сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-86-634

Е.П.Жидков, Е.Х.Христов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ОДНОМУ СПЕКТРУ ДЛЯ НУЛЕВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

1986

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе показано, как результаты статьи [1] могут быть перенесены на случай двух самосопряженных задач Штурма-Лиувилля, определяемых уравнениями

$$\ell_j y \equiv -y'' + r_j(x) y = \lambda y, \quad 0 \le x \le \pi, \quad j = 1, 2 \qquad /1.1/$$

и граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \qquad /1.2/$$

где потенциалы

$$r_j(x) \in L_2^{(s)} = \{f \in L_2(0, \pi) \mid f(x) = f(\pi - x)\}. \qquad /1.3/$$

В этом параграфе сформулированы основные утверждения, доказательства которых, как правило, опускаем, ввиду того, что они аналогичны подробно изложенным в [1]. В § 3 предложен метод, который позволяет путем простой алгебраической выкладки, исходя из формулы разложения, приведенной в теореме 1.4 [1], получить ее аналог для случая краевых задач /1.1/-/1.3/, и обратно, начиная с формулируемой далее теоремы 1.3, вывести теорему 1.4. Существенную роль в этом подходе играет теорема 6 [2], которая сформулирована в удобной для наших целей форме в теореме 1.5. Отметим, что сходные построения применялись в [3] для уравнения Шредингера на полуоси. Доказанная в § 2 теорема 2.1 о дифференцируемости введенного в [2] преобразования $\mathfrak{F}$ /см. § 2; формула /2.8//, наряду с тем, что используется в § 3, имеет и самостоятельный интерес.

Обозначим через $g_j(x, \lambda)$ и $h_j(x, \lambda) = -g_j(\pi - x, \lambda)$ решения уравнения /1.1/, для которых

$$g_j(0, \lambda) = h_j(\pi, \lambda) = 0, \quad g_j'(0, \lambda) = h_j'(\pi, \lambda) = 1. \qquad /1.4/$$

Пусть $\chi_j(\lambda) = g_j(\pi, \lambda) = -h_j(0, \lambda) \equiv W(g_j, h_j)$, где $W(f, g) = fg' - f'g$, - характеристические функции краевых задач /1.1/, /1.2/, определяющие их спектры

$$\sigma_j = \{\mu_n^{(j)} = \mu_{2n+j} \mid \chi_j(\mu_{2n+j}) = 0\}_{n=1}^{\infty}, \quad j = 1, 2. \qquad /1.5/$$

Из /1.3/ следует, /см. например, [4] /, что собственные функции

$$g_j(x, \mu_{2n+j}) = (-1)^n h_j(x, \mu_{2n+j}), \quad g_j'(\pi, \mu_{2n+j}) = (-1)^n. \qquad /1.6/$$

и их нормы

$$\gamma_{2n+1} = \Big(\int_0^\pi g_j^2(x, \mu_{2n+j})\,dx\Big)^{-1} = (-1)^n \dot{\chi}_j^{-1}(\mu_{2n+j}), \qquad /1.7/$$

где $\cdot$ обозначаем дифференцирование по λ.
Введем функции

$$G(x,\lambda) = g_1(x,\lambda)\,g_2(x,\lambda),\quad H(x,\lambda) = h_1(x,\lambda)\,h_2(x,\lambda),\quad X(\lambda) = \chi_1(x)\chi_2(\lambda).$$

Отметим, что

$$G(x,\lambda) = H(\pi - x, \lambda), \quad G'(x,\lambda) = -H'(\pi - x, \lambda). \qquad /1.8/$$

Построим множества $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma' = \sigma \setminus \sigma''$. Для определенности будем предполагать, что при некотором $N < \infty$ $\mu_{2n+1} \neq \mu_{2n+2}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, а $\mu_{2n+1} = \mu_{2n+2} = \mu_{(n)}$, $n > N$. Из /1.6/ следуют равенства

$$G(x, \mu_{(n)}) = H(x, \mu_{(n)}), \quad \mu_{(n)} \in \sigma''. \qquad /1.9/$$

Далее, обозначив

$$L(x,\lambda) = H(x,\lambda) - G(x,\lambda), \quad T(x,\lambda) = H(x,\lambda) + G(x,\lambda), \qquad /1.10/$$

введем функции

$$L_{2n+j}(x) = L(x, \mu_{2n+j}), \quad M_{2n+j}(x) = L'_{2n+j}(x), \quad \mu_{2n+j} \in \sigma', \qquad /1.11/$$

$$L_{(n)}(x) = \dot{L}(x, \mu_{(n)}), \quad M_{(n)}(x) = L'_{(n)}(x), \quad \mu_{(n)} \in \sigma'' \qquad /1.12/$$

и

$$S_{2n+j}(x) = (2\dot{X}(\mu_{2n+j}))^{-1} T(x, \mu_{2n+j}), \quad S_{(n)}(x) = \ddot{X}^{-1}(\mu_{(n)})\,T(x, \mu_{(n)}). \qquad /1.13/$$

С помощью тождества

$$W(y_1 y_2, z_1 z_2) = (\lambda - \mu)^{-1} \frac{d}{dx} \prod_{j=1,2} W(y_j, z_j), \qquad /1.14/$$

