объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-86-628

И.В.Барашенков, Б.С.Гетманов

МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В СХЕМЕ ЕДИНОГО ОПИСАНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МАССИВНЫХ ПОЛЕЙ

Невырожденный sl(2,C) случай

Направлено в журнал "Communications in Matematical Physics"

1986

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа [I)] посвящена получению точных решений N -солитонного типа в схеме единого описания двумерных интегрируемых массивных моделей релятивистской теории поля (СХЕОП) на нулевом фоне в важнейшем – невырожденном $sl(2,\mathbb{C})$ – случае. Краткое описание схемы, охватывающей с единой точки зрения все массивные релятивистские интегрируемые системы (как скалярные, так и спинорные) содержится в работах одного из авторов /4,5/. (Безмассовые системы были детально изучены Захаровым и Михайловым /I,2/). Отправной точкой являются уравнения Захарова-Шабата для релятивистского случая (I.I) в новой, треугольной калибровке (это – центральный пункт СХЕОП), автоматически гарантирующей явную лагранжевость /5/.

Важный случай вырождения в СХЕОП приводит к двумеризованным цепочкам Тоды, которые были исследованы Михайловым, Ольшанецким и Переломовым /6,7/, Форди и Гиббонсом /25/ (периодические), а также Лезновым и Савельевым (незамкнутые цепочки, /8/). Ниже рассматривается невырожденный случай.

Отправляясь от общей линейной 2x2 матричной задачи (I.I), мы получаем систему двух полей (или, точнее, однопараметрическое семейство калибровочно-эквивалентных систем), которые можно считать спинорными. Эту модель мы будем называть "системой общего положения, связанной с алгеброй $\mathcal{G} = sl(2,\mathbb{C})$ ", или просто " $\mathcal{G}$ – системой". Ее легко можно переформулировать в терминах двух комплексных скалярных полей. В качестве редукций $\mathcal{G}$ – система содержит как известные модели такие, как массивная модель Тирринга и комплексное уравнение sine-Gordon), так и новые, в т.ч. вторую массивную спинорную модель и уравнение O(I,I) sine-Gordon.

Главная цель настоящей работы – дополнить регулярную схему построения интегрируемых систем адекватной процедурой нахождения их солитонных решений. Для этого мы обобщаем "метод одевания" Захарова-Шабата-Михайлова /9,I,6/ на случай линейной задачи типа (2.2). Трудность здесь состоит в том, что каноническую нормировку соответствующей задачи Римана (весьма удобную и обычно применяемую) можно использовать только для некоторого частного представителя из вышеупомянутого класса калибровочно-эквивалентных моделей. Разумеется, если решение для этого частного случая известно, решения для остальных $\mathcal{G}$ -систем могут быть (в принципе) получены из него калибровочным преобразованием. К сожалению, такая стратегия представляется малоэффективной, поскольку калибровочное преобразование предполагает нелокальные замены для полевых переменных. Для того, чтобы избежать их, мы избираем другой подход, связанный с отказом от наложения каких-либо предварительных условий нормировки на одевающую матрицу. Несмотря на то, что вычисления несколько усложняются, на этом пути удается "одеть" все семейство калибровочно-эквивалентных систем одновременно, причем N -солитонные решения возникают в единообразной замкнутой детерминантной форме.

I) Часть результатов была кратко анонсирована в /3/.

Решения для редуцированных уравнений извлекаются из решения $\mathcal{G}$ -системы. На этом этапе трудность возникает в случае комплексного уравнения sine-Gordon в пространстве Минковского. Проблема состоит в том, что, в отличие от других редукций, последняя не связана непосредственно с вещественными формами алгебры $sl(2,\mathbb{C})$. Один из путей преодоления этой трудности заключается во введении вспомогательной калибровки, индуцирующей достаточно неочевидную инволюцию на многообразии одевающих матриц. Тем не менее, после того как эта инволюция найдена, редукционные условия получаются стандартным образом.

В настоящей работе мы ограничиваемся "одеванием" нулевого затравочного решения (нулевого фона). В случае скалярных полей, однако, построенные солитонные решения доставляют немедленную информацию и о солитонах на ненулевом фоне. Последние могут быть получены с помощью преобразований типа преобразования Миуры, отображающих каждое из двух комплексных уравнений sine-Gordon на то же самое уравнение, но с обратным знаком массы.

Статья организована следующим образом. $\mathcal{G}$ -система получена и редуцирована в разд.I, а ее N -солитонное решение построено в разд.2. Последующие 4 части посвящены нахождению ограничений, накладываемых на параметры этого решения с тем, чтобы удовлетворить следующим редукциям: В пространстве Минковского – (расширенной) массивной модели Тирринга (ММТ, разд.3); комплексному уравнению sine/sinh – Gordon [называемому ниже $O(2)$ SG], разд.6; новой массивной спинорной модели и новой комплексификации SG, называемой ниже $O(1,1)$ SG, разд. 4. В евклидовом пространстве (разд.5) – (расширенному) $O(2)$ SG и евклидовой ММТ. Наконец, в части 7 предъявлены преобразования Миуры, а в последнем разделе обсуждаются связи между скалярными и спинорными системами, включая соответствие между SGE и ММТ.

Мы благодарны В.Е.Захарову, А.В.Михайлову, А.Б.Яновски за полезные обсуждения; А.Б.Борисову и А.Р.Итсу за содержательные замечания по этой работе. Один из авторов (И.Б.) признателен В.Г.Маханькову за поддержку исследования.

I. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Ниже все величины подразумеваются комплексными, если противное не оговорено. Рассмотрим линейную систему:

$$i\partial_+\Psi=(\lambda^2U_2^+ + U_0^+)\Psi, \qquad i\partial_-\Psi=(\lambda^{-2}U_2^- + U_0^-)\Psi, \qquad \text{(I.I)}$$

где $U_2^\pm(z_+,z_-)$, $U_0^\pm(z_+,z_-)$ и $\Psi(\lambda;z_+,z_-)$ - 2x2 матричнозначные функции (комплексных) переменных z_+ и z_-; $\partial_\pm\equiv\partial/\partial z_\pm$; λ - спектральный параметр. Условия совместности системы (I.I) суть

$$i\partial_\pm U_2^\mp + [U_2^\mp, U_0^\pm]=0 \qquad \text{(I.2}^\pm\text{)}$$

$$i\partial_- U_0^+ - i\partial_+U_0^- + [U_2^+,U_2^-] + [U_0^+,U_0^-]=0. \qquad \text{(I.3)}$$

Вычитание следа, умноженного на единичную матрицу, из каждой из четырех матриц $U_2^\pm$, $U_0^\pm$ оставляет систему (I.2)-(I.3) инвариантной. Следовательно, без потери общности можно принять, что $U_2^\pm, U_0^\pm \in sl(2,\mathbb{C})$. Далее, система (I.I) ковариантна относительно калибровочного преобразования /9,I/:

$$\Psi=g\tilde\Psi,\quad U_2^\pm=g\tilde U_2^\pm g^{-1},\quad U_0^\pm = g\tilde U_0^\pm g^{-1}+i\partial_\pm g\cdot g^{-1}, \qquad \text{(I.4)}$$

$g(\lambda;z_+,z_-)\in SL(2,\mathbb{C})$. В соответствии с центральной идеей СХЕОП зафиксируем калибровку, выбрав U_2^+ верхне-, а U_2^- - нижне-треугольной матрицей: $(U_2^+)_{21}=(U_2^-)_{12}=0$. Из (I.2) имеем тогда

$$(U_0^+)_{12}\,tr(U_2^-\sigma_3)=0, \qquad (U_0^-)_{21}\,tr(U_2^+\sigma_3)=0. \qquad \text{(I.5)}$$

Вначале предположим, что $(U_0^+)_{12}=(U_0^-)_{21}=0$. Тогда уравнения (I.2$^\pm$) дают $\partial_\pm diag\,U_2^\mp=0$ и можно ввести $a^\pm(z_\pm)$ такое, что $diag\,U_2^\pm=\frac{1}{2}a^\pm(z_\pm)\sigma_3$. Для бесшпуровой $U_2^+[U_2^-]$ выбор $tr(U_2^+\sigma_3)=0$ $[tr(U_2^-\sigma_3)=0]$ в (I.5) соответствует тому, что мы будем называть вы-

рожденным случаем: $a^+(z_+)\equiv0$ $[a^-(z_-)\equiv0]$. В настоящем рассмотрении мы полагаем $a^\pm(z_\pm)\neq0$ для всех $z_\pm$.

Обозначим теперь матричные элементы $U_2^\pm$, $U_0^\pm$ следующим образом:

$$U_2^+=\begin{pmatrix} a^+/2 & q_1 \\ 0 & -a^+/2\end{pmatrix}, \qquad U_0^+=\begin{pmatrix} F^+/2 & 0 \\ q_2 & -F^+/2\end{pmatrix}, \qquad \text{(I.6)}$$

$$U_2^-=\begin{pmatrix} a^-/2 & 0 \\ q_4 & -a^-/2\end{pmatrix}, \qquad U_0^-=\begin{pmatrix} F^-/2 & q_3 \\ 0 & -F^-/2\end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях условия совместности (I.2)-(I.3) переписываются как

$$(i\partial_- - F^-)q_1 + a^+q_3=0, \qquad (i\partial_- + F^-)q_2 - a^+q_4=0,$$
$$(i\partial_+ - F^+)q_3 + a^-q_1=0, \qquad (i\partial_+ + F^+)q_4 - a^-q_2=0, \qquad \text{(I.7)}$$

$$i\partial_-F^+ - i\partial_+F^- + 2(q_1q_4 - q_2q_3)=0. \qquad \text{(I.8)}$$

Переопределяя поля: $q_{1,2}\to a^+q_{1,2}$, $q_{3,4}\to a^-q_{3,4}$, $F^\pm\to a^\pm F^\pm$ и заменяя переменные $z_\pm$ так, что $\partial_\pm\to a^\pm(z_\pm)\partial_\pm$, можно зафиксировать $a^\pm\equiv1$. Далее, система (I.7)-(I.8) обладает "остаточной" калибровочной инвариантностью ($\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$):

$$q_{1,3}=e^{\Theta}\tilde q_{1,3}, \quad q_{2,4}=e^{-\Theta}\tilde q_{2,4}, \quad F^\pm=\tilde F^\pm + i\partial_\pm\Theta, \qquad \text{(I.9)}$$

связанной с выбором $g=exp(\frac{1}{2}\Theta\sigma_3)$ в (I.4). С другой стороны, из (I.7)-(I.8) вытекает $\partial_-(F^++\omega_+q_1q_2)=\partial_+(F^-+\omega_-q_3q_4)$, где $\omega_\pm$ - любые постоянные, удовлетворяющие

$$\omega_+ + \omega_- = 2. \qquad \text{(I.IO)}$$

Следовательно, существует потенциал π такой, что $F^++\omega_+q_1q_2=\partial_+\pi$, $F^-+\omega_-q_3q_4=\partial_-\pi$. Ввиду инвариантности (I.9), можно положить $\pi\equiv0$, получая, тем самым, семейство калибровочно-эквивалентных систем:

$$(i\partial_- - F^-)q_1 + q_3=0, \qquad (i\partial_- + F^-)q_2 - q_4=0,$$
$$(i\partial_+ - F^+)q_3 + q_1=0, \qquad (i\partial_+ + F^+)q_4 - q_2=0, \qquad \text{(I.II}'\text{)}$$

$$F^+=-\omega_+q_1q_2, \qquad F^-=-\omega_-q_3q_4. \qquad \text{(I.II}''\text{)}$$

Для каждой пары $\omega_\pm$, удовлетворяющей (I.I0), систему (I.II) мы будем называть системой общего положения, или $\mathcal{Y}$ -системой. Заметим, что (I.II$'$) дает закон сохранения $\partial_-(q_1q_2)+\partial_+(q_3q_4)=0$, откуда

$$q_1q_2=\partial_+\Lambda\ ,\qquad q_3q_4=-\partial_-\Lambda\ . \tag{I.I2}$$

Восстанавливая отсюда Λ , можно уточнить преобразование (I.9), отображающее $\mathcal{Y}$ - систему с $\omega_\pm$ на $\mathcal{Y}$ -систему с $\tilde{\omega}_\pm$. Именно, соответствующее Θ дается

$$\Theta=i(\tilde{\omega}_- - \omega_-)\Lambda\ . \tag{I.I3}$$

Для двух различных выборов $\omega_\pm$ $\mathcal{Y}$ -система (I.II) явно лагранжева. С точки зрения релятивистской теории поля наиболее содержательным является случай $\omega_\pm=1$, когда соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}=iq_2\partial_-q_1+iq_4\partial_+q_3+q_1q_4+q_2q_3+q_1q_2q_3q_4+(\text{к.с.}) \tag{I.I4}$$

