\Delta z^2,$$

$$c_{111} = v_0 + u_{i+1}, \quad c_{114} = 1, \quad c_{121} = f_{i+1}, \quad c_{122} = 2h_{i+1}(v_0 + u_{i+1}),$$

$$c_{132} = 3/\Delta z, \quad c_{133} = -1, \quad c_{142} = -2\alpha^2, \quad c_{143} = \frac{\alpha^2 \Delta z}{2}$$

/остальные элементы равны нулю/. Видно, что до точки разрыва струи, в которой $h(z, t_0) = 0$, все матрицы b_i невырождены и, кроме того, являются нижними треугольными. Это существенно облегчает процесс решения системы /2.10/.

Для численной проверки порядка аппроксимации предлагаемой схемы использовался метод Рунге /19/. Решение для случая $\alpha = 0,43$, соответствующее однодвовому начальному условию с амплитудой $h_0 = 0,01$, вычислялось на трех сетках по пространственной переменной с 32,64 и 128 узлами при фиксированном значении $\Delta \tau = 0,04$ шага по времени. Порядок аппроксимации определялся соотношением

$$\gamma = 2^n = |(h_{\Delta z} - h_{\Delta z/2}) / (h_{\Delta z/2} - h_{\Delta z/4})|, \quad /2.20/$$

где $h_{\Delta z}, h_{\Delta z/2}, h_{\Delta z/4}$ - значения функции h на сетках с шагом $\Delta z, \Delta z/2$ и $\Delta z/4$. В таблице показаны величины γ и вычисленные по ним значения показателей n в момент $t = 6,0$ /критическое время для данной струи $t_b \cong 6,98/$. Видно, что показатели n близки к теоретическому значению $n = 4$. При приближении к критическому значению t_b в небольшой его окрестности аппроксимация ухудшается, что, по-видимому, связано с уменьшением гладкости решений при $t \rightarrow t_b$. В настоящей работе все результаты получены на сетке из 64 точек.

Таблица

z	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
γ	16,0527	16,3591	16,1239	16,1087	16,005
n	4,0047	4,032	4,0111	4,0098	4,0004

3. ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Разработанный метод позволяет исследовать развитие нелинейных возмущений в капиллярной струе при произвольных периодических начальных возмущениях, имеющих необходимый порядок гладкости. Сюда, в частности, относятся начальные условия типа /1.5/ и /1.6/, к которым применим также метод разложения по малой амплитуде основной гармоники /1,3/. На рис.1 иллюстрируются типичные стадии, через которые проходит форма поверхности струи. Кривой 1 практически завершается линейная стадия развития малых возмущений, при которой форма поверхности подобна начальной /косинусоидальна/, но с возросшей амплитудой. Кривая 2 изображает типичное начальное проявление нелинейности, заключающееся в выполаживании области минимума. На следующих стадиях /кривые 3-6/ на поверхности формируется сателлитная капля. При приближении к моменту разрыва струи контур сателлитной капли практически не меняется за исключением небольшой окрестности точки распада. И основная, и вторичная капли симметричны относительно сечений струи, проведенных в точках максимального поднятия их поверхностей. Поэтому на рис.1 и на следующих рисунках изображается только половина возмущений.

Расчеты при разных длинах волн показали, что вторичная капля присутствует всегда, но в диапазоне коротких волн она выражена очень слабо - ее длина и высота малы по сравнению с соответствующими

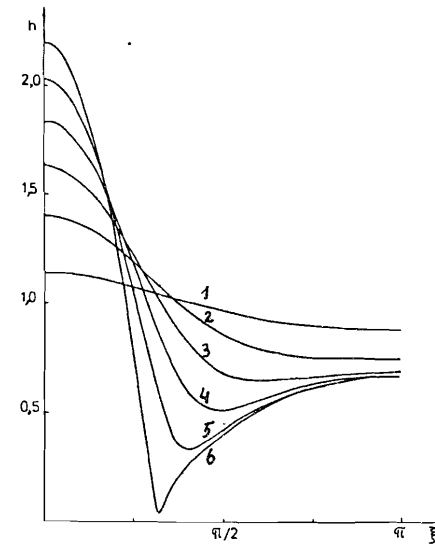


Рис.1. Нелинейное развитие возмущений в однослойной струе: $\alpha = 0,43, h_0 = 0,01$; 1- $t = 4,025$, 2- $t = 5,525$, 3- $t = 6,15$, 4- $t = 6,525$, 5- $t = 6,775$, 6- $t = 6,93$.