где y_j и z_j – решения уравнения /1.1/ при λ и μ соответственно, легко устанавливается

Лемма 1.1. Справедливы следующие соотношения:

$$2(S_{2n+1}, M_{2m+1}) = \delta_{n,m}, \quad (S_{(n)}, M_{(m)}) = \delta_{n,m}$$

$$(S_{2n+1}, M_{(m)}) = \gamma_{2n+1}\big(2(\mu_{2n+1} - \mu_{(m)})\gamma_{2m+1}\big)^{-1},$$

где $(f, g) = \int_0^\pi f(x) g(x)\,dx$, $\delta_{n,m} = 0$ при $n \neq m$, $\delta_{n,n} = 1$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.1. Пусть по краевым задачам /1.1/, /1.2/ построены функции /1.11/-/1.13/ и по ним системы

$$M = \{M_{2n+1}(x),\ (n = 1, 2, \ldots, N),\ M_{(n)}(x),\ (n > N)\}$$

и

и

$$S = \{S_{2n+1}(x),\ (n = 1, 2, \ldots, N),\ S_{(n)}(x),\ (n > N)\}.$$

Тогда:

1. Для любой возможно комплекснозначной функции

$$f(x) \in \mathring{L}_2^{(s)} = \{f \in L_2^{(s)} \mid \int_0^\pi f(x)\,dx = 0\} \qquad /1.15/$$

справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} p_{2n+1} M_{2n+1}(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} q_n M_{(n)}(x), \qquad /1.16/$$

где, в силу леммы 1.1, коэффициенты p_{2n+1} и q_n однозначно определяются по формулам

$$p_{2n+1} = 2(f, S_{2n+1}) + \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \frac{\gamma_{2n+1}(f, S_{(\ell)})}{\gamma_{2\ell+1}(\mu_{(\ell)} - \mu_{2n+1})}, \qquad /1.17/$$

$$q_n = (f, S_{(n)}) \equiv 2\ddot{X}^{-1}(\mu_{(n)})(f, G(\mu_{(n)})). \qquad /1.18/$$

Сходимость в /1.16/ понимается как предел по норме L_2-частичных сумм ряда в правой части.

II. Коэффициенты

$$p_{2n+1} = (f, S_{2n+1}) + \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\gamma_{2n+1}(-1)^\ell \chi_1(\mu_{2\ell+2})}{\mu_{2n+1} - \mu_{2\ell+2}}(f, S_{2\ell+2}), \qquad /1.19/$$

откуда, в частности, вытекает, что $p_{2n+1} < \infty$.

Замечание. Имеет место также разложение

$$\frac{1}{2}\Big(\int_0^x - \int_x^\pi\Big) f(y)\,dy = \sum_{n=1}^{N} p_{2n+1} L_{2n+1}(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} q_n L_{(n)}(x), \qquad /1.20/$$

справедливое для любой $f(x) = f(\pi - x) \in L_1(0, \pi)$; сходимость равномерна по $x \in \Delta \subset (0, \pi)$.

Доказательство этой теоремы можно получить, следуя схеме, изложенной в [1]. Сначала из теоремы 2.1[5], с учетом равенств /1.6/, /1.8/ и /1.9/, получаем следующее утверждение:

Лемма 1.2. Для любой $f \in \mathring{L}_2^{(s)}$ имеем разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1,2} M_{2n+j}(x)(f, S_{2n+j}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{(n)}(x)(f, S_{(n)}). \qquad /1.21/$$

Отсюда формула /1.16/, где p_{2n+1} определяются из /1.19/, получаем сразу, если учесть, что имеет место

Лемма 1.3. При $\mu_{2n+1} \in \sigma'$

$$(-1)^n \chi_1^{-1}(\mu_{2n+2}) L_{2n+2}(x) = \sum_{\ell=1}^{N} \gamma_{2\ell+1}(\mu_{2\ell+2} - \mu_{2n+1})^{-1} L_{2\ell+1}(x).$$

Теперь для того, чтобы показать равенство коэффициентов p_{2n+1}, определяемых посредством формул /1.17/ и /1.19/, нужно воспользоваться еще и леммой.

Лемма 1.4. При $\mu_{2n+1} \in \sigma'$

$$(-1)^n \chi_1^{-1}(\mu_{2n+2}) T(x,\mu_{2n+2}) = \sum_{\ell=1}^{N} \gamma_{2\ell+1}(\mu_{2n+2}-\mu_{2\ell+1})^{-1} T(x,\mu_{2\ell+1}) + \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \frac{\gamma_{2\ell+1} T(x,\mu_{(\ell)})}{\mu_{2n+2}-\mu_{(\ell)}}.$$

Доказательство этих лемм получаем, подсчитав по теореме о вычетах, имея в виду равенства /1.6/, /1.7/ и /1.9/, контурные интегралы

$$I_R^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{h_1(x,\lambda)g_2(x,\lambda) \pm h_2(x,\lambda)g_1(x,\lambda)}{(\lambda-\lambda_{2n+2})\chi_1(\lambda)}\, d\lambda,$$

где окружности $C_R = (R+\frac{1}{2})^2\exp(i\phi),\ 0\le\phi<\pi$, и учитывая, что в силу классических асимптотик для $h(x,\lambda), g(x,\lambda)$ и $\chi^{-1}(\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty, \lambda\in c_R$, имеем $\lim I_R^{\pm}(x) = 0$ при $R\to\infty$.