Вторая возможность связана с выбором $\omega_-=0$ (или $\omega_+=0$). При $\omega_-=0$, $\omega_+=2$, исключая из системы (I.II) q_3 и q_4 , мы получаем модель Михайлова /I0/ с лагранжианом

$$\mathcal{L}=-i\partial_+q_1\,\partial_-q_2+q_1q_2+iq_1^2q_2\,\partial_-q_2+(\text{к.с.}) \tag{I.I5}$$

Обозначения. В данной работе рассматриваются теоретико-полевые модели как в пространстве Минковского (M^2), так и в евклидовом (E^2). Греческие индексы мы резервируем для покомпонентного обозначения соответствующих векторов, со стандартным соглашением суммирования по повторяющимся. В M^2 лабораторные координаты суть x^0 и x^1 , и сигнатура метрики (+ –), т.е. $k_\mu x^\mu=k^0x^0-k^1x^1$. Будут использоваться также конусные переменные: $\eta=\frac{1}{2}(x^0+x^1)$, $\xi=\frac{1}{2}(x^0-x^1)$. В E^2 лабораторные координаты суть x_1 и x_2 , $k_\mu x_\mu=k_1x_1+k_2x_2$, а вместо η и ξ мы будем иметь дело с переменными $z=\frac{1}{2}(x_1+ix_2)$, $z^*=\frac{1}{2}(x_1-ix_2)$. γ -матрицы задаются с помощью матриц Паули: $\gamma^0=\gamma_0=\sigma_1$, $\gamma^1=-\gamma_1=i\sigma_2$, $\gamma^5=\gamma^0\gamma^1$ в M^2 и $\gamma_\mu=\sigma_\mu$ в E^2. Наконец, $*$ обозначает комплексное сопряжение, T - транспонирование и $\dagger$ - эрмитово сопряжение.

Для того, чтобы $\mathcal{Y}$ -система действительно представляла собой модель релятивистской (или евклидовой) теории поля, следует задать трансформационные свойства полей $q_1,\dots,q_4$. Имеются 2 возможности, соответствующие спинорным и скалярным полям.

I.I Обычная и расширенная ММТ в пространстве M^2. В M^2 положим $z_+=\eta$, $z_-=\xi$ и обозначим $q_1=u_1$, $q_2=u_2^*$, $q_3=v_1$, $q_4=v_2^*$. Лагранжиан (I.I4) переписывается тогда в виде

$$\mathcal{L}_1=iu_2^*u_{1\xi}+iv_2^*v_{1\eta}+u_2^*v_1+v_2^*u_1+u_1u_2^*v_1v_2^*+(\text{к.с.}) \tag{I.I6}$$

Если $\psi_1=(u_1,v_1)^T$ и $\psi_2=(u_2,v_2)^T$ преобразуются по спинорному представлению группы Лоренца, $\mathcal{Y}$ -система (I.I6) представляет собой модель двух спинорных полей:

$$L_1=i\vec{\bar{\psi}}(\gamma^\mu\otimes\sigma_1)\partial_\mu\vec{\psi}+\vec{\bar{\psi}}(1\otimes\sigma_1)\vec{\psi}+\frac{1}{8}\left\{[\vec{\bar{\psi}}(\gamma^\mu\otimes\sigma_1)\vec{\psi}]^2-[\vec{\bar{\psi}}(\gamma^\mu\otimes\sigma_2)\vec{\psi}]^2\right\}, \tag{I.I7}$$

где $\vec{\psi}=(\psi_1,\psi_2)^T$, $\vec{\bar{\psi}}=(\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2)$, $\bar{\psi}_i=\psi_i^\dagger\gamma_0$, $\vec{\bar{\psi}}\vec{\psi}=\bar{\psi}_1\psi_1+\bar{\psi}_2\psi_2$. Отождествление $\psi_1=\psi_2\equiv\psi$ [2)] редуцирует (I.I7) к массивной модели Тирринга (ММТ) /II/:

$$L_2=i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi+\bar{\psi}\psi+\frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2\ , \tag{I.I8}$$

где $\psi=(u,v)^T$. В терминах u и v (I.I8) принимает вид

$$\mathcal{L}_2=iu_\xi u^*+iv_\eta v^*+uv^*+u^*v+|uv|^2. \tag{I.I9}$$

ММТ может быть расширена до (вообще говоря) нелагранжевой модели /I2/

$$iu_\xi+v+\omega_-u|v|^2=0\ ,\qquad iv_\eta+u+\omega_+v|u|^2=0, \tag{I.20}$$

возникающей из (I.II) при редукции

$$q_1=q_2^*\equiv u\ ,\qquad q_3=q_4^*\equiv v\ ,\qquad \omega_\pm\in\mathbb{R}\ . \tag{I.2I}$$

(ММТ соответствует $\omega_\pm=1$). Редукция (I.2I) сохраняет, естественно, калибровочное соответствие между (I.II) и (I.I4). В результате расширенная ММТ (I.20) может быть трансформирована в стандартную (I.I9) путем замены переменных (I.9) , (I.I2), (I.I3). При $\omega_-=0$ модель (I.20) является редукцией системы (I.I5): $\mathcal{L}_3=-u_\eta u_\xi^*+|u|^2+iu^2u^*u_\xi^*$.

Замечание I.I При выбранном нами определении η и ξ через x^μ отождествление $z_+=\eta$, $z_-=\xi$ приводит к "досветовым" солитонам ММТ. Если бы мы положили $z_-=-\xi$, то получили бы тахионные решения мо-

2) Поскольку знак перед нелинейностью несуществен /I0/, отождествления $\psi_2=\pm\psi_1$ эквивалентны.

дели, задаваемой лагранжианом (I.18) с $i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi \to -i\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi$. Поскольку оба типа солитонов связаны тривиальной заменой $\xi \to -\xi$, мы ограничиваемся рассмотрением первого случая.

I.2 Вторая массивная спинорная модель в M^2. Пусть $z_+ = i\eta$, $z_- = -i\xi$ и пусть $\omega_\pm, q_1, \dots, q_4 \in \mathbb{R}$. Вводя ковариантный спинор $\psi = (u, v)^T$,

$$q_1 = u + u^*, \quad q_2 = i(u - u^*), \quad q_3 = i(v - v^*), \quad q_4 = v + v^*, \tag{I.22}$$

мы задаем редукцию $\mathcal{Y}$-системы (I.II) к новой интегрируемой спинорной модели в пространстве Минковского:

$$iu_\xi + v + \omega_-(v^2 - v^{*2})u^* = 0, \quad iv_\eta + u + \omega_+(u^2 - u^{*2})v^* = 0. \tag{I.23}$$

С помощью замены (I.9), (I.I2), (I.I3) можно привести (I.23) к форме ($\omega_\pm = 1$), лагранжевой с лагранжианом

$$\mathcal{L}_4 = iu_\xi u^* + iv_\eta v^* + uv^* + u^*v - \frac{1}{2}(u^2 - u^{*2})(v^2 - v^{*2}), \tag{I.24$'$}$$

либо к форме ($\omega_- = 0$), задаваемой $\mathcal{L}_5 = iu_\eta u_\xi - iu^2 + (u+u^*)^2(uu^*)_\xi + \text{к.с.}$

Впервые на выделенные свойства модели (I.24$'$) обратил внимание В.Е.Ковтун, обнаруживший у нее высший сохраняющийся ток. В ковариантных обозначениях (I.24$'$) выглядит следующим образом ($\tilde\psi \equiv \psi^T\gamma^0$):

$$L_4 = i\bar\psi\gamma_\mu\partial^\mu\psi + \bar\psi\psi + \frac{1}{8}(\tilde\psi\gamma_\mu\psi - \bar\psi\gamma_\mu\psi^*)^2. \tag{I.24$''$}$$

I.3 Евклидова модель Тирринга. В евклидовой области положим $z_+ = z$, $z_- = \varepsilon z^*$, $\varepsilon = \pm 1$. В отличие от M^2-случая, здесь мы не можем ограничиться каким-либо частным выбором ε, скажем $\varepsilon = 1$ (ср. замеч. I.I). Решения системы (I.II) с $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = 1$ не связаны и будут рассматриваться независимо. Обозначим $q_1 = u_1$, $q_2 = \varepsilon v_2^*$, $q_3 = v_1$, $q_4 = u_2^*$ и потребуем, чтобы столбцы $\psi_1 = (u_1, v_1)^T$ и $\psi_2 = (u_2, v_2)^T$ преобразовывались как спиноры группы $O(2)$. Тогда (I.I6) представляет систему двух евклидовых спинорных полей:

$$L_6 = i\vec\psi^\dagger(\gamma_\mu \otimes \sigma_1)\partial_\mu\vec\psi + \vec\psi^\dagger(\mathcal{E}_\varepsilon^2 \otimes \sigma_1)\vec\psi + \frac{\varepsilon}{8}\{[\vec\psi^\dagger(\gamma_\mu \otimes \sigma_1)\vec\psi]^2 - [\vec\psi^\dagger(\gamma_\mu \otimes \sigma_2)\vec\psi]^2\}. \tag{1.25}$$

Здесь $\vec\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, $\vec\psi^\dagger = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger)$, $\mathcal{E}_\varepsilon = \mathrm{diag}\{1, \varepsilon^{1/2}\}$. Налагая условие $\tau\psi_2 = \psi_1 \equiv \psi$ ($\tau = \pm 1$), получаем редукцию к евклидовой

ММТ:

$$L_7 = i\psi^\dagger\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \psi^\dagger\mathcal{E}_\varepsilon^2\psi + \frac{\tau\varepsilon}{4}(\psi^\dagger\gamma_\mu\psi)^2. \tag{I.26}$$

Если же мы будем отправляться от $\mathcal{Y}$-системы (I.II) и потребуем

$$\tau q_4^* = q_1 \equiv u, \quad \varepsilon\tau q_2^* = q_3 \equiv v, \quad \omega_+^* = \omega_- \equiv \omega, \quad \tau = \pm 1, \tag{I.27}$$

то получим нелагранжеву модель

$$iu_{z^*} + \varepsilon v + \tau\varepsilon\omega v|u|^2 = 0, \quad iv_z + u + \tau\varepsilon\omega^* u|v|^2 = 0, \tag{I.28}$$

содержащую ММТ как частный случай $\omega = 1$ $[\psi = (u, v)^T]$.