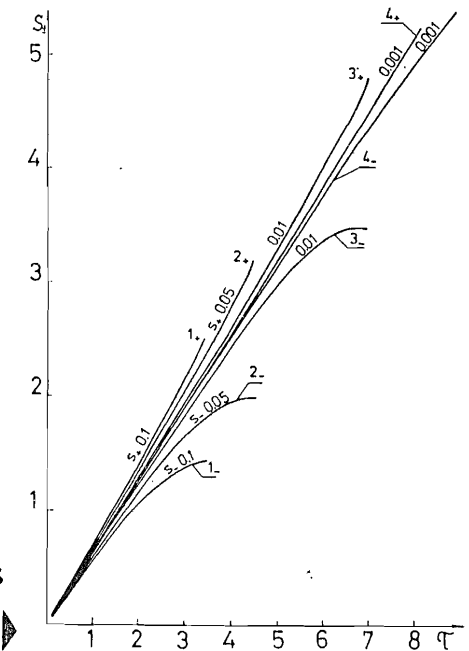


Рис.2. Коэффициенты нарастания впадины и горба струи: $\alpha = 0,43$; $1_+, 1_- t = 0,1$, $2_+, 2_- t = 0,05$, $3_+, 3_- t = 0,01$, $4_+, 4_- t = 0,001$.

щими размерами основной капли. Отсюда видно, почему сателлитные капли нельзя обнаружить при использовании метода разложения по малому параметру до третьей гармоники включительно - его точность в коротковолновом диапазоне недостаточна. Положение несколько улучшается при расчетах с привлечением большего числа гармоник, как отмечено в работе /13/.

В ряде экспериментальных работ в качестве критерия обнаружения нелинейности используются амплитуды нарастания горба и впадины волны /20/:

$$s_+ = \ln \left| \frac{\max h - 1}{h} \right|, \quad s_- = \ln \left| \frac{1 - \min h}{h} \right|.$$

На рис.2 величины s_+ и s_- изображены при разных начальных амплитудах как функции времени. При малых значениях времени, когда применима линейная теория возмущений, s_+ и s_- - совпадающие линейные функции с угловым коэффициентом, равным коэффициенту на-

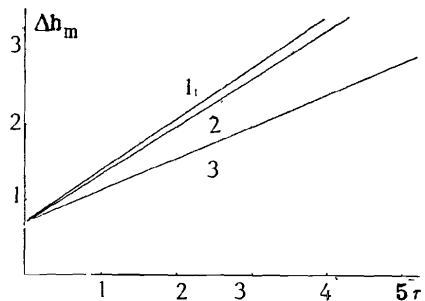
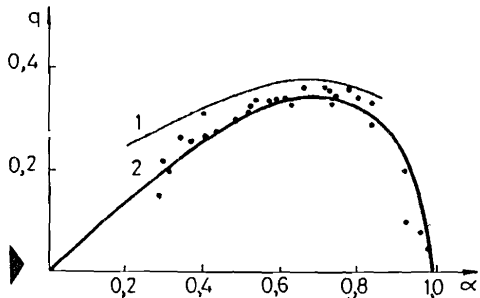


Рис.3. Коэффициент нарастания максимального перепада радиуса однослойной струи: 1 - $\alpha = 0,25$, 2 - $\alpha = 0,43$, 3 - $\alpha = 0,8$.

Рис.4. Дисперсионная кривая - численный расчет по нарастанию горба волны: $h_0 = 0,01$; 1 - на линейной стадии развития возмущений; 2 - на нелинейной стадии вблизи момента распада.



растания q , подсчитанному по линейной теории (см. /1.5/). Чем больше начальная амплитуда, тем раньше s_+ и s_- уходят с прямой qt и загибаются в противоположные стороны. Ход кривых на рис.2 полностью соответствует рис.6 из работы /20/, где показаны экспериментально измеренные величины s_+ и s_- . Имеется, однако, различие в кривых s_+ , которое позволяет сделать вывод о том, что в осуществленном эксперименте наряду с возрастающей основной гармоникой на начальной стадии присутствовала и затухающая гармоника. Этим на рис.6 /20/ объясняется медленное нарастание ($\sim t^2$) кривой s_+ . Отметим, что, несмотря на различное поведение s_+ и s_- на нелинейной стадии, величина /максимальный перепад радиуса струи/

$$\Delta h_m = \ln \left| \frac{\max h - \min h}{h_0} \right|$$

меняется по линейному закону qt . Это подтверждается рис.3 для разных волновых чисел.