Из теоремы 1.1, учитывая, что из тождества

$$\frac{d}{dx}W(y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)) = \Delta r(x)\, y_1(x,\lambda)\, y_2(x,\lambda), \quad \Delta r = r_1 - r_2,$$

следуют равенства $\gamma_{2n+1} = (\Delta r, S_{2n+1})$, $\mu_{2n+1}\in\sigma'$, $(\Delta r, S_{(n)}) = 0$, $\mu_{(n)}\in\sigma''$, получаем

Теорему 1.2. Для разности $\Delta r(x) = r_1(x) - r_2(x)$ потенциалов краевых задач /1.1/, /1.2/, где $\mu_n^{(1)} = \mu_n^{(2)}$ при $n > N$, справедливо представление

$$\Delta r(x) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_{2n+1} M_{2n+1}(x). \qquad /1.22/$$

Замечание. Формула /1.22/ впервые получена Хохштадтом[6] /см. также[4] /. Из нее, в частности, вытекает известная теорема Борга[8], о том, что если $\sigma' = \emptyset$, то $r_1(x)\equiv r_2(x)$.

Из этого замечания получаем, вследствие теоремы 1.1, что справедлива

Теорема 1.3. /см. также[8] /. Пусть $\sigma(r) = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ спектр краевой задачи

$$y'' + (\lambda - r(x))y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0,\ r(x)\in L_2^{(s)}. \qquad /1.23/$$

Тогда для любой функции $f\in \overset{\circ}{L}{}_2^{(s)}$ имеем разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{-2}(\mu_n) L_n'(x)(f, G(\mu_n)), \qquad /1.24/$$

где функции $L_n(x) = L(x,\mu_n)$ определяются формулой /1.12/ с $G = g^2(x,\lambda), H = h^2(x,\lambda)$, $g(x,\lambda)$, $h(x,\lambda)$ - решения уравнения /1.23/, удовлетворяющие начальным условиям /1.4/.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$y''+(\lambda - q(x))y = 0,\ y'(0)-hy(0) = y'(\pi)+hy(\pi) = 0,\ q\in L_2^{(s)}. \qquad /1.25/$$

Обозначим через $\phi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda) = \phi(\pi-x,\lambda)$ решения уравнения /1.25/, для которых

$$\phi(0,\lambda) = \psi(\pi,\lambda) = 1,\ \phi'(0,\lambda) = -\psi'(\pi,\lambda) = h, \qquad /1.26/$$

и пусть

$$\sigma(q,h) = \{\lambda_n \mid \omega(\lambda) = \phi'(\pi,\lambda)+h\phi(\pi,\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = 0\}_{n=0}^{\infty} \qquad /1.27/$$

спектр этой задачи. Как уже отмечалось, в работе[1] доказана

Теорема 1.4. Пусть по краевой задаче /1.25/ построены функции

$$W_n(x) = \dot\Psi(x,\lambda_n) - \dot\Phi(x,\lambda_n),\quad \Phi_n(x) = \Phi(x,\lambda_n),\quad n = 0,1,\dots, \qquad /1.28/$$

где $\Psi = \psi^2(x,\lambda),\ \Phi = \phi^2(x,\lambda)$. Тогда для любой функции $h\in L_2^{(s)}$ справедлива формула разложения:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot\omega^{-2}(\lambda_n) W_n'(x)(h, \Phi_n - \frac{1}{2}). \qquad /1.29/$$

Важное место в наших следующих построениях имеет

Теорема 1.5.[2] Пусть потенциалы $r(x)$ и $q(x)$ в уравнениях /1.23/ и /1.25/ связаны равенством

$$\mathcal{F}: r(x) = q(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\phi_0(x),\quad \phi_0(x) = \phi(x,\lambda_0). \qquad /1.30/$$

Тогда

$$\omega(\lambda) = (\lambda_0-\lambda)\chi(\lambda),\quad \lambda_n(q,h) = \mu_n(r),\quad n\ge 1, \qquad /1.31/$$

причем решения $g(x,\lambda)$ и $h(x,\lambda)$ выражаются посредством решения $\phi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ следующим образом:

$$g(x,\lambda) = \frac{W(\phi_0(x),\phi(x,\lambda))}{(\lambda_0-\lambda)\phi_0(x)},\quad h(x,\lambda) = \frac{W(\phi_0(x),\psi(x,\lambda))}{(\lambda_0-\lambda)\phi_0(x)}. \qquad /1.32/$$

Замечание. Преобразования /1.30/, /1.32/, обычно называемые преобразованиями Краммал-Крейна, использовались для аналогичной задачи на полуоси в работе[9].