I.4 Вторая спинорная редукция в E^2. Полагая в (I.I4) $q_1 = u - v^*$, $q_2 = -(u + v^*)$, $q_3 = v - u^*$, $q_4 = u^* + v$, $z_+ = z$, $z_- = -z^*$, мы получаем новую спинорную модель в евклидовой области. В ковариантных обозначениях $\psi = (u, v)^T$, $\tilde\psi \equiv \psi^T\gamma_1$, $\bar\psi \equiv \psi^\dagger\gamma_1$, $\gamma_5 = -i\gamma_1\gamma_2$ она имеет вид

$$L_8 = i\psi^\dagger\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \psi^\dagger\gamma_5\psi - \frac{1}{8}(\tilde\psi\gamma_\mu\psi - \bar\psi\gamma_\mu\psi^*)^2.$$

I.5 Уравнения $O(2)$ sine/sinh-Gordon. Введем новые поля $\varphi_1 = e^{-i\vartheta}q_1$ и $\varphi_2 = e^{-i\vartheta}q_4^*$ ($\vartheta = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$), которые будем считать скалярными как в E^2, так и в M^2-случае, а q_2 и q_3 выразим через φ_1 и φ_2^* с помощью первого и четвертого уравнений в (I.II$'$):

$$q_2 = ie^{-i\vartheta}\partial_+\varphi_2^*(1 + \omega_+\varphi_1\varphi_2^*)^{-1}, \quad q_3 = -ie^{-i\vartheta}\partial_-\varphi_1(1 + \omega_-\varphi_1\varphi_2^*)^{-1}. \tag{I.29}$$

Подставляя затем (I.29) в оставшиеся два уравнения, получаем систему двух комплексных скалярных полей, т.е. скалярную формулировку $\mathcal{Y}$-системы (I.II):

$$\begin{gathered}\partial_+\partial_-\varphi_1 + \varphi_1\mathcal{D}_- + \delta\cdot\varphi_1\partial_-\varphi_1\partial_+\varphi_2^*(\mathcal{D}_+\mathcal{D}_-)^{-1} - \omega_-\varphi_2^*\partial_-\varphi_1\partial_+\varphi_1\mathcal{D}_-^{-1} = 0,\\ \partial_+\partial_-\varphi_2 + \varphi_2\mathcal{D}_+^* - \delta^*\cdot\varphi_2\partial_-^*\varphi_1^*\partial_+^*\varphi_2(\mathcal{D}_+^*\mathcal{D}_-^*)^{-1} - \omega_+^*\varphi_1^*\partial_-\varphi_2\partial_+\varphi_2\mathcal{D}_+^{*-1} = 0,\end{gathered} \tag{I.30}$$

где $\delta = \omega_+ - \omega_-$, $\mathcal{D}_\pm = 1 + \omega_\pm\varphi_1\varphi_2^*$. При $\omega_\pm = 1$ модель (I.30) явно лагранжева; лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_9 = \partial_-\varphi_1\partial_+\varphi_2^*(1 + \varphi_1\varphi_2^*)^{-1} - \varphi_1\varphi_2^* + (\text{к.с.}). \tag{I.31}$$

Вначале рассмотрим систему (I.3I) в пространстве Минковского: $z_+=\eta$, $z_-=\xi$. Налагая условие $\tau\varphi_2=\varphi_1\equiv\varphi$, $\tau=\pm 1$, получаем редукцию к комплексным уравнениям sine- и sinh-Gordon /13-15,26/ при $\tau=-1$ и $\tau=1$, соответственно:

$$\mathcal{L}_{10}=\varphi_\xi\varphi^*_\eta(1+\tau|\varphi|^2)^{-1}-|\varphi|^2+(\text{к.с.}). \qquad (I.32)$$

Ниже эти модели мы будем именовать уравнениями $O(2)$ sine/sinh-Gordon $[O(2)SGE]$, с тем, чтобы отличать от второго обобщения модели sine-Gordon, называемого нами уравнением $O(1,1)$ sine-Gordon (п. I.6).

Замечание I.2. Как и в п. I.I, мы ограничиваемся выбором $z_-=\xi$, который приводит к досветовым солитонам $O(2)$ SGE. Подстановка $\xi\to-\xi$ меняет знак массового члена в (I.32), и последние превращаются в тахионы (ср. замеч. I.I).

Перейдем теперь в евклидову область и положим $z_+=z$, $z_-=\varepsilon z^*$, $\varepsilon=\pm 1$. Налагая в (I.30) условия $\tau\varphi_2=\varphi_1\equiv\varphi$, $\omega_+^*=\omega_-\equiv\omega$, получаем (нелагранжево) расширение $O(2)$ SGE, отсутствующее в M^2:

$$\varphi_{zz^*}+\varepsilon\varphi\mathcal{D}-\tau\omega\varphi^*\varphi_z\varphi_{z^*}\mathcal{D}^{-1}+\tau(\omega^*-\omega)\varphi\varphi_z^*\varphi_{z^*}|\mathcal{D}|^{-2}=0, \qquad (I.33)$$

$\mathcal{D}=1+\tau\omega|\varphi|^2$. При $\omega=1$ ур-е (I.33) может быть получено из лагранжиана

$$\mathcal{L}_{10}=\varphi^*_z\varphi_{z^*}\cdot(1+\tau|\varphi|^2)^{-1}-\varepsilon|\varphi|^2. \qquad (I.34)$$

Замечание I.3 Заметим, что в евклидовой области, в силу совпадения редукционных условий ($q_1=\tau q_4^*$, $q_3=\tau\varepsilon q_2^*$) имеет место полная эквивалентность ММТ (I.26) и $O(2)$ SGE (I.34), а также их расширений (I.28) и (I.33). При построении решений обе модели будут рассматриваться параллельно.

При $\varphi=\varphi^*$ лагранжианы (I.32) и (I.34) задают вещественные SGE,

$$\mathcal{L}_{11}=\varphi_\xi\varphi_\eta/(1+\tau\varphi^2)-\varphi^2, \qquad (I.35')$$

и

$$\mathcal{L}_{11}=\varphi_z\varphi_{z^*}/(1+\tau\varphi^2)-\varepsilon\varphi^2 \qquad (I.35'')$$

в M^2 и E^2, соответственно. При $\tau=1$, полагая $\varphi=\sinh f$, имеем $\mathcal{L}_{11}=\partial_+ f\,\partial_- f-\sinh^2 f$. При $\tau=-1$ имеем 2 случая: при $|\varphi|\le 1$, вводя f: $\sin f=\varphi$, получаем $\mathcal{L}_{11}=\partial_+ f\,\partial_- f-\sin^2 f$, а при $|\varphi|\geq 1$ подстановка $\varphi=\pm\cosh f$ приводит к $\mathcal{L}_{11}=\partial_+ f\,\partial_- f+\sinh^2 f$.

I.6 Уравнение sine-Gordon с $O(1,1)$ изотопической симметрией. Заменим $z_+\to iz_+$, $z_-\to -i\varepsilon z_-$ ($\varepsilon=\pm 1$) и потребуем $\omega_\pm=1$, $q_1,\dots,q_4\in\mathbb{R}$. Как в M^2, так и в E^2-случае введем скалярные поля $\varphi^\pm$ и $\varphi_{1,2}$ такие, что $\varphi^-=q_1$, $\varphi^+=q_4$, $\varphi^\pm=\varphi_1\pm\varphi_2$. Исключая, как и в п. I.5, q_2 и q_3 из системы (I.II), имеем новую систему двух вещественных скалярных полей с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{12}=\frac{\partial_+\varphi^+\,\partial\varphi^-}{1+\varphi^+\varphi^-}-\varepsilon\varphi^+\varphi^-=\frac{(\partial_+\vec{\varphi}\cdot\partial\vec{\varphi})}{1+(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})}-\varepsilon(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}). \qquad (I.36)$$

Здесь $\vec{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2)$ принадлежит изотопическому пространству с $O(1,1)$-инвариантным скалярным произведением: $(\vec{\varphi}\cdot\vec{\Phi})\equiv\varphi_1\Phi_1-\varphi_2\Phi_2$. В этой связи систему (I.36) будем называть уравнением $O(1,1)$ SG. Подобно $O(2)$ SGE, оно допускает формулировку в терминах одного комплексного поля [см. (4.7)]. В M^2 уравнение (I.36) может быть расширено до нелагранжевой системы (здесь мы полагаем $z_+=\eta$, $z_-=\xi$ и фиксируем $\varepsilon=1$):

$$\varphi^\pm_{\eta\xi}\mathcal{D}_\pm^{-1}+\varphi^\pm-\omega_\pm\varphi^\pm_\eta\varphi^\pm_\xi\varphi^\mp\mathcal{D}_\pm^{-2}\pm\delta\cdot\varphi^-_\xi\varphi^+_\eta\varphi^\pm\mathcal{D}_\pm^{-2}\mathcal{D}_\mp^{-1}=0, \qquad (I.37)$$

где $\omega_\pm\in\mathbb{R}$, $\delta=\omega_--\omega_+$, $\mathcal{D}_\pm=1+\omega_\pm\varphi^+\varphi^-$. В силу совпадения редукционных условий, уравнения (I.37) эквивалентны уравнениям (I.23), тогда как $O(1,1)$ SGE (I.36) эквивалентно второй массивной спинорной модели (I.24). При $\varphi^+=\tau\varphi^-\equiv\varphi$ ($\tau=\pm 1$) система (I.36) сводится к вещественным SGE (I.35).

2. N-СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Калибровочным преобразованием с матрицей

$$g_s=\mathrm{diag}\{\lambda^{1/2},\lambda^{-1/2}\} \qquad (2.I).$$

линейная задача (I.I), (I.6) приводится к виду [3)]

$$i\partial_\pm\Psi=(\lambda^{\pm 2}A_2+\lambda^{\pm 1}A_1^\pm+A_0^\pm)\Psi\equiv A^\pm\Psi, \qquad (2.2)$$

3) На удобство такого перехода наше внимание обратил А.В.Михайлов. Более общий путь получения "расслоенной" калибровки типа (2.2) (пригодный в случае произвольной полупростой алгебры Ли) описан в /5/.

где $\Psi \in GL(2,\mathbb{C})$, $A_2 = \frac{1}{2}\sigma_3$, $A_0^{\pm} = \frac{1}{2}F^{\pm}\sigma_3$ и

$$A_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^- = \begin{pmatrix} 0 & q_3 \\ q_4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Поскольку условия совместности (I.II) инвариантны относительно такого перехода, "расслоенную" калибровку можно использовать вместо (I.I), (I.6). Преимущество ее при построении решений заключается в том, что она позволяет эффективно учесть специальную форму матриц линейной задачи. В самом деле, линейная задача (2.2) с диагональными $A_2^{\pm}$, $A_0^{\pm}$ и антидиагональными $A_1^{\pm}$ [так что $\sigma_3 A^{\pm}(\lambda)\sigma_3 = A^{\pm}(-\lambda)$] соответствует $\mathbb{Z}_2$-редукции /6/ квадратичного пучка общего вида (с произвольными матричными коэффициентами). Следовательно, многообразие $\{\Psi(\lambda)\}$ фундаментальных решений задачи (2.2) инвариантно относительно инволютивного преобразования $\Psi(\lambda) \to \sigma_3\Psi(-\lambda)\sigma_3$ [т.е. $\sigma_3\Psi(-\lambda, z_\pm)\sigma_3 = \Psi(\lambda, z_\pm)H(\lambda)$ для некоторой постоянной $H(\lambda) \in GL(2,\mathbb{C})$]. В настоящей работе строится класс солитонных "потенциалов" q_i с нулевыми граничными условиями, для которых $\Psi(\lambda)$ может быть выбрано так, что

$$\sigma_3\Psi(-\lambda)\sigma_3 = \Psi(\lambda). \tag{2.4}$$

Действительно, возьмем $q_i(z_\pm) \equiv 0$ в качестве затравочного решения (I.II) и выберем соответствующее $\Psi(\lambda)$ в виде $\Psi_0(\lambda) = \exp\{-i(\lambda^2 z_+ + \lambda^{-2} z_-)A_2\}$, очевидно удовлетворяющем (2.4). Если "одетые" поля убывают на бесконечности, $q_i(z_\pm) \to 0$, то Ψ может быть выбрано так, что $\Psi(\lambda, z_\pm) \to c\,\Psi_0(\lambda, z_\pm)$, $c \in \mathbb{C}$. $\Psi(\lambda)$ удовлетворяет тогда (2.4) асимптотически, а следовательно, и тождественно.

Процедура "одевания". При построении солитонных решений мы используем идею "метода одевания" Захарова–Шабата–Михайлова, эквивалентного решению рациональной задачи Римана /9,I,6/. Зададим $GL(2,\mathbb{C})$-значную функцию $\chi(\lambda, z_\pm)$ ("одевающую матрицу"), мероморфную по λ, с мероморфной χ^{-1}, регулярную на бесконечности, соотношением

$$\chi(\lambda) = \Psi(\lambda)\Psi_0^{-1}(\lambda). \tag{2.5}$$

Из (2.4) имеем $\sigma_3\chi(-\lambda)\sigma_3 = \chi(\lambda)$, откуда

$$\chi(\lambda) = R\Big(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{N}\frac{P^i}{\lambda-\nu_i} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_3 P^i \sigma_3}{\lambda+\nu_i}\Big), \tag{2.6'}$$

$$\chi^{-1}(\lambda) = \Big(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{N}\frac{Q^i}{\lambda-\mu_i} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_3 Q^i\sigma_3}{\lambda+\mu_i}\Big)R^{-1}, \tag{2.6''}$$

где R, P^i, Q^i – 2x2 матрицы. Т.к. ввиду (2.2) $\det\Psi$ не зависит от $z_\pm$, Ψ всегда можно выбрать так, что $R = \chi(\infty) \in SL(2,\mathbb{C})$. Более того, в силу соотношения $\sigma_3\chi(\infty)\sigma_3 = \chi(\infty)$ R лежит в диагональной подгруппе $\mathbb{C}^* \subset SL(2,\mathbb{C})$: $R = \mathrm{diag}\{\tau, \tau^{-1}\}$. Легко проверить, что при $\omega_- = 0$ $\tau = const$ [см. (2.28), (2.29)] и $\chi(\lambda)$ может быть нормирована <u>канонически:</u> $\chi(\infty) = \mathbb{1}$. Вообще говоря, достаточно построить решения лишь для этого частного случая. Решения для остальных y-систем получаются тогда калибровочным преобразованием (I.9), (I.I2), (I.I3). Однако серьезным недостатком указанных построений явилось бы присутствие в решениях нелокального множителя e^{Θ}. Чтобы избежать этого, мы не станем фиксировать калибровку [а тем самым и нормировку $\chi(\lambda)$], и будем строить решения для всего семейства y-систем одновременно. Другими словами, одновременно с решением для случая $\omega_- = 0$ (который сам по себе представляет лишь ограниченный интерес) будет получено <u>замкнутое</u> выражение для $\tau(z_\pm)$ (или, что т.ж.с., для e^{Θ}).