В работе /8/ приведены результаты по прямому определению из эксперимента дисперсионной кривой капиллярной струи. Эту же кривую можно найти и численно и провести сравнение. На рис.4 точками показаны экспериментальные результаты, кривая 1 - коэффициент нарастания, полученный на участке, где справедлива линейная теория, кривая 2 - коэффициент усиления, снятый с кривой типа 2_+ /см.рис.2/ при $t = 90\% t_b$, где t_b - время распада струи при соответствующей длине волны. Хорошо видно, что практически все экспериментальные точки лежат в области между обеими кривыми.

При помощи рис.1 из той же работы /8/ на рис.5 проведено сравнение между непосредственно измеренным и рассчитанным численно

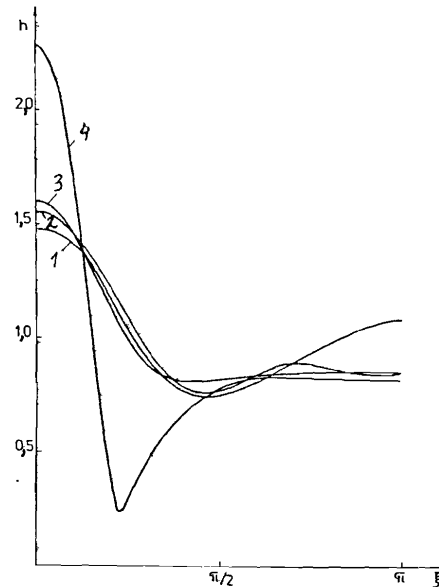
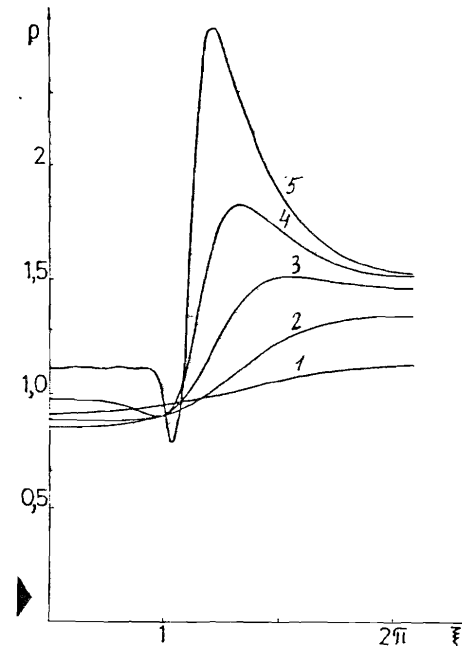
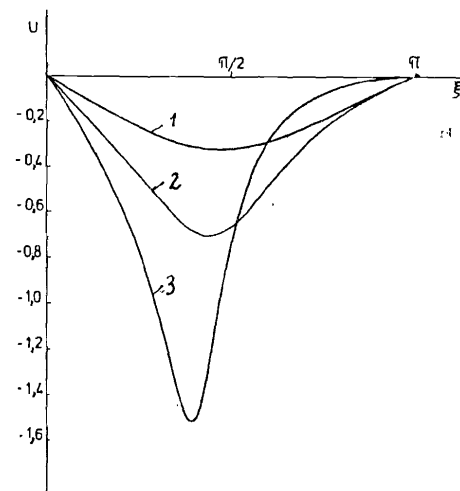


Рис.5. Численный и экспериментальные профили волны: $\alpha = 0,25$, $h_0 = 0,00018$; 1 - эксперимент, 2 - теория.

Рис.6. Распределение давления в струе на полуволне: параметры и кривые 1÷5, как на рис.1.



профилем поверхности струи: отметим хорошее качественное совпадение между экспериментом и теорией. На участке вдали от точек локальных максимумов поверхности имеется очень хорошее и количественное соответствие.