2. ПРОИЗВОДНАЯ ФРЕШЕ ОПЕРАТОРА $\mathcal{F}$ /1.30/

Введем вещественное гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_2 = L_2(0,\pi)\oplus \mathbb{R}^2 \ni \hat f = (f(x),\alpha,\beta)$$

со скалярным произведением $(\hat f_1, \hat f_2)_2 = \int_0^{\pi} f_1(x) f_2(x)\,dx + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$.
Сопоставим задачи Штурма-Лиувилля

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad q(x) \in L_2(0, \pi), \tag{/2.1/}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{/2.2/}$$

элемент $\hat q = (q(x), h, H) \in \mathfrak{N}_2$. Обозначим здесь через $\phi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ решения уравнения /2.1/, для которых

$$\phi(0, \lambda) = \psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \phi'(0, \lambda) = h, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -H. \tag{/2.3/}$$

Спектр

$$\sigma = \{\lambda_n(\hat q) \mid \omega(\lambda_n) = 0\}_{n=0}^{\infty}, \quad \dot\omega(\lambda_n) \neq 0,$$

где $\omega(\hat q; \lambda) = \phi'(\pi, \lambda) + H\phi(\pi, \lambda) = h\psi(0, \lambda) - \psi'(0, \lambda)$, является простым, собственные функции

$$\psi(x, \lambda_n) = C_n \phi(x, \lambda_n), \quad C_n^{-1}(\hat q) = \phi(\pi, \lambda_n) = \psi^{-1}(0, \lambda_n) \tag{/2.4/}$$

и их нормы

$$\alpha_n(\hat q) = \Big(\int_0^{\pi} \phi^2(x, \lambda_n)\,dx\Big)^{-1} = -C_n^{-1}\dot\omega^{-1}(\lambda_n). \tag{/2.5/}$$

Известна следующая

Лемма 2.1. /см. /10, 11/ /. Собственные числа $\lambda_n(\hat q): \mathfrak{N}_2 \to \boldsymbol{R}$ краевой задачи /2.1/, /2.2/ дифференцируемы в любой точке $\hat q \in \mathfrak{N}_2$. При этом

$$\frac{d}{d\epsilon}\lambda_n(\hat q + \epsilon \hat f)\Big|_{\epsilon=0} = \Big(\frac{\partial \lambda_n}{\partial \hat q}, \hat f\Big)_2, \quad \frac{\partial \lambda_n}{\partial \hat q} = \Big(\frac{\partial \lambda_n}{\partial q}(x), \frac{\partial \lambda_n}{\partial h}, \frac{\partial \lambda_n}{\partial H}\Big), \tag{/2.6/}$$

где градиент

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial \hat q} = \alpha_n \hat\Phi_n, \quad \hat\Phi_n = (\Phi(x, \lambda_n)) = \phi^2(x, \lambda_n), 1, \Phi(\pi, \lambda_n)). \tag{/2.7/}$$

Здесь докажем, что справедлива

Теорема 2.1. Рассмотрим преобразование /1.30/ как оператор

$$\mathfrak{F}(\hat q): \mathfrak{N}_2 \to L_2, \quad \mathfrak{F}(\hat q) = q(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln \phi(x, \lambda_0(\hat q)). \tag{/2.8/}$$

Тогда в любой точке $\hat q \in \mathfrak{N}_2$ существует дифференциал

$$\frac{d}{d\epsilon}\mathfrak{F}(\hat q + \epsilon \hat f)\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \hat q}\hat f = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q(x)} f(x) + \frac{\partial \mathfrak{F}(x)}{\partial h}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}(x)}{\partial H}\beta, \tag{/2.9/}$$

где

$$\frac{d\mathfrak{F}}{\partial q} f(x) = -f(x) - \Big(\frac{d}{dx}\Phi_0^{-1}(x)\Big)\Big(\int_0^x - \int_x^{\pi}\Big)\Phi_0(\xi) f(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{d}{dx}\Big\{\Phi_0^{-1}(x)\Big(\int_0^x - \int_x^{\pi}\Big)\Phi_0(\xi)\,d\xi\Big\}\Big(\frac{\partial\lambda_0}{\partial q}, f\Big), \quad \Phi_0 = \phi^2(x, \lambda_0), \tag{/2.10/}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial h}(x) = -2\frac{d}{dx}\Big(\Phi_0^{-1}(x)\int_x^{\pi}\Phi_0(\xi)\,d\xi\Big)\frac{\partial\lambda_0}{\partial h}, \tag{/2.11/}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial H}(x) = 2\frac{d}{dx}\Big(\Phi_0^{-1}(x)\int_0^x\Phi_0(\xi)\,d\xi\Big)\frac{\partial\lambda_0}{\partial H}. \tag{/2.12/}$$

Доказательство. Так как вследствие /2.3/ имеем $\partial\phi/\partial H = \partial\psi/\partial h = 0$, то из /2.4/ вытекают равенства

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial h} = -\frac{d^2}{dx^2}\frac{\dot\psi(x, \lambda_0)}{\psi(x, \lambda_0)}\frac{\partial\lambda_0}{\partial h}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial H} = -\frac{d^2}{dx^2}\frac{\dot\phi(x, \lambda_0)}{\phi(x, \lambda_0)}\frac{\partial\lambda_0}{\partial H}. \tag{/2.13/}$$