Мы будем рассматривать случай общего положения: $\nu_i \neq \pm\mu_k$ при $i \neq k$. Приравнивая к нулю вычеты левой части тождества $\chi\chi^{-1} = \mathbb{1}$ в полюсах ν_i, μ_k, получаем

$$P^i\chi^{-1}(\nu_i) = \chi(\mu_i)Q^i = 0, \quad i = 1,\dots,N. \tag{2.7}$$

Без потери общности, выберем вырожденные P^i, Q^k в виде

$$P^i_{AB} = x^i_A t^i_B, \quad Q^i_{AB} = s^i_A y^i_B, \quad A,B = 1,2, \tag{2.8}$$

где $\vec{x}^i, \vec{y}^i, \vec{s}^i, \vec{t}^i \in \mathbb{C}^2$, $i = 1,\dots,N$. Из компонент этих векторов могут быть образованы векторы $|x_A\rangle, |y_A\rangle, |s_A\rangle, |t_A\rangle \in \mathbb{C}^N$. Например, $\langle x_A| \equiv (x_A^1, \dots, x_A^N)$, тогда как $\vec{x}^i \equiv (x_1^i, x_2^i)$. Здесь и ниже малые латинские индексы пробегают от I до N, а заглавные принимают значения I и 2 (отметим также, что $\langle u_A|v_B\rangle \equiv u_A^1 v_B^1 + \dots + u_A^N v_B^N$). Подставив (2.8) в (2.7), нетрудно получить

$$2a_{1,2}|x_{1,2}\rangle = |s_{1,2}\rangle, \quad 2\langle y_{1,2}|a_{2,1} = -\langle t_{1,2}|, \tag{2.9}$$

где $N\times N$ матрицы a_1 и a_2 даются

$$a_1^{ij} = (\nu_j^2-\mu_i^2)^{-1}(\nu_j s_1^i t_1^j + \mu_i s_2^i t_2^j), \quad a_2^{ij} = (\nu_j^2-\mu_i^2)^{-1}(\mu_i s_1^i t_1^j + \nu_j s_2^i t_2^j). \tag{2.10}$$

Эти матрицы удовлетворяют очевидным тождествам

$$|s_1\rangle\langle t_1| = a_1\langle\nu| - |\mu\rangle a_2 \,, \qquad |s_2\rangle\langle t_2| = a_2\langle\nu| - |\mu\rangle a_1 \,, \tag{2.II}$$

где $\langle\nu| \equiv (\nu_1, \ldots, \nu_N)$, $\langle\mu| \equiv (\mu_1, \ldots, \mu_N)$. Из (2.9) следует

$$|x_{1,2}\rangle = \frac{1}{2} a_{1,2}^{-1} |s_{1,2}\rangle \,, \quad \langle y_{1,2}| = -\frac{1}{2}\langle t_{1,2}| a_{2,1}^{-1} \,. \tag{2.I2}$$

<u>Координатная зависимость $\vec{s}^{\,i}, \vec{t}^{\,i}$</u>. Для χ (2.5) линейная задача (2.2) принимает вид

$$i\partial_\pm \chi\cdot\chi^{-1} + \lambda^{\pm 2}[\chi, A_2]\chi^{-1} = \lambda^{\pm 1} A_1^{\pm} + A_0^{\pm} \,. \tag{2.I3$^\pm$}$$

Подставляя (2.6) и (2.8) в (2.I3) и требуя равенства нулю вычетов левой части, получаем ввиду (2.7):

$$(i\partial_\pm + \nu_i^{\pm 2} A_2)\vec{t}^{\,i} = 0 \,, \qquad (i\partial_\pm - \mu_i^{\pm 2} A_2)\vec{s}^{\,i} = 0 \,, \tag{2.I4}$$

откуда находим зависимость $\vec{s}^{\,i}$ и $\vec{t}^{\,i}$ от $z_\pm$:

$$\vec{t}^{\,i} = \exp\{i(\nu_i^2 z_+ + \nu_i^{-2} z_-)A_2\}\vec{m}^{\,i} \,, \quad \vec{s}^{\,i} = \exp\{-i(\mu_i^2 z_+ + \mu_i^{-2} z_-)A_2\}\vec{n}^{\,i} \,, \tag{2.15}$$

где $\vec{m}^{\,i}$ и $\vec{n}^{\,i}$ – постоянные векторы.

<u>Восстановление "потенциалов" $q_i, F^\pm$</u>. После наложения условий (2.I4) на χ и χ^{-1}, выражение $f_-(\lambda) = i\partial_-\chi\cdot\chi^{-1} + \lambda^{-2}[\chi A_2]\chi^{-1}$ в левой части равенства (2.I3$^-$) задает рациональную функцию λ с единственным полюсом в т. $\lambda = 0$. Ниже, разлагая $f_-(\lambda)$ в ряд Лорана в окрестности $\lambda = 0$, мы найдем A_1^- и A_0^- как коэффициенты при λ^{-1} и λ^0, соответственно. С другой стороны, разлагая $f_-(\lambda)$ в бесконечности, мы получим альтернативные выражения для A_1^- и A_0^-. Сравнивая, наконец, два варианта ответов, мы установим ряд соотношений, которые будут затем эффективно использованы. Аналогично поступим и с уравнением (2.I3$^+$).

Вначале отметим элементарное соотношение

$$\det(a + |u_1\rangle\langle u_2|) = \det a + \langle u_2|\mathcal{A}|u_1\rangle \,. \tag{2.I6}$$

Здесь a –любая невырожденная $N\times N$ матрица; $\mathcal{A}$ – матрица, взаимная к a ($\mathcal{A} = \det a\cdot a^{-1}$) и $|u_{1,2}\rangle \in \mathbb{C}^N$. С помощью (2.I6) легко доказывается, что [4]

4) Здесь и далее используются обозначения $\Sigma f_i \equiv f_1 + \ldots + f_N$, $\Pi f_j \equiv f_1\cdot\ldots\cdot f_N$. Индексы $\|$ и $\perp$ указывают на диагональную и антидиагональную части матрицы соответственно.

$$\mathbb{1} - 2\Sigma Q_\|^i \mu_i^{-1} = \Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\sigma_3} , \qquad \mathbb{1} - 2\Sigma P_\|^i \nu_i^{-1} = \Pi\frac{\mu_j}{\nu_j}\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\sigma_3} , \tag{2.I7}$$

где $\Delta_{1,2} \equiv \det a_{1,2}$. Разлагая (2.I3$^\pm$) в т. $\lambda = \infty$, получаем

$$A_1^+ = -2R\sigma_3\Sigma P_\perp^i R^{-1} \tag{2.I8}$$

$$A_0^+ = i\partial_+ R\cdot R^{-1} - 4\sigma_3\Sigma P_\perp^i\,\Sigma Q_\perp^j \tag{2.I9}$$

$$A_1^- = 2i\{\partial_- R\,\Sigma(Q^i + P^i)_\perp + R\,\partial_-\Sigma P_\perp^i\}R^{-1} \tag{2.20}$$

$$A_0^- = i\partial_- R\cdot R^{-1}. \tag{2.2I}$$

С другой стороны, разлагая (2.I3$^\pm$) в т. $\lambda = 0$, имеем

$$A_1^+ = -2i\left\{\Pi\frac{\mu_j}{\nu_j}\partial_+\left[R\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\sigma_3}\right]\Sigma\left(\frac{Q_\perp^i}{\mu_i^2}\right)R^{-1} + \Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\partial_+\left[\Sigma\frac{P_\perp^i}{\nu_i^2}R\right]\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\sigma_3}R^{-1}\right\} \tag{2.22}$$

$$A_0^+ = i\partial_+ R\cdot R^{-1} + i\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\sigma_3}\partial_+(\Delta_2\Delta_1^{-1})^{\sigma_3} \tag{2.23}$$

$$A_1^- = 2\Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}R\sigma_3\Sigma P_\perp^i \nu_i^{-2}(\Delta_1\Delta_2^{-1})^{\sigma_3}R^{-1} \tag{2.24}$$

$$A_0^- = i\partial_-\left[R\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\sigma_3}\right]\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\sigma_3}R^{-1} - 4R\sigma_3\Sigma(P_\perp^i\nu_i^{-2})\Sigma(Q_\perp^j\mu_j^{-2})R^{-1} , \tag{2.25}$$

где были использованы тождества (2.I7). Теперь без труда можно выписать N-солитонное решение системы (I.7)-(I.8), зависящее от произвольного функционального параметра $\tau(z_\pm)$. Обозначив $\langle t_A \nu^{-2}| \equiv (t_A^1\nu_1^{-2}, \ldots, t_A^N\nu_N^{-2})$, $A = 1,2$, находим из (2.I8), (2.I9), (2.2I) и (2.24)

$$\begin{gathered} q_4 = -\Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\tau^{-2}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\langle t_1\nu^{-2}|a_2^{-1}|s_2\rangle \,, \quad q_2 = \tau^{-2}\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle \\ q_3 = \Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\tau^2\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\langle t_2\nu^{-2}|a_1^{-1}|s_1\rangle \,, \quad q_1 = -\tau^2\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle \end{gathered} \tag{2.26}$$

$$F^+ = 2i\frac{\partial_+\tau}{\tau} + 2\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle \,, \qquad F^- = 2i\frac{\partial_-\tau}{\tau} \,. \tag{2.27}$$

<u>Вычисление функции $\tau(z_\pm)$</u>. Для нахождения решений $\mathcal{G}$-системы (I.II), необходимо фиксировать функцию $\tau(z_\pm)$, исходя из условия (I.II$''$). Подставляя (2.26) в (I.II$''$) и сравнивая с (2.27), получаем

$$2i\tau^{-1}\partial_+\tau = -\omega_-\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle \tag{2.28}$$

$$2i\tau^{-1}\partial_-\tau = \omega_-\Pi(\nu_j\mu_j^{-1})^2\langle t_1\nu^{-2}|a_2^{-1}|s_2\rangle\langle t_2\nu^{-2}|a_1^{-1}|s_1\rangle. \tag{2.29}$$

Чтобы найти отсюда $\tau(z_\pm)$ в замкнутом виде, нам потребуются некоторые вспомогательные тождества.

Лемма 2.I Пусть матрицы a_1 и a_2 задаются формулами (2.I0), а A_1 и A_2 обозначают матрицы, взаимные к ним. Тогда для любых $n, \ell \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие соотношения:

$$\langle t_2 \nu^{\ell} | A_2 | s_1 \mu^{-1}\rangle = \Pi(\nu_j \mu_j^{-1}) \langle t_2 \nu^{\ell-1} | A_1 | s_1\rangle, \qquad (2.30)$$

$$\langle t_2 \nu^{-1} | A_2 | s_1 \mu^{n}\rangle = \Pi(\mu_j \nu_j^{-1}) \langle t_2 | A_1 | s_1 \mu^{n-1}\rangle. \qquad (2.3I)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное выражение

(а) $$\mathcal{S} = \Delta_2 + \langle t_2 \nu^{\ell} | A_2 | s_1 \mu^{-1}\rangle$$

и преобразуем его с помощью тождества (2.I6):

$$= \det\left(a_2 + |s_1\mu^{-1}\rangle\langle t_2\nu^{\ell}|\right) = \Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\det\left(|\mu\rangle a_2\langle\nu^{-1}| + |s_1\rangle\langle t_2\nu^{\ell-1}|\right).$$

Применяя первое соотношение из (2.II), получаем теперь $\mathcal{S} = \Pi\nu_j\mu_j^{-1}\cdot \det\left(a_1 - |s_1\rangle\langle t_1\nu^{-1}| + |s_1\rangle\langle t_2\nu^{\ell-1}|\right)$, после чего вновь воспользуемся (2.I6):

$$\mathcal{S} = \Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\left\{\Delta_1 + \langle t_2\nu^{\ell-1} - t_1\nu^{-1}|A_1|s_1\rangle\right\} = \Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\left\{\det\left(a_1 - |s_1\rangle\left\langle\frac{t_1}{\nu}\right|\right) + \langle t_2\nu^{\ell-1}|A_1|s_1\rangle\right\}.$$

Наконец, ввиду (2.II), мы имеем

(в) $$\mathcal{S} = \Pi\frac{\nu_j}{\mu_j}\left\{\Pi\frac{\mu_j}{\nu_j}\Delta_2 + \langle t_2\nu^{\ell-1}|A_1|s_1\rangle\right\}.$$

Сравнивая (а) и (в), получаем (2.30). Тождество (2.3I) доказывается аналогично.