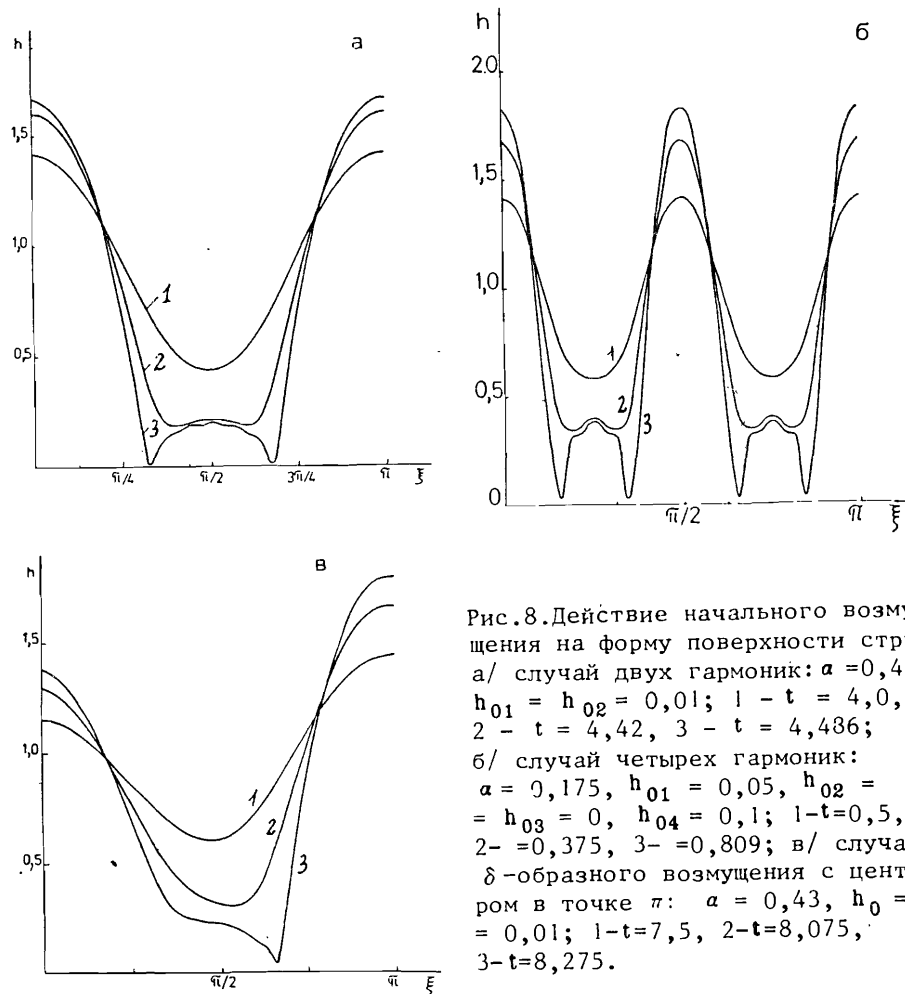
Чтобы полнее представить картину волнового движения струи, рис.1 дополнен рис.6 и 7, на которых показаны величины давления и продольной скорости для выбранных моментов времени. Давление в основной капле остается постоянным вплоть до момента распада. Однако давление в сателлите подвержено

Рис.7. Распределение аксиальной скорости: параметры, как на рис.1; 1 - $t = 0,5$, 2 - $t = 6,0$, 3 - $t = 6,64$.

существенным изменениям и вблизи точки распада его градиент резко возрастает. В^{20/} качественно идентичным образом представлено изменение давления, рассчитанное по экспериментально определенной форме поверхности.

Совместно рис.6 и 7 дают возможность описать сам процесс распада струи. Имея в виду, что профиль скорости на одной длине волны симметричен относительно точки $(\pi, 0)$, приходим к выводу о том, что в точках отрыва сателлита от основных капель возмущенная скорость направлена в сторону последних. Таким образом, в точках отрыва поверхность основной капли подвержена сужению, а поверхность сателлита - растяжению.