Напомним, что из уравнения /2.1/ следует тождество $d/dx\, W(\dot y(x, \lambda), y(x, \lambda)) = y^2(x, \lambda)$. Полагая здесь $y = \phi(x, \lambda_0)$, получаем

$$\frac{d}{dx}\frac{\dot\phi(x, \lambda_0)}{\phi(x, \lambda_0)} = -\Phi_0^{-1}(x)\int_0^x \Phi_0(\xi)\,d\xi, \tag{/2.14/}$$

что вместе с /2.13/ дает искомую формулу /2.12/. Далее, снова учитывая /2.14/, имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} f(x) = f(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\Big\{\phi^{-1}(q; x, \lambda_0)\frac{\partial}{\partial q}\phi(q; x, \lambda_0) f(x)\Big\} +$$

$$+ 2\frac{d}{dx}\Big\{\Phi_0^{-1}(x)\int_0^x \Phi_0(\xi)\,d\xi\Big\}\Big(\frac{\partial\lambda_0}{\partial q}, f\Big). \tag{/2.15/}$$

Для того, чтобы подсчитать производную $\partial\phi_0(q; x)/\partial q(x)$, заметим сначала, что при $\lambda = \lambda_0$ решение $\phi_0(q + f; x)$ уравнения $\phi_0'' + (\lambda - q(x))\phi_0 = f(x)\phi_0$, для которого $\phi_0(q + f; 0) = 1$, $\phi_0'(q + f, 0) = h$, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\phi_0(q + f; x) = \phi_0(q; x) + \int_0^x \{\chi_0(x)\phi_0(s) - \chi_0(s)\phi_0(x)\} \times$$

$$\times f(s)\phi_0(q + f; s)\,ds, \tag{/2.16/}$$

где $\chi_0(x) = \chi(x, \lambda_0)$ - решение /2.1/, $\chi_0(0) = -h(1 + h^2)^{-1}$, $\chi_0'(0) = (1 + h^2)^{-1}$. Так как $W(\phi_0, \chi_0) = 1$, то $\chi_0(x) = \phi_0(x)\int_0^x \phi_0^{-2}(s)\,ds - h(1 + h^2)^{-1}\phi_0(x)$ и, следовательно,

$$\chi_0(x)\phi_0(s) - \chi_0(s)\phi_0(x) = \phi_0(x)\phi_0(s)\int_s^x \Phi_0^{-1}(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда для уравнения /2.16/ имеем запись

$$\phi_0(q+f;\, x) = \phi_0(q;\, x) +$$

$$+ \phi_0(q;x) \int_0^x \Phi_0^{-1}(s) \left(\int_0^s f(\xi)\, \phi_0(q;\, \xi)\, \phi_0(q+f;\, \xi)\, d\xi \right) ds\,,$$

из которой легко вытекает, что дифференциал

$$\frac{\partial}{\partial q} \phi_0(q;x)\, f(x) = \phi_0(q;x) \int_0^x \Phi_0^{-1}(s) \left(\int_0^s \Phi_0(\xi) f(\xi)\, d\xi \right) ds. \qquad /2.17/$$

Подставляя /2.17/ в правую часть равенства /2.15/, получаем формулу /2.10/, ввиду того, что из /2.4/ следует $\mathcal{F}(\hat{q}) = q(x) - 2d^2/dx^2 \psi(x, \lambda_0)$. Теорема доказана. При помощи этой теоремы, с учетом теоремы 1.5 и леммы 2.1, легко устанавливается

Лемма 2.2. Пусть $\mu_n(r = \mathcal{F}(\hat{q}))$ - собственные числа задачи /1.23/ с $r(x) \in L_2(0, \pi)$. Тогда

$$\left(\frac{\partial \lambda_n}{\partial \hat{q}}, \hat{f}\right)_2 = \left(\frac{\partial \mu_n}{\partial \mathcal{F}}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \hat{q}} \hat{f}\right), \quad n \geq 1, \quad \hat{f} \in \mathfrak{N}_2, \qquad /2.18/$$

где

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \hat{q}} \hat{f} = -f(x) - \left(\frac{d}{dx} \Phi_0^{-1}(x)\right) \left(\int_0^x - \int_x^\pi \right) \Phi_0(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \; +$$

$$+ \frac{d}{dx} \left\{ \Phi_0^{-1}(x) \left(\int_0^x - \int_x^\pi \right) \Phi_0(\xi)\, d\xi \right\} \left(\frac{\partial \lambda_0}{d\hat{q}}, \hat{f} \right)_2 + \qquad /2.19/$$

$$+ \alpha_0^{-1} \left(\frac{\partial \lambda_0}{\partial H} \beta - \frac{\partial \lambda_0}{\partial h} \alpha \right) \frac{d}{dx} \Phi_0^{-1}(x)\,,$$

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial r}(x) = \gamma_n\, g^2(x, \mu_n), \quad \gamma_n = \| g(x, \mu_n) \|_{L_2}^{-2} = (g'(\pi, \mu_n) \dot{\chi}(\mu_n))^{-1} \qquad /2.20/$$