Следствие. Имеют место следующие тождества:

$$\Pi\nu_j\mu_j^{-1}\langle t_2\nu^{-2}|a_1^{-1}|s_1\rangle = \Pi\mu_j\nu_j^{-1}\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\mu^{-2}\rangle \qquad (2.32)$$

$$\Pi\mu_j\nu_j^{-1}\langle t_2\nu|a_2^{-1}|s_1\mu^{-1}\rangle = \Pi\nu_j\mu_j^{-1}\langle t_2\nu^{-1}|a_2^{-1}|s_1\mu\rangle \qquad (2.33)$$

$$\Pi\nu_j\mu_j^{-1}\langle t_1\nu^{-2}|a_2^{-1}|s_2\rangle = \Pi\mu_j\nu_j^{-1}\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\mu^{-2}\rangle \qquad (2.34)$$

Доказательство. Полагая $\ell=-1$ в (2.30) и $n=-1$ в (2.3I) и приравнивая правые части, получаем (2.32). Подобным же образом тождество (2.33) доказывается при сравнении (2.30) для $\ell = 1$ и (2.3I) для $n = 1$. Далее, заметим, что новые тож-

дества порождаются просто перестановкой индексов I $\rightleftarrows$ 2. Например, (2.34) – это "переставленное" тождество (2.32).

Лемма 2.2

$$i\partial_+(\Delta_1\Delta_2^{-1})\Delta_2\Delta_1^{-1} = -\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle \qquad (2.35)$$

$$i\partial_-(\Delta_1\Delta_2^{-1})\Delta_2\Delta_1^{-1} = \langle t_2\nu^{-2}|a_1^{-1}|s_1\rangle\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\mu^{-2}\rangle. \qquad (2.36)$$

Доказательство. Из (2.23) и (2.25) имеем альтернативные представления для $F^{\pm}$:

$$F^{+} = 2i\tau^{-1}\partial_+\tau + 2i\Delta_1\Delta_2^{-1}\partial_+(\Delta_2\Delta_1^{-1})$$

$$F^{-} = 2i(\tau\Delta_2\Delta_1^{-1})^{-1}\partial_-(\tau\Delta_2\Delta_1^{-1}) + 2\langle t_2\nu^{-2}|a_1^{-1}|s_1\rangle\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\mu^{-2}\rangle.$$

Сравнивая их с (2.27), получаем (2.35), (2.36).

Преобразуем теперь равенство (2.36) с помощью (2.34). Сравнивая затем (2.35) и (2.36) с (2.28) и (2.29), мы имеем

Предложение 2.3. Решения (2.26), (2.27) удовлетворяют соотношениям (I.II″) тогда и только тогда, когда с точностью до произвольного постоянного множителя

$$\tau(z_+, z_-) = (\Delta_1\Delta_2^{-1})^{\omega_-/2}. \qquad (2.37)$$

Явные N-солитонные решения. Первым делом отметим следующее элементарное тождество, позволяющее представить решения в форме отношения детерминантов [3]:

$$\langle u_1|a^{-1}|u_2\rangle = \frac{1}{\det a}\begin{vmatrix} 0 & \langle u_1| \\ |u_2\rangle & a \end{vmatrix}. \qquad (2.38)$$

В правой части (2.38) стоит детерминант $(N+1)\times(N+1)$-матрицы, составленной из $N\times N$ матрицы a, N-столбца $|u_2\rangle$ и N-строки $\langle u_1|$. Подставляя теперь (2.37) в (2.26), симметризуя полученные выражения с помощью тождеств (2.32)-(2.34) и используя представление (2.38), мы имеем главный результат этой части [5]:

5) Несмотря на то, что ниже мы не будем каждый раз явно выписывать определителей [как в (2.39)-(2.42)], ввиду соотношения (2.38) все решения следует понимать как отношения детерминантов.

Теорема 2.4. Общее N-солитонное решение $\mathcal{Y}$-системы (I.II) на нулевом фоне имеет следующий вид:

$$q_1 = -\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_-}\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle = -\frac{\Delta_1^{\omega_- -1}}{\Delta_2^{\omega_-}}\left|\begin{array}{c|c} 0 & \langle t_2| \\ \hline |s_1\rangle & a_1\end{array}\right| \quad (2.39)$$

$$q_2 = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\omega_-}\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle = \frac{\Delta_2^{\omega_- -1}}{\Delta_1^{\omega_-}}\left|\begin{array}{c|c} 0 & \langle t_1| \\ \hline |s_2\rangle & a_2\end{array}\right| \quad (2.40)$$

$$q_3 = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\omega_+}\langle \frac{t_2}{\nu}|a_2^{-1}|\frac{s_1}{\mu}\rangle = \frac{\Delta_2^{\omega_+ -1}}{\Delta_1^{\omega_+}}\left|\begin{array}{c|c} 0 & \langle t_2\nu^{-1}| \\ \hline |s_1\mu^{-1}\rangle & a_2\end{array}\right| \quad (2.4I)$$

$$q_4 = -\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_+}\langle \frac{t_1}{\nu}|a_1^{-1}|\frac{s_2}{\mu}\rangle = -\frac{\Delta_1^{\omega_+ -1}}{\Delta_2^{\omega_+}}\left|\begin{array}{c|c} 0 & \langle t_1\nu^{-1}| \\ \hline |s_2\mu^{-1}\rangle & a_1\end{array}\right|. \quad (2.42)$$

Замечание 2.I Если нас интересуют решения системы второго порядка (I.30), то требуется знать лишь q_1 и q_4. В такой ситуации более экономичными оказываются следующие формулы [5]:

$$q_1 = -\prod \frac{\mu_j}{\nu_j}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_- -1}\langle t_2\nu|a_2^{-1}|\frac{s_1}{\mu}\rangle = -\prod\frac{\nu_j}{\mu_j}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_- -1}\langle\frac{t_2}{\nu}|a_2^{-1}|s_1\mu\rangle$$

$$q_4 = -\prod\frac{\nu_j}{\mu_j}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_+ -1}\langle\frac{t_1}{\nu^2}|a_2^{-1}|s_2\rangle = -\prod\frac{\mu_j}{\nu_j}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_+ -1}\langle t_1|a_2^{-1}|\frac{s_2}{\mu^2}\rangle \quad (2.43)$$

Они получаются с помощью тождества (2.30) при $l=\pm 1$, соотношений (2.32) и (2.34).

Замечание 2.2 .Принято считать, что решения в виде отношения детерминантов трудно проверяемы. Для того, чтобы упростить проверку, мы приведем простые замкнутые выражения для входящих в уравнения производных. Рассмотрим вначале альтернативные представления для $q_1,\dots,q_4$:

$$q_1 = -i\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\omega_+}\partial_+\langle\frac{t_2}{\nu}|a_2^{-1}|\frac{s_1}{\mu}\rangle, \quad q_2 = -i\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_+}\partial_+\langle\frac{t_1}{\nu}|a_1^{-1}|s_2\mu^{-1}\rangle,$$

$$q_3 = i\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\omega_-}\partial_-\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle, \quad q_4 = i\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\omega_-}\partial_-\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle, \quad (2.44)$$

следующие из (2.20), (2.22) и (2.37). Сравнивая затем (2.44) с

(2.39)-(2.42), находим необходимые производные:

$$i\partial_-\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle = (\Delta_2\Delta_1^{-1})^2\langle t_2\nu^{-1}|a_2^{-1}|s_1\mu^{-1}\rangle,$$

$$i\partial_-\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle = -(\Delta_1\Delta_2^{-1})^2\langle t_1\nu^{-1}|a_1^{-1}|s_2\mu^{-1}\rangle,$$

$$i\partial_+\langle t_2\nu^{-1}|a_2^{-1}|s_1\mu^{-1}\rangle = (\Delta_1\Delta_2^{-1})^2\langle t_2|a_1^{-1}|s_1\rangle,$$

$$i\partial_+\langle t_1\nu^{-1}|a_1^{-1}|s_2\mu^{-1}\rangle = -(\Delta_2\Delta_1^{-1})^2\langle t_1|a_2^{-1}|s_2\rangle. \quad (2.45)$$

С учетом (2.35), (2.36) и (2.45) проверка решений не составляет труда.
Замечание 2.3 Переопределение $\vec{x}^i\to p_i\vec{x}^i$, $\vec{t}^i\to p_i^{-1}\vec{t}_i$, $\vec{s}^i\to q_i\vec{s}^i$, $\vec{y}^i\to q_i^{-1}\vec{y}_i$, где константы $p_i, q_i\in\mathbb{C}$ оставляет P^i, Q^i, а следовательно и решения, неизменными. Ниже эта инвариантность будет использована для подходящей нормировки $\vec{s}^i$ и $\vec{t}^i$.

3. РАСШИРЕННАЯ МОДЕЛЬ ТИРРИНГА В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

В M^2 положим $z_+=\eta$, $z_-=\xi$. Редукция к расширенной и стандартной ММТ задается ограничениями (I.2I), эквивалентными требованию, чтобы $iA_1^\pm$ и $iA_0^\pm$ принадлежали вещественной форме $su(2)$ алгебры $sl(2,\mathbb{C})$: $(A_1^\pm)^\dagger = A_1^\pm$, $(A_0^\pm)^\dagger = A_0^\pm$. Поскольку в этом случае $(\Psi^{-1}(\lambda^*))^\dagger$ удовлетворяет (2.2) наряду с $\Psi(\lambda)$, на многообразии $\{\Psi(\lambda)\}$ возникает дополнительная инволюция $\Psi(\lambda)\to(\Psi^{-1}(\lambda^*))^\dagger$. Другими словами, существует не зависящая от координат матрица $H(\lambda)$, такая, что $\Psi(\lambda)=(\Psi^{-1}(\lambda^*))^\dagger H(\lambda)$. В терминах χ это соотношение эквивалентно следующему:

$$\chi(\lambda^*;\eta,\xi)^\dagger\chi(\lambda;\eta,\xi) = \Psi_0(\lambda;\eta,\xi)H(\lambda)\Psi_0^{-1}(\lambda;\eta,\xi). \quad (3.I)$$

Для недиагональных H правая часть (3.I) имеет существенные особенности при $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$, в то время как левая часть рациональна по λ. Особенности устраняются только если $H(\lambda)$ -диагональная матрица. Более того, в случае общего положения можно показать, что в действительности H не зависит от λ:
Лемма 3.I Допустим, в соотношении (2.I5) $m_1^i, m_2^i\neq 0$, $i=1,\dots,N$. Тогда H - постоянная матрица.
Доказательство. Из (3.I) вытекает, что $H(\lambda)=\chi(\lambda^*)^\dagger\chi(\lambda)$ -рациональная функция с полюсами в т. $\lambda=\pm\nu_i, \pm\nu_i^*$, регулярная при $\lambda=\infty$. Рассмотрим, например, вычет в т. $\lambda=\nu_i$: $\mathrm{res}\{H(\lambda),\nu_i\}=\vec{P}^i\otimes\vec{t}^i$, где $\vec{P}^i=\chi(\nu_i^*)^\dagger R\,\vec{x}^i$. Вычет не зависит от η и ξ, только если для

любой постоянной $\vec{c} \in \mathbb{C}^2$, вектор $\vec{c}' = \vec{c} \cdot \mathrm{res}\{H(\lambda), \nu_i\}$ – также постоянный. Однако, если $\vec{c}' \neq 0$, то, в силу допущения, выражение $c_1'/c_2' = (m_1^i/m_2^i)\exp\{i(\nu_i^2\eta + \nu_i^{-2}\xi)\}$ зависит от координат. Следовательно, $\vec{c}' = 0$ для любого $\vec{c} \in \mathbb{C}^2$, и вычет равен нулю. $Q.E.D.$

Для диагональной постоянной матрицы H (3.I) приобретает вид $\chi(\lambda) = (\chi^{-1}(\lambda^*))^\dagger H$, откуда, без потери общности, получаем, с учетом (2.6):

$$H = R^\dagger R \,. \tag{3.2}$$

$$\nu_i = \mu_i^* \,, \quad i = 1, \dots, N \tag{3.3}$$

$$H P^i = Q^{i\dagger} H \,, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует $\vec{t}^i = k_i \vec{s}^{i*} H$, $H\vec{x}^i = k_i^{-1}\vec{y}^{i*}$, $k_i \in \mathbb{C}$. В силу замечания 2.3 можно положить $k_i = 1$, $i = 1, \dots, N$. Подставляя в (2.I0) $\vec{s}^{i*}H$ вместо $\vec{t}^i$ и μ_i^* вместо ν_i, обнаруживаем, что $a_1^\dagger = -a_2$ и $\Delta_1^* = (-1)^N \Delta_2$. С помощью (2.37) и (3.2) легко показывается теперь, что $H = \mathbb{1}$, и мы получаем окончательно

$$m_1^i = n_1^{i*} \,, \quad m_2^i = n_2^{i*} \,, \quad i = 1, \dots, N \,. \tag{3.5}$$

Итак, можно сформулировать

Предложение 3.2. Общее N-солитонное решение (расширенной) массивной модели Тирринга (I.20) выделяется из решения $\mathcal{G}$-системы (I.II) наложением условий (3.3) и (3.5).