Интересно проследить действие формы начального возмущения на форму возмущенной поверхности и время распада. В этом случае при



численных экспериментах нужно пользоваться условиями /1.6/. На рис.8а показано развитие формы поверхности, когда в струе в начальный момент возбуждаются сразу две гармоники с волновыми числами, лежащими в диапазоне неустойчивости. Как видно, на одной длине волны уже размещаются две основные капли, а между ними - по сателлиту. Меняя соотношения между амплитудами, можно добиться сокращения или удлинения времени распада, но форма поверхности остается подобной. Она контролируется второй гармоникой /кратной/ и сохраняется вплоть до предельного случая $h_{01} = 0$. Чтобы перейти к случаю одной гармоники, нужно положить $h_{02} = 0$ /это тривиальный случай!/ или выбрать такое α , чтобы волновое число второй гармоники оказалось вне интервала неустойчивости.

Подобным образом можно прокомментировать и рис.8б, где начальное возмущение - из семейства волн, обладающего четырьмя гармониками, хотя в начальный момент возбуждаются первая и четвертая. В рассматриваемой ситуации на одной длине волны формируются четыре основные капли, разграниченные между собой сателлитами. Отметим полное качественное совпадение рис.8б с рис.1 из /13/.

Начальное возмущение на рис.8в не принадлежит классу волновых движений струи, представимых конечным числом гармоник. В сечении $z = \pi$ на невозмущенной поверхности задается δ -образный выступ высотой h_0 и прослеживается его дальнейшее развитие. Тот факт, что горб волны расположен в сечении $z = \pi$, является естественным следствием формы начального возмущения, максимум которой задается в этом же сечении. Внешне возмущения распространяются так же, как в случае двух гармоник, но теперь форма второй основной капли промодулирована. В диапазоне коротких волн возмущения имеют форму, подобную форме в случае одной гармоники.

Нелинейные волны с δ -подобной начальной формой обнаруживают интересное расслоение в неустойчивом диапазоне. Если вычислить время распада t_b струи как функцию волнового числа, то, как показывает рис.9, кривая $t_b - \alpha$ имеет два локальных минимума - первый /меньший/ находится в окрестности волнового числа $\alpha_{opt} = \sqrt{2}/2$, соответствующего наиболее быстро растущим линейным волнам. Вто-

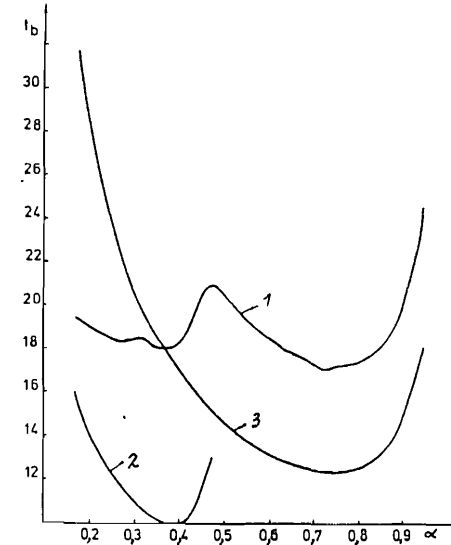


Рис.9. Время распада капиллярной струи: δ -образное начальное возмущение - $h_0 = 0,01$ /кривая 1/; гармонические возмущения - $h_{01} = h_{02} = 0,01$, $N = 2$ /кривая 2/; $h_0 = 0,01$, $N = 1$ /кривая 3/.

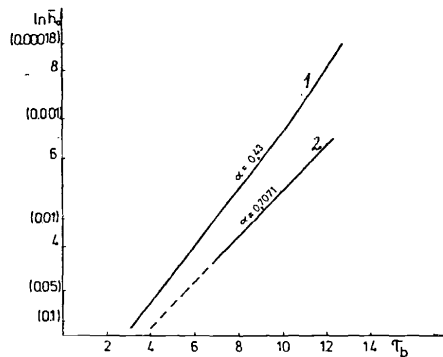


Рис.10. Нормированное время распада струи: $h_0 = 0,01$, $\alpha = 0,43$.

рой расположен вблизи кратного волнового числа $\alpha_{opt}/2$. Подобную форму имеет кривая 2, рассчитанная для начальных возмущений, составленных из двух кратных гармоник /на рисунке показан участок кривой вблизи кратного оптимального волнового числа/.

Большие времена распада, соответствующие δ -образным возмущениям, обусловлены меньшей энергией возбуждения, вносимой в начальный момент, по сравнению с гармоническими возмущениями той же максимальной амплитуды. Для начальных возмущений, содержащих только одну гармонику, второй локальный максимум на кривой 3 не наблюдается.