Доказательство. Напомним [2], что равенства /1.31/ справедливы в общем случае краевых задач /2.1/, /2.2/ и /1.23/ с $r(x) = \mathcal{F}(\hat{q}; x) \in L_2$. Следовательно, $\mu_n(\mathcal{F}(\hat{q} + \epsilon \hat{f})) = \lambda_n(\hat{q} + \epsilon \hat{f})$, $n \geq 1$, $\hat{f} \in \mathfrak{N}_2$. Дифференцируя по ϵ и полагая затем $\epsilon = 0$, получаем, в силу /2.6/ и /2.9/, равенства /2.18/. Запись /2.19/ вытекает непосредственно из равенств /2.9/-/2.12/. Формулы /2.20/, которые являются аналогами равенств /2.6/, /2,7/ для краевой задачи /1.23/ с $r \in L_2$, хорошо известны. Лемма доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.3 и 1.4

Приведем более подробно вывод теоремы 1.4 с помощью теорем 1.3, 1.5 и леммы 2.2. Доказательство разобьем на несколько лемм. Отметим сначала, что имеет место следующая

Лемма 3.1. Пусть $\hat{f}^{(s)} \in \mathfrak{N}_2^{(s)} = \{ f \in \mathfrak{N}_2 \,|\, f(x) = f(\pi - x),\ \alpha, \beta = \alpha \}$. Тогда, если $\hat{q}^{(s)} \in \mathfrak{N}_2^{(s)}$, т.е. задана краевая задача /1.25/, то для любой

$$f \in \mathring{\mathfrak{N}}_1^{(s)} = \left\{ \hat{f} \in \mathfrak{N}_2^{(s)} \,\middle|\, \frac{1}{2} \int_0^\pi f(x)\, dx + 2\alpha = 0 \right\}$$

имеем

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \hat{q}^{(s)}} f \equiv h(f, \lambda_0; x) = -f(x) - \left(\frac{d}{dx} \Phi_0^{-1}(x)\right) \left(\int_0^x - \int_x^\pi \right) \Phi_0(\xi) f(\xi)\, d\xi \; +$$

$$+ \alpha_0 \left(f, \Phi_0 - \frac{1}{2}\right) \frac{d}{dx} \left\{ \Phi_0^{-1}(x) \left(\int_0^x - \int_x^\pi \right) \Phi_0(\xi)\, d\xi \right\} \in \mathring{L}_2^{(s)}. \qquad /3.1/$$

Доказательство. Равенство /3.1/ вытекает из /2.19/ при $\alpha = \beta$, так как из $\hat{q} \in \mathfrak{N}_2^{(s)}$ следует, что $\partial \lambda_n / \partial H = \partial \lambda_n / \partial h = \alpha_n^{-1}(\hat{q}^{(s)})$, $n \geq 0$. Соотношение $h(f, \lambda_0;\, x) \in \mathring{L}_2^{(s)}$ проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Замечание. Равенство $\partial \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)}) / \partial h = \partial \mathcal{F}(\hat{q}) / \partial H$, $(h = H)$ при $\hat{q} \in \mathfrak{N}_2^{(s)}$ следует понимать в том смысле, что $(\partial \mathcal{F} / \partial h, f) = (\partial \mathcal{F} / \partial H, f)$, $f \in L_2^{(s)}$.

Лемма 3.2. Пусть по функции $f \in L_2^{(s)}$ построена функция $h(f, \lambda_0;\, x)$ /3.1/, где $r = \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)})$. Тогда

$$\gamma_n(r) \int_0^\pi h(f, \lambda_0;\, x)\, G_n(r, x)\, dx = \alpha_n(\hat{q}^{(s)}) \int_0^\pi f(x) \left(\Phi_n(\hat{q}^{(s)};\, x) - \frac{1}{2}\right) dx\,, \qquad /3.2/$$

где

$$\alpha_n = (-1)^{n+1}\, \dot{\omega}^{-1}(\lambda_n = \mu_n), \quad \gamma_n = (-1)^n\, \dot{\chi}^{-1}(\mu_n), \qquad /3.3/$$

$$(\lambda_0 - \mu_n)\, \dot{\chi}(\mu_n) = \dot{\omega}(\mu_n), \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Равенства /3.2/ являются прямым следствием лемм 1.3 и 2.2. Равенства /3.3/ вытекают из /1.31/. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть в краевой задаче /1.23/ $r(x) = \mathcal{F}(\hat{q} \in \mathfrak{N}_2^{(s)}; x)$. Тогда для любой $f \in L_2^{(s)}$ справедливо разложение

$$-h(f, \lambda_0; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L'_n(r;\, x)}{\dot{\chi}(r;\, \mu_n)\, \dot{\omega}(\hat{q}^{(s)}; \mu_n)} \int_0^\pi f(\xi) \left(\Phi_n(\hat{q}^{(s)}; x) - \frac{1}{2}\right) dx, \qquad /3.4/$$

где функции $L_n(r;\, x)$ определяются как в теореме 1.3, $h(f, \lambda_0;\, x)$ построена по формуле /3.1/.