Представим теперь решения в ковариантном виде. При собственных преобразованиях Лоренца имеем

$$x^\mu \to O^{\mu\nu} x^\nu \,, \quad O^{11} = O^{22} = \cosh\phi \,, \quad O^{12} = O^{21} = \sinh\phi \,. \tag{3.6}$$

В спиновом представлении повороту (3.6) соответствует матрица $S = \exp(-\frac{1}{2}\phi\sigma_3)$; отражению $x^1 \to -x^1$ – матрица $S = \sigma_1$. Будем считать, что столбец $\Psi_i = (\mu_i, \mu_i^{-1})^T/\sqrt{2}$ преобразуется как ковариантный спинор, то есть, если $\mu_i = e^{\beta_i}$, то при $SO(1,1)$ – вращениях (3.6) мы имеем $\beta_i \to \beta_i - \phi/2$, а при инверсии оси x^1 $\beta_i \to -\beta_i$. Далее, удобно ввести единичный пространственно-подобный комплексный вектор $k_i^\mu = -\frac{i}{2}\tilde{\Psi}_i \gamma^\mu \Psi_i \in M^2$ ($\tilde{\Psi}_i = \Psi_i^T \gamma_0$), причем $k_i^0 = -i\,\mathrm{ch}\,2\beta_i$, $k_i^1 = i\,\mathrm{sh}\,2\beta_i$, и скаляр ζ_i^0: $\exp(\zeta_i^0) = n_1^i \mu_i^{-1/2}$. В силу замечания 2.3 можно, не ограничивая общности, наложить условие $n_1^i n_2^i = \mu_i$. В результате получаем N-солитонное решение (расширенной) ММТ в виде

$$\begin{aligned} u = q_1 &= [(-1)^N \Delta_1/\Delta_1^*]^{\omega_-} \langle \exp(\beta^*/2 - \zeta^*) | a_1^{-1} | \exp(\zeta + \beta/2) \rangle \\ v = q_3 &= [(-1)^N \Delta_1^*/\Delta_1]^{\omega_+} \langle \exp(-\beta^*/2 - \zeta^*) | (a_1^\dagger)^{-1} | \exp(\zeta - \beta/2) \rangle , \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\zeta_i \equiv \frac{1}{2}k_i^\mu x_\mu + \zeta_i^0$, а матрица a_1 приобретает вид

$$a_1^{ij} = \cosh(\zeta_i + \zeta_j^* - \beta_i/2 + \beta_j^*/2) / \sinh(\beta_j^* - \beta_i) \,.$$

При $SO(1,1)$-вращениях (3.6) выполняется $a_1 \to a_1$ и $\psi = (u, v)^T$ преобразуется как ковариантный спинор: $\psi \to \exp(-\frac{1}{2}\phi\sigma_3)\psi$. При инверсии $x^1 \to -x^1$ справедливо $a_1 \to a_1^\dagger$ и (для $\omega_\pm = 1$) $\psi \to \sigma_1 \psi$ [6].

Отметим в заключение, что для обычной ММТ $(\omega_\pm = 1)$ N-солитонное решение было впервые получено в /I6/ в отличной от (3.7) (недетерминантной) форме.

4. УРАВНЕНИЕ $O(1,1)$ sine-Gordon И ВТОРАЯ МАССИВНАЯ СПИНОРНАЯ МОДЕЛЬ В M^2

Рассмотрим пространство Минковского и положим $z_+ = i\eta$, $z_- = -i\xi$ (ср. разд. 3). Системы (I.23) и (I.37) возникают при условии вещественности $\omega_\pm$, $q_1, \dots, q_4$. В этом случае матрицы $A_0^\pm$ и $A_1^\pm$ принадлежат $sl(2, \mathbb{R})$, что эквивалентно существованию следующей инволюции на многообразиях $\{\chi(\lambda)\}$ и $\{\chi^{-1}(\lambda)\}$:

$$\chi^*(\lambda^*) = \chi(\lambda) H \,, \quad (\chi^{-1}(\lambda^*))^* = H^{-1}\chi^{-1}(\lambda) \,, \tag{4.I}$$

причем аналогично разд. 3 матрица H диагональна и постоянна. Из (4.I) следует

$$H = \mathrm{diag}\{h, h^*\} = R^* R^{-1} \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \nu_i^* &= \iota_i \nu_{(i)} \,, & m_1^{i*} &= h^* m_1^{(i)} \,; & m_2^{i*} &= \iota_i h^* m_2^{(i)} \,, \\ \mu_i^* &= \gamma_i \mu_{[i]} \,, & n_1^{i*} &= h^* n_1^{[i]} \,, & n_2^{i*} &= \gamma_i h\, n_2^{[i]} \,, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$i = 1, \dots, N$; $\iota_i, \gamma_i = \pm 1$. В (4.3) введены две независимые перестановки N чисел: $\{1, \dots, N\} \to \{(1), \dots, (N)\}$ и $\{1, \dots, N\} \to \{[1], \dots, [N]\}$

6) Ниже мы ограничиваемся, для краткости, собственными преобразованиями Лоренца и собственными ортогональными преобразованиями – в M^2 и E^2 соответственно.

(через (i) и $[i]$ обозначены соответствующие образы i), такие, что $((i)) = [[i]] = i \;\; \forall i \in \{1, \dots, N\}$. Наконец, с помощью (4.3), (2.37) и (4.2) вычисляется h :

$$h = \left(\Pi \, r_j \gamma_j\right)^{\omega_- /2} \qquad (4.4)$$

(далее значение h считаем фиксированным). Тем самым мы имеем

Предложение 4.I. Общее N -солитонное решение (расширенной) второй массивной спинорной модели (I.23) и(расширенного) $O(1,1)$ SGE (I.37) выделяется из решения (2.39)-(2.43) $\mathcal{G}$ -системы путем наложения ограничений (4.3)-(4.4).

N -солитонное решение $O(1,1)$ SGE в ковариантной форме

Ниже мы ограничиваемся случаем $\omega_\pm = 1$. Введем два лоренцевых скаляра, $\exp(\zeta_i^0) = n_1^i$ и $\exp(z_i^0) = (m_2^i)^{-1}$ и два единичных вектора, k_i^μ и q_i^μ , таких, что $k_i^0 = \frac{1}{2}(\mu_i^2 - \mu_i^{-2})$, $k_i^1 = -\frac{1}{2}(\mu_i^2 + \mu_i^{-2})$, $q_i^0 = \frac{1}{2}(\nu_i^{-2} - \nu_i^2)$, $q_i^1 = \frac{1}{2}(\nu_i^2 + \nu_i^{-2})$. Ввиду замечания 2.3, можно потребовать выполнения условий $n_1^i n_2^i = v_i \mu_i$ и $m_1^i m_2^i = \delta_i \nu_i$, где $v_i = \{\pm 1$ для $i = [i]$; I для $i \neq [i]\}$ и $\delta_i = \{\pm 1$ для $i = (i)$; I для $i \neq (i)\}$. Тогда, обращаясь к выражениям (2.43) для $q_1 = \varphi^-$ и $q_4 = \varphi^+$, получаем [5]:

$$\varphi^+ = \Pi \frac{\mu_j}{\nu_j} \langle e^{z} \delta | b_2^{-1} | v e^{-\zeta} \rangle, \quad \varphi^- = \Pi \frac{\mu_j}{\nu_j} \langle e^{-z} | b_2^{-1} | e^{\zeta} \rangle . \qquad (4.5)$$

Здесь $b_2^{ij} = (\delta_j e^{\zeta_i + z_j} + v_i e^{-\zeta_i - z_j}) / (\nu_j^2 \mu_i^{-2} - 1)$ и $\zeta_i = \frac{1}{2} k_i^\mu x_\mu + \zeta_i^0$, $z_i = \frac{1}{2} q_i^\mu x_\mu + z_i^0$. Учитывая соотношение $\nu_j^2 \mu_i^{-2} = (q_j^\mu + \epsilon^{\mu\nu} q_{j\nu}) k_{i\mu}$, легко убедиться в том, что решение (4.5) инвариантно относительно преобразований Лоренца (3.6) [6].

Односолитонное решение. При $N = 1$, вводя $e^{\tilde\zeta} \equiv \delta_1^{-1/2} v_1^{-1/2} \exp(-z_1^0 - \zeta_1^0)$, $e^{\tilde z} \equiv \delta_1^{1/2} v_1^{-1/2} \exp(z_1^0 - \zeta_1^0)$, $e^{\alpha} \equiv i \mu_1 \nu_1$, $e^{\beta} \equiv i \mu_1 \nu_1^{-1}$, решение (4.5) можно представить в виде

$$\varphi^\pm = i \cosh\beta \, \frac{\exp\{\pm[\sinh\beta(\cosh\alpha \cdot x^0 + \sinh\alpha \cdot x^1) + \tilde z]\}}{\cosh\{\cosh\beta(\sinh\alpha \cdot x^0 + \cosh\alpha \cdot x^1) + \tilde\zeta\}}, \qquad (4.6)$$

где, ввиду (4.3)-(4.4) справедливо $e^{\alpha *} = -\tau\tilde\tau e^{\alpha}$, $e^{\beta *} = -\tau\tilde\tau e^{\beta}$, $e^{\tilde\zeta *} = \tilde\tau e^{\tilde\zeta}$, $e^{\tilde z *} = \tau e^{\tilde z}$ (мы обозначили $\gamma_1 v_1 \delta_1 \equiv \tau$, $r_1 v_1 \delta_1 \equiv \tilde\tau$). Поскольку при $\tilde\tau = 1$ выполняется $\mathrm{Im}\,\tilde\zeta = 0$, знаменатель (4.6) нигде в нуль не обращается, и солитон регулярен в конечной части плоскости (x^0, x^1). При $\tilde\tau = -1$, наоборот, выражение (4.6) обращается в бесконечность в некоторой конечной точке. Далее, в общем случае $\sinh\beta \neq 0$ и решение, вдобавок, неограничено при $|x^0| \to \infty$, либо $|x^1| \to \infty$. Для того, чтобы убедиться в том, что формула (4.6) действительно описывает локализованный объект, удобно перейти к новым переменным.

Именно, при $\tau = 1$ решение (4.6) удовлетворяет неравенству $\varphi^+ \varphi^- \geq 0$, и мы можем ввести комплексное поле $\varphi = \rho e^{i\vartheta}$ такое, что $\rho \equiv (\varphi^+ \varphi^-)^{1/2}$ и $\vartheta = \operatorname{arc\,tanh}[(\varphi^+ - \varphi^-)/(\varphi^+ + \varphi^-)]$. При $\tau = -1$ для (4.6) справедливо $\varphi^+ \varphi^- \leq 0$, а ρ и ϑ можно задать так: $\rho \equiv (-\varphi^+ \varphi^-)^{1/2}$, $\vartheta \equiv \operatorname{arc\,tanh}[(\varphi^+ + \varphi^-)/(\varphi^+ - \varphi^-)]$. В новых переменных лагранжиан (I.36) принимает вид

$$\mathcal{L}_{12} = \varphi_\eta \varphi_\xi \varphi^* \varphi^{-1} (1 + \tau|\varphi|^2)^{-1} - |\varphi|^2 + (\text{к.с.}), \; \tau = \pm 1, \qquad (4.7')$$

или, в ковариантных обозначениях $[\, J_\mu = i(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) \,]$

$$L_{12} = \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{1 + \tau|\varphi|^2} - |\varphi|^2 - \frac{1}{2} \frac{J_\mu^2}{|\varphi|^2 (1 + \tau|\varphi|^2)} . \qquad (4.7'')$$

В терминах поля φ решение (4.6) быстро убывает при $|x^1| \to \infty$ или при $|x^0| \to \infty$. Это обстоятельство позволяет говорить о солитонах $O(1,1)$ SGE как о частицеподобных объектах [другой способ удостовериться в локализованности решения (4.6) заключается в вычислении плотностей законов сохранения]. При $\tau\tilde\tau = -1$ солитон описывает досветовую "частицу", а при $\tau\tilde\tau = 1$ - тахион.

Вещественное SGE . Существует важный подкласс решений (4.5), остающихся конечными как при $|x^0| \to \infty$, так и при $|x^1| \to \infty$. Он задается требованием $\tau\varphi^+ = \varphi^- \equiv \varphi \;\; (\tau = \pm 1)$ и удовлетворяет обычным вещественным уравнениям SG (I.35′).

Предложение 4.2 Общее N -солитонное решение вещественных уравнений sine/sinh – Gordon (I.35′) выделяется из решения (4.5) уравнения $O(1,1)$ SGE при наложении условий

$$\gamma_i = i\mu_i \Rightarrow k_i^\mu = q_i^\mu \;, \quad \exp(\zeta_i^0) = \tau^{1/2} i^{N+1} \exp(z_i^0), \quad v_i = \delta_i \tag{4.8}$$

<u>Доказательство.</u> При редукции (4.3)-(4.4) тождество (2.33) приобретает вид

$$\langle e^{-z}\gamma^{-2} | b_2^{-1} | \mu^2 e^{\zeta} \rangle = \Pi\left(\frac{\mu_j}{\gamma_j}\right)^2 \langle e^{-z} | b_2^{-1} | e^{\zeta} \rangle. \tag{4.9}$$

С другой стороны, из уравнений (4.8) вытекает $b_2^{ij} = -\mu_i^2 \delta_i b_2^{ji} \gamma_j^{-2} \delta_j$, и, следовательно, для φ^+, например, справедливо $\varphi^+ = \tau i^N \langle e^{-z}\gamma^{-2} | b_2^{-1} | \mu^2 e^{\zeta}\rangle$. Воспользовавшись (4.9), получаем отсюда $\varphi^+ = \tau(-i)^N \langle e^{-z} | b_2^{-1} | e^{\zeta}\rangle = \tau\varphi^-$. Q.E.D.

Комбинируя (4.8) с (4.3)-(4.4), N - солитонное решение вещественных SGE (I.35′) легко привести к следующему окончательному виду [5]:

$$\varphi = \langle e^{-z} | b_2^{-1} | e^{z} \rangle \;, \tag{4.10}$$

где $b_2^{ij} = \{e^{z_i + z_j} - \tau e^{-z_i - z_j}\}/(\mu_i^{-2}\mu_j^2 + 1)$ и $\exp\{(z_i^0)^*\} = \iota_i \exp\{z_{(i)}^0\}$.

5. <u>МАССИВНАЯ МОДЕЛЬ ТИРРИНГА И УРАВНЕНИЕ $O(2)$ sine-Gordon В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ</u>

В E^2 мы полагаем $z_+ = z$, $z_- = \varepsilon z^*$, $\varepsilon = \pm 1$. Редукция к (расширенному) $O(2)$ SGE (I.33) и, одновременно, к расширенной ММТ (I.28) задается условиями (I.27), индуцирующими следующие связи на матрицы линейной задачи:

$$(A_1^-)^\dagger = \tau \mathcal{E}^2 A_1^+ \quad , \quad (A_0^-)^\dagger = \varepsilon A_0^+ \;, \tag{5.1}$$

где $\mathcal{E} = diag\{1, \sqrt{\varepsilon}\}$. В отличие от случаев, разобранных выше, каждое из условий (5.I) связывает две различные матрицы. В результате обсуждаемая редукция не может быть задана путем ограничения на какую-либо вещественную форму алгебры $sl(2, \mathbb{C})$; тем не менее, решения для нее извлекаются прежним образом. Из (5.I) следует существование диагональной матрицы H, такой, что

$$\chi(\lambda) = \mathcal{E}^{-1} [\chi^{-1}(\tau\sqrt{\varepsilon}/\lambda^*)]^\dagger H \;, \tag{5.2}$$

причем в случае общего положения $(m_1^i, m_2^i \neq 0 \;,\; i = 1, \dots, N)$ H постоянна. Отметим сразу же, что из (5.2) следует

$$H^\dagger = \mathcal{E}^2 H. \tag{5.3}$$

Далее, требуя совпадения полюсов и вычетов в левой и правой частях равенства (5.2), получаем

$$\gamma_i = \tau\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\mu_i^*)^{-1} \;, \qquad i = 1, \dots, N \tag{5.4}$$

$$R P^i = -\tau\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\mu_i^*)^{-2} \mathcal{E}^{-1} (R^\dagger)^{-1} Q^{i\dagger} \tag{5.5}$$

$$H = \Pi(\mu_j \gamma_j^{-1})^* (\Delta_2^*/\Delta_1^*)^{\sigma_3} \mathcal{E} R R^\dagger \;, \tag{5.6}$$

где было использовано (2.I7). Выражая $\vec{t}^i$ из (5.5): $\vec{t}^i = k_i H \vec{s}^{i*}$, $k_i \in \mathbb{C}$ и подставляя в матрицы (2.I0), для $\delta \equiv arg(\Delta_1\Delta_2^{-1})$ находим с помощью (5.3):

$$e^{i\delta} = \pm(\sqrt{\varepsilon})^N. \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) легко получить $H = \pm\tau^N \Pi|\mu_j|^2 \mathcal{E}^{2N+1} \exp(-\delta\Omega\sigma_3)$, где $\Omega \equiv Im\,\omega$. Наконец, выбирая $k_i = \pm\tau^N \Pi|\mu_j|^{-2}$, $i = 1, \dots, N$ имеем

$$m_1^i = e^{-\delta\Omega} n_1^{i*} \;, \qquad m_2^i = \varepsilon^N \sqrt{\varepsilon}\, e^{\delta\Omega} n_2^{i*} \tag{5.8}$$

(значения $\sqrt{\varepsilon}$ и δ считаем фиксированными). Тем самым доказано

<u>Предложение 5.I</u> N -солитонные решения (расширенных) евклидовой ММТ (I.28) и $O(2)$ SGE (I.33) выделяются из решения $\mathcal{G}$ -системы (I.II) при наложении условий (5.4), (5.7), (5.8).

Приведем N-солитонное решение $O(2)$ SGE к ковариантному виду [6]. Для этого введем единичный вектор $k_\mu^i \in E^2$: $k_1^i = -\frac{i}{2}(\mu_i^2 + \varepsilon\mu_i^{-2})$, $k_2^i = \frac{1}{2}(\mu_i^2 - \varepsilon\mu_i^{-2})$, и скаляр ζ_i^0 : $e^{\zeta_i^0} \equiv \exp(-\frac{1}{2}\delta\Omega) n_1^i$, $i = 1, \dots, N$. В силу замечания 2.3 можно потребовать $n_1^i n_2^i = \mu_i$. Решение для $O(2)$ SGE получается тогда с помощью первой формулы в (2.43) [5]:

$$\varphi = q_1 = \Pi|\mu_j|^2 (\pm\det b_1/\det b_2)^{i\Omega} \langle e^{-\zeta^*} | b_2^{-1} | e^{\zeta} \rangle \;. \tag{5.9}$$

Здесь $\zeta_i = \frac{1}{2} k_\mu^i x^\mu + \zeta_i^0$, а матрицы $b_1 = \tau\sqrt{\varepsilon}\,|\mu\rangle a_1$ и $b_2 = |\mu\rangle a_2$ даются

$$b_1^{ij} = \{(\mu_i\mu_j^*)^{-1}\exp(\zeta_i + \zeta_j^*) + \tau\varepsilon^{N+1}\mu_i\mu_j^* \exp(-\zeta_i - \zeta_j^*)\}/[\varepsilon(\mu_i\mu_j^*)^{-2} - 1]$$

$$b_2^{ij} = \{\exp(\zeta_i + \zeta_j^*) + \tau\varepsilon^N \exp(-\zeta_i - \zeta_j^*)\} / [\varepsilon(\mu_i \mu_j^*)^{-2} - 1] .$$

Поскольку величина $(\mu_i \mu_j^*)^{-2} = (k_\mu^i + i\epsilon_{\mu\nu} k_\nu^i) k_\mu^{j*}$ инвариантна по отношению к $SO(2)$ -вращениям пространства E^2, b_1, b_2 и, наконец, φ являются $SO(2)$ скалярами.

Односолитонное решение при $\Omega \approx 0$ имеет вид

$$\varphi = (\varepsilon|\mu|^{-2} - |\mu|^2) \exp(\zeta - \zeta^*) \{\exp(\zeta + \zeta^*) + \tau\varepsilon \exp(-\zeta - \zeta^*)\}^{-1} .$$

Следовательно, в отличие от M^2-случая (ср. с частью 6), евклидово уравнение $O(2)$ sinh-Gordon [уравнение (I.34) при $\tau = 1$] обладает как сингулярными $(\varepsilon = -1)$, так и регулярными $(\varepsilon = 1)$ солитонами.

Редукция к вещественным евклидовым SGE. При $\omega = 1$ вещественные решения в (5.9) удовлетворяют обычным SGE (I.35″). Чтобы выделить вещественные φ, вспомним, прежде всего, тождество (2.33). При условиях (5.4), (5.8) оно имеет вид

$$\langle \mu^{*2} e^{-\zeta^*} | b_2^{-1} | e^{\zeta} \mu^2 \rangle = \varepsilon^{N+1} \langle e^{-\zeta^*} | b_2^{-1} | e^{\zeta} \rangle . \qquad (5.10)$$

Далее, рассмотрим перестановку $\{1, \dots, N\} \to \{(1), \dots, (N)\}$ такую, что $((i)) = i \;\; \forall\, i \in \{1, \dots, N\}$. Если наложить редукционные условия

$$(\mu_i^*)^2 = -\varepsilon \mu_{(i)}^{-2} \Rightarrow k_\alpha^{i*} = k_\alpha^{(i)} , \; \exp(\zeta_i^{0*}) = \varkappa_i i^{N+1} \exp(\zeta_{(i)}^0) , \qquad (5.11)$$

где $\varkappa_i = \pm 1$, то выражение (5.9) упрощается:

$$\varphi = \langle e^{-\zeta^*} | b_2^{-1} | e^{\zeta} \rangle . \qquad (5.12)$$

Заметим также, что $b_2^{ij*} = -\varepsilon \varkappa_{(i)} \mu_{(i)}^{-2} b_2^{(i)(j)} (\mu_{(j)}^*)^{-2} \varkappa_{(j)}$. Пользуясь этим соотношением и тождеством (5.10), легко проверить, что $\varphi = \varphi^*$. Таким образом, имеем

Предложение 5.2 Общее N -солитонное решение вещественных уравнений sine/sinh-Gordon (I.35″) в пространстве E^2 дается выражением (5.12) при условиях (5.11).

Будем говорить, что пара (μ_i, ζ_i^0) соответствует "солитону", если $(i) = i$. Если же $(i) \neq i$, то четверка $(\mu_i, \zeta_i^0, \mu_{(i)}, \zeta_{(i)}^0)$

параметризует "бион". Асимптотически, при $|z|^2 \to \infty$ решение (5.12) распадается на набор "солитонов" и "бионов". Если $\varepsilon = 1$, то из (5.11) следует, что солитонная составляющая отсутствует и (5.12) есть нелинейная суперпозиция исключительно бионов, регулярных при обоих τ . При $\varepsilon = -1$ в (5.12) дают вклад оба типа конституентов, причем солитоны и бионы сингулярны при $\tau = 1$ и регулярны при $\tau = -1$.