Для полноты на рис.10 показана зависимость нормированного времени распада $\tau_b = t_b/\lambda$ от логарифма начальной амплитуды при фиксированной длине волны $\lambda = 2\pi/\alpha$. Так же, как и в случае малых возмущений /линейные волны/, эта зависимость линейная; отклонение от линейного закона имеет место при очень малых начальных амплитудах. Этим подтверждается успех линейной теории устойчивости Рэлея при расчете длины нераспавшегося участка струи и размеров основных капель.

Из проведенного анализа можно прийти к обобщающему выводу о том, что при помощи изменения длины волны, формы и амплитуды начального иницирующего возмущения можно в значительной степени управлять распадом однослойной капиллярной струи, с точки зрения размера основных и вторичных капель, времени распада, а следовательно, и длины нераспавшегося участка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я., Маркова М.П. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, 3, с.30.
2. Lee H.C., IBM J.Res.Develop., 1974, 18, No.4, p.363.
3. Yuen M.C., J.Fluid Mech., 1968, 33, No.1, p.151.
4. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Научн.тр. Ин-та мех.МГУ. Изд-во МГУ, М., 1973, № 25.
5. Nayfer A.N. Phys.Fluids, 1970, 13, No.4, p.841.
6. Lafrance P. Phys.Fluids, 1975, 18, No.4, p.423.
7. Vogt D.B. Annu.Rev.Fluid Mech., v.11, Palo, Alto, Calif., 1979, p.207.
8. Pimbley W.T., Lee H.C. IBM J.Res.Develop., 1977, 21, No.1, p.21.

9. Chaudhary K.C., Redekopp L.G. J.Fluid Mech., 1980, 96, No.2, p.257.
10. Радев С.П., Русинов В.М. В сб.: Труды V Нац.конгр.теор. и прикл. мех-ки, Варна, 1985.
11. Ентов В.М., Ярин А.Л. Препринт ИПМ АН СССР, № 127, 1979.
12. Vogt D.B., Shine S.J., Talke F.E., J.Comput.Phys., 1980, 38, No.3, p.294.
13. Филянд Л.В. Изв.АН СССР, МЖГ, 1981, № 3, з.124.
14. Русаков С.В. В сб.: Числ.методы в аэродинамике, М., Изд-во МГУ, 1980.
15. Мухин С.И., Попов Ю.П., Попов С.Б. В сб.: Актуальные проблемы матем.физики и вычисл.математики, "Наука", М., 1984.
16. Пасконов В.М., Русаков С.В. В сб.: Вычислительные методы и программирование, Изд-во МГУ, № 38, 1983.
17. Толстых А.И. ЖВМиМФ, 1985, т.25, № 8, с.1164.
18. Завьялов Ю.С., Мирошниченко В.Л. В сб.: Актуальные пробл. вычисл. и прикл.матем., "Наука", Новосибирск, 1983, с.82.
19. Самарский А.А. Теория разностных схем. "Наука", М., 1983.
20. Goedde E.F., Yuen M.C. J.Fluid Mech., 1970, 40, p.495.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 октября 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1 2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Радев С.П., Бояджиев Т.Л., Пузынин И.В.
Численное исследование неустойчивости жидкой капиллярной струи

P5-86-653

В так называемом гидравлическом приближении одномерная струя невязкой жидкости описывается двумя нелинейными уравнениями для поля скоростей и радиуса струи. Для указанной системы формулируется смешанная задача с периодическими граничными условиями. Проведено численное исследование влияния нелинейностей на решения соответствующей линеаризованной задачи. Для этой цели используется консервативная сплайн-разностная схема четвертого порядка точности по пространственной переменной и второго порядка - по временной.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Radev S.P., Boyadjiev T.L., Puzynin I.V.
Numerical Investigation of Capillary Liquid Jet
Instability

P5-86-653

In hydraulical approach one-dimensional jet of inviscid liquid is described by a system of two nonlinear equations for velocity and radius of the jet. For this system we formulate a problem with periodical boundary conditions. We perform a numerical study of how the nonlinearity effects the solutions of the corresponding linearized problem. For this we use conservative spline-difference scheme of the fourth order with respect to the space variable and of the second order with respect to the time variable.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986