Доказательство вытекает непосредственно из лемм 3.1 и 3.2 в силу теоремы 1.3. Лемма доказана.

Построим теперь с помощью функции $\Phi_0(x)$ операторы

$$\mathbf{A}: L_2 \to L_2: \mathbf{A} f(x) = f(x) + \left(\frac{d}{dx} \Phi_0^{-1}(x)\right) \left(\int_0^x - \int_x^\pi \right) \Phi_0(\xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad /3.5/$$

$$\mathbf{B}: L_2 \to L_2: \mathbf{B} f(x) = f(x) + \Phi'_0(x) \left(\int_0^x - \int_x^\pi \right) \Phi_0^{-1}(\xi) f(\xi)\, d\xi. \qquad /3.6/$$

Справедлива

Лемма 3.4. В пространстве $L_2^{(s)}\ A = B^{-1}$, т.е. для любой $h \in L_2^{(s)}$ уравнение $Af(x) = h(x)$ имеет единственное решение $f(x) = Bh(x) \in L_2^{(s)}$ и обратно. При этом

$$2\int_0^\pi h(x)(\Phi_0(x) - \frac{1}{2})\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx, \quad h(x) = Bf(x). \qquad /3.7/$$

Доказательство этой леммы, которое вполне аналогично доказательству леммы 6.6 [3], здесь опускаем. Отметим лишь, что условие $A = B^{-1}$ в пространстве L_2 не выполняется, так как нетрудно проверить, что уравнение $Bh = f \in L_2$ имеет при любой постоянной C решение $h(x) = C\frac{d}{dx}\Phi_0^{-1}(x) + Af(x)$.

Сложнее устанавливается

Лемма 3.5. Пусть функции $L_n(x)$ и $W_n(x)$, $(r = \mathcal{F}(\hat{q}^{(s)}))$ построены, как в теоремах 1.3 и 1.4 соответственно. Тогда при $n \ge 1$

$$(\lambda_0 - \lambda_n)^{-1} W_n'(x) = BL_n'(x) = L_n'(x) + (\frac{d}{dx}\Phi_0(x))(\int_0^x - \int_x^\pi)\Phi_0^{-1}(\xi)L_n'(\xi)\,d\xi$$

и /3.8/

$$\frac{d}{dx}\{\Phi_0(x)(\int_0^x - \int_x^\pi)\Phi^{-1}(\xi)\,d\xi\} = B\,a_0^{-1}W_0'(x). \qquad /3.9/$$

Доказательство. Известно /см. например, [9] /, что обратные к преобразованиям /1.32/ имеют следующий вид:

$$\phi(x,\lambda) = \frac{W(z_0(x), g(x,\lambda))}{z_0(x)}, \quad \psi(x,\lambda) = \frac{W(z_0(x), h(x,\lambda))}{z_0(x)}, \quad z_0 = \phi_0^{-1}.$$

Отсюда, в силу тождества /1.14/, получаем равенства

$$(\lambda_0 - \lambda)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_0(x)\Phi(x,\lambda)) = W(Z_0(x), G(x,\lambda)), \quad Z_0 = \Phi_0^{-1},$$

$$(\lambda_0 - \lambda)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_0(x)\Psi(x,\lambda)) = W(Z_0(x), H(x,\lambda)),$$

где $G = g^2$, $H = h^2$, $\Phi = \phi^2$, $\Psi = \psi^2$, из которых вытекает, что

$$(\lambda_0 - \lambda)^{-2} Z_0(x)(\Psi(x,\lambda) - \Phi(x,\lambda)) + (\lambda_0 - \lambda)^{-1}(\dot\Psi(x,\lambda) - \dot\Phi(x,\lambda)) = \qquad /3.10/$$

$$= \frac{1}{2}(\int_0^x - \int_x^\pi) W(Z_0(\xi), \dot H(\xi,\lambda) - \dot G(\xi,\lambda))\,d\xi,$$

так как $\int_0^\pi W(Z_0(\xi), H(\xi,\lambda) + G(\xi,\lambda))\,d\xi = 0$.

Теперь для того, чтобы получить /3.8/, следует положить в /3.10/ $\mu = \mu_n$ и учесть, что $\Psi(x,\mu_n) = \Phi(x,\mu_n)$ и $\Psi(0,\lambda_0) = \Phi(\pi,\lambda_0) = 1$. Равенство /3.9/ проверяется несложной выкладкой. Лемма доказана.

Теперь для того, чтобы получить разложение /1.29/, остается применить оператор B к обеим сторонам разложения /3.4/, учитывая лемму 3.5 и равенства /3.3/.

По аналогичной схеме, исходя из разложения /1.29/, получаем разложение /1.24/. Наметим основные элементы этой конструкции. Из представлений /1.32/ и тождества /1.14/ устанавливаем, что для любой $f \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(s)}$ имеем

$$\int_0^\pi f(x)G(x,\mu_n)\,dx = (\lambda_0 - \mu_n)^{-1}\int_0^\pi h(x)(\Phi_0(x,\mu_n) - \frac{1}{2})\,dx, \; n \ge 1, \qquad /3.11/$$

где $h(x) = Bf(x)$.