В заключение отметим, что в случае $\tau = \varepsilon = -1$ N-солитонное решение вещественного SGE (I.35″) известно в форме Хироты (см. /22/ и содержащиеся там ссылки).

6. УРАВНЕНИЕ $O(2)$ sine-Gordon В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

В пространстве $M^2 (z_+ = \eta, z_- = \xi)$ редукция к уравнениям $O(2)$ sine/sinh-Gordon (I.32) задается наложением условий

$$q_1 = e^{i\vartheta} \varphi , \quad q_4 = e^{-i\vartheta} \tau \varphi^* , \quad \omega_\pm = 1 . \qquad (6.1)$$

$(\vartheta = const \in \mathbb{R})$. Тогда в силу (I.29) автоматически возникают определенные ограничения и на q_2, q_3 . В отличие от евклидова случая, указанные связи не приводят к каким-либо непосредственным алгебраическим соотношениям на матрицы $A_0^\pm$ и $A_1^\pm$. В этой ситуации для выделения из общих формул (2.32)-(2.34) решений, удовлетворяющих редукции (6.1), проще всего исходить из явного вида решений. Из (2.43) имеем

$$q_1 = -\Pi \frac{\mu_j}{\nu_j} \langle t_2 \nu | a_2^{-1} | s_1 \mu^{-1} \rangle , \quad \tau q_4^* = -\tau \Pi \left(\frac{\nu_j}{\mu_j}\right)^* \langle s_2^* | (a_2^\dagger)^{-1} | (t_1 \nu^{-2})^* \rangle .$$

Полагая теперь

$$\mu_i = \nu_i^* , \quad m_1^i = \mu_i^* n_1^{i*} , \quad m_2^i = -\tau \nu_i^{-1} n_2^{i*} , \qquad (6.2)$$

получаем $\langle t_2 \nu | = -\tau \langle s_2^* |$, $| s_1 \mu^{-1} \rangle = | (t_1 \nu^{-2})^* \rangle$, $a_2^\dagger = -a_2$ и, наконец, $q_1 = \tau q_4^*$.

Регулярный метод нахождения редукционных условий. Убедимся, что ограничения (6.2) действительно выделяют наиболее общее N -солитонное решение $O(2)$ SGE. Для доказательства этого факта мы предъявим инволюцию, заданную на многообразии $\{\Psi(\lambda)\}$ и ответственную за обсуждаемую редукцию. Редукционные условия, индуцируемые этой инволюцией, в точности совпадают с (6.2).

Будем отправляться от треугольной калибровки (I.6) с учетом ограничений (6.1), (I.29). С помощью калибровочного преобразования (I.4) с матрицей g_τ,

$$g_\tau = \begin{pmatrix} W & i\tau^{1/2} e^{i\vartheta}\varphi W^{-1} \\ 0 & -i\tau^{1/2}W^{-1}\end{pmatrix}, \quad W = \left(\frac{\varphi \mathcal{D}}{\varphi^*}\right)^{1/4}, \quad \mathcal{D} = 1+\tau|\varphi|^2 \tag{6.3}$$

($\tau^{1/2}$ фиксировано), перейдем к калибровке, в которой матрицы $U_2^\pm$, $U_0^\pm$ имеют следующий вид:

$$\tilde U_0^- = (4i\mathcal{D})^{-1}[\varphi_\xi \varphi^{-1} - \text{к.с.}]\sigma_3, \qquad \tilde U_2^+ = \tfrac12 \sigma_3,$$

$$\tilde U_0^+ = \frac{1}{4i\mathcal D}[(\varphi_\eta\varphi^{-1} + 2\tau\varphi_\eta\varphi^*) - \text{к.с.}]\sigma_3 + \tau^{1/2}\begin{pmatrix}0 & e^{i\vartheta}\varphi_\eta W^{-2}\\ -e^{-i\vartheta}\varphi^*_\eta (W^{-2})^* & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde U_2^- = i\tau^{1/2}\begin{pmatrix}0 & e^{i\vartheta}\varphi(W^2)^* \\ e^{-i\vartheta}\varphi^* W^2 & 0\end{pmatrix} + \left(\tfrac12+\tau|\varphi|^2\right)\sigma_3. \tag{6.4}$$

При $\tau=1$ $[\tau=-1]$ эти матрицы, умноженные на i, принадлежат вещественной форме $su(1,1)$ $[su(2)]$ алгебры $sl(2,\mathbb{C})$: $(\tilde U_2^\pm)^\dagger = \mathcal T \tilde U_2^\pm \mathcal T$, $(\tilde U_0^\pm)^\dagger = \mathcal T\tilde U_0^\pm\mathcal T$ с $\mathcal T = \mathrm{diag}\{1,-\tau\}$. Следовательно, существует матрица $H(\lambda)$ такая, что

$$\tilde\Psi(\lambda;\eta,\xi) = \mathcal T(\tilde\Psi^{-1}(\lambda^*;\eta,\xi))^\dagger H(\lambda). \tag{6.5}$$

С помощью калибровочного преобразования с матрицей $g = g_\tau^{-1} g_s(\lambda)$ вернемся теперь к расслоенной калибровке (2.2)-(2.3). Из соотношения (6.5) следует инволюция

$$\Psi(\lambda;\eta,\xi)\to G^{-1}(\lambda)(\Psi^{-1}(\lambda^*;\eta,\xi))^\dagger = \Psi(\lambda;\eta,\xi)H^{-1}(\lambda). \tag{6.6}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$G(\lambda) \equiv g_s^\dagger(\lambda^*)(g_\tau \mathcal T g_\tau^\dagger)^{-1} g_s(\lambda) = \mathcal D^{-1/2}\begin{pmatrix}\lambda & \varphi\\ \varphi^* & -\tau\lambda^{-1}\end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Аналогично разделу 3, можно показать, что матрица $H(\lambda)$ диагональна. Из уравнения (6.6) при этом получаем

$$G(\lambda)\chi(\lambda;\eta,\xi) = (\chi^{-1}(\lambda^*;\eta,\xi))^\dagger H(\lambda). \tag{6.8}$$

В случае общего положения $m_1^i, m_2^i \neq 0$, $i=1,\dots,N$ рациональная функция

$$H(\lambda) = \chi^\dagger(\lambda^*)\,G(\lambda)\,\chi(\lambda) \tag{6.9}$$

не имеет полюсов при $\lambda = \pm\nu_i$, $\pm\nu_i^*$ (доказательство повторяет доказательство леммы 3.I). Ряд Лорана в окрестности $\lambda=0$ содержит, следовательно, конечное число членов и легко вычисляется из (6.9):

$$H(\lambda) = \mathcal D^{-1/2}|\Delta_1\Delta_2^{-1}|\,\mathrm{diag}\{\lambda, -\tau\prod|\mu_j\nu_j^{-1}|^2\lambda^{-1}\}. \tag{6.I0}$$

Подставляя, наконец, (2.6) и (6.I0) в (6.8) и приравнивая положения полюсов и соответствующие вычеты, получаем редукционные условия (6.2). Тем самым доказано

Предложение 6.I. Общее N-солитонное решение $O(2)$ SGE (I.32) выделяется из решения $\mathcal{G}$-системы при наложении ограничений (6.2).

Для получения решений в ковариантном виде [6], введем единичный пространственно-подобный комплексный вектор $k_i^\mu \in M^2$: $k_i^0 = (-i/2)(\mu_i^2+\mu_i^{-2})$, $k_i^1 = (i/2)(\mu_i^2 - \mu_i^{-2})$ и скаляр ζ_i^0, $\exp(\zeta_i^0) = n_1^i$ $(i=1,\dots,N)$. В силу замечания 2.3 можно положить $n_1^i n_2^i = \mu_i$. N-солитонное решение $O(2)$ SGE переписывается тогда в виде [5]

$$\varphi = \langle e^{-\zeta^*}|b_2^{-1}|e^{\zeta}\rangle, \tag{6.II}$$

где $\zeta_i = \frac12 k_i^\mu x_\mu + \zeta_i^0$ и матрица $b_2 = |\mu\rangle a_2\langle(\mu^{-1})^*|$ дается

$$b_2^{ij} = \{\exp(\zeta_i+\zeta_j^*) - \tau\exp(-\zeta_i-\zeta_j^*)\}/[(\mu_i^{-1}\mu_j^*)^2 - 1] .$$

Для знаменателя имеем $(\mu_i^{-1}\mu_j^*)^2 = (k_j^\mu + \epsilon^{\mu\nu}k_{j\nu})k_{i\mu}$, и, следовательно, решение (6.II) представляет собой скаляр. Отметим, наконец, что при $\tau=-1$ двухсолитонное решение известно в форме Хироты [I5].

В ряде приложений возникает необходимость в замкнутых выражениях для модуля N-солитонного решения. Модуль решения (6.II) может быть представлен в виде

$$|\varphi|^2 = \tau(|\det b_1/\det b_2|^2 - 1), \tag{6.I2}$$

где матрица $b_1 = |\mu\rangle a_1\langle(\mu^{-1})^*|$ дается

$$b_1^{ij} = \{\mu_i^{-1}\mu_j^*\exp(\zeta_i+\zeta_j^*) - \tau(\mu_i^{-1}\mu_j^*)^{-1}\exp(-\zeta_i-\zeta_j^*)\}/[(\mu_i^{-1}\mu_j^*)^2-1] .$$

Чтобы получить представление (6.I2), заметим, что $\det G(\lambda) = -\tau$, $\det H(\lambda) = -\tau\mathcal D^{-1}|\Delta_1\Delta_2^{-1}|^2$ и $\det\chi(\infty)=1$. Сравнивая затем детерминанты левой и правой части (6.8) при $\lambda=\infty$, имеем (6.I2).

Вещественное SGE. Выделим теперь решения для вещественных SGE (I.35′). На этом этапе удобно зафиксировать $\vartheta=\pi/4$. Условие $\varphi=\varphi^*$ равносильно тогда равенствам $(A_1^\pm)^*=\mp i A_1^\pm$, $(A_0^\pm)^*=-A_0^\pm$, которые индуцируют дополнительную инволюцию на многообразии $\{\Psi(\lambda)\}$: $\Psi(\lambda)\to\Psi^*(i\lambda^*)\in\{\Psi(\lambda)\}$. Следуя стандартному рецепту, получаем

Предложение 6.2. Общее N-солитонное решение вещественных SGE (I.35′) выделяется из решения (6.II) $O(2)$ SGE при наложении условий

$$\mu_i^*=i\mu_{(i)} \Rightarrow k_i^{\alpha\,*}=k_{(i)}^{\alpha}, \quad \exp(\zeta_i^{0\,*})=\varkappa_i \exp(\zeta_{(i)}^{0}), \qquad (6.I3)$$

где $\varkappa_i=\pm 1$ и скобки обозначают любую перестановку индексов, такую, что $((i))=i \;\; \forall\, i\in\{1,\dots,N\}$. Величины с индексами i, для которых $(i)=i$, относятся собственно к солитонам, тогда как при $(i)\neq i$ пары $\{i,(i)\}$ нумеруют бионы (бридеры).

N-солитонное решение вещественного уравнения sine-Gordon разумеется, хорошо известно (см. напр. /I7-20/). Что же касается уравнения sinh-Gordon, то аналогичные результаты получены в /21/.

7. О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ И НЕНУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим комплексифицированные уравнения sine-Gordon в пространстве M^2, т.е. системы (I.32) и (4.7). Как уже говорилось (замечание I.2), знак массового члена в соответствующих лагранжианах может быть изменен на противоположный просто путем замены $\xi\to-\xi$. После указанной замены досветовые солитоны превращаются в тахионы и наоборот, причем граничные условия остаются, естественно, неизменными. В настоящем разделе будет предъявлено ещё одно, менее тривиальное преобразование, позволяющее связать решения уравнений с разными знаками массового члена. В отличие от замены $\xi\to-\xi$, указанное обратимое преобразование решениям с тривиальной асимптотикой $|\varphi|\to 0$ ставит в соответствие решения с граничными условиями $|\tilde\varphi|\to 1$ при $|x^0|$ или $|x^1|\to\infty$, и наоборот. В частности, построенные выше досветовые солитоны, убывающие на бесконечности, переводятся в (досветовые же) кинки.

Удобно переписать уравнение $O(2)$ sine-Gordon,

$$\varphi_{\eta\xi}+\varphi_\eta\varphi_\xi\varphi^*(1-|\varphi|^2)^{-1}+\varphi(1-|\varphi|