Положим теперь в разложении /1.29/ $h(x) = Bf(x)$. Из равенств /3.11/ получаем

$$h(x) = \sum_{n=1}^\infty (\lambda_0 - \mu_n)\dot\omega^{-2}(\mu_n)W_n'(x)(f, G(\mu_n)), \qquad /3.12/$$

так как вследствие /3.7/ условие $f \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(s)}$ дает $(h, \Phi_0 - 1/2) = 0$. Далее, следуя доказательству леммы 3.5, устанавливаем равенства $(\lambda_0 - \mu_n)L_n'(x) = AW_n'(x)$, $n \ge 1$. Отсюда, применяя оператор A к обеим сторонам равенства /3.12/, получаем с учетом леммы 3.4 искомое разложение /1.24/.

Замечание. Теоремы 1.3 и 1.4 играют важную роль в теории непрерывного аналога метода Ньютона /НАМН/ при решении обратных задач для операторов /1.23/ и /1.25/ соответственно, на что указывалось в [12,13]. В частности, теорема 1.3 была получена в [8] в связи с построением эффективной итерационной схемы в обратной задаче Штурма-Лиувилля. Эту схему можно получить, применив конечно-разностный метод Эйлера для приближенного решения соответствующего уравнения НАМН, следуя [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-86-505, Дубна, 1986.
2. Isaacson E.L., Mc Kean, Trubowitz E., Comm.Pure and Appl. Math., 1984, 37, p.1.
3. Христов Е.Х. Год. СУ "Кл.Охридски", ФММ, кн. 2 "Механика", София, 1981, т.75, с.215.
4. Левитан Б.М. Известия АН СССР, сер. мат., 1978, 42, с.200.
5. Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-85-503, Дубна, 1985.
6. Hochstadt H. Comm.Pure and Appl. Math., 1973, 26, p.715.
7. Borg G. Acta Math., 1945, 78, 2, p.1.
8. Barcilon V., J.Math.Phys., 1974, vol.15, No.4, p.429.
9. Корон В.Ф. Сиб.матем. журнал, 1961, т.11, №5, с.673.
10. Кирчев К.П., Христов Е.Х. Сиб.матем. журнал, 1980, т.21, вып.1, с.99.
11. Isaacson E.L., Trubowitz E. Comm.Pure and Appl.Math., 1983, 34, p.767.
12. Касчиев М., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-12915, Дубна, 1979.
13. Христов Е.Х. ОИЯИ, 11-81-414, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 сентября 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна,1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна,1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Жидков Е.П., Христов Е.Х. P5-86-634

Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному спектру для нулевых граничных условий

Получены формулы разложения по произведениям решений двух задач Штурма-Лиувилля:

$$y'' + (\lambda - r_j(x))y = 0,\quad y(0) = y(\pi) = 0,\quad r_j(x) = r_j(\pi - x) \in L_2(0, \pi),\quad j = 1, 2,$$

для которых при некотором $N < \infty$ собственные числа $\mu_n^{(1)} = \mu_n^{(2)}$, $n > N$, откуда вытекает, что

$$r_1(x) - r_2(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \dot g_1^{-1}(\pi, \mu_n^{(1)}) \frac{d}{dx}\{\dot G(x, \mu_n^{(1)}) - \dot H(x, \mu_n^{(1)})\},$$

где $\cdot = \partial/\partial\lambda$,

$$G(x, \lambda) = g_1 g_2,\quad H(x, \lambda) = G(\pi - x, \lambda),\quad g_j(0, \lambda) = 0,\quad g_j'(0, \lambda) = 1.$$

Предложены простые трансформаторные формулы, позволяющие получать эти разложения из известных для краевой задачи:

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0,\quad y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + hy(\pi) = 0,\quad q(x) = q(\pi - x) \in L_2(0, \pi).$$

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Zhidkov E.P., Khristov E.Kh. P5-86-634

On Determination of Sturm-Liouville Operator by One Spectrum in the Case of Dirichlet Boundary Conditions

An expansion formula over the products of solutions of the two Sturm-Liouville problems

$$y'' + (\lambda - r_j(x))y = 0,\quad y(0) = y(\pi) = 0,\quad r_j(x) = r_j(\pi - x) \in L_2(0, \pi),\quad j = 1, 2,$$

for which the eugenvalues $\mu_n^{(1)} = \mu_n^{(2)}$ for some $N < \infty$ are obtained. As a corollary it is shown, that

$$r_1(x) - r_2(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \dot g_1^{-1}(\pi, \mu_n^{(1)}) \frac{d}{dx}\{\dot G(x, \mu_n^{(1)}) - \dot H(x, \mu_n^{(1)})\},$$

where $\cdot = \partial/\partial\lambda$,

$$G(x, \lambda) = g_1 g_2,\quad H(x, \lambda) = G(\pi - x, \lambda),\quad g_j(0, \lambda) = 0,\quad g_j'(0, \lambda) = 1.$$

A simple transformation formula, which allows one to obtain this expansion directly using the known expansion for the problem

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0,\quad y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + hy(\pi) = 0,\quad q(x) = q(\pi - x) \in L_2(0, \pi).$$

is constructed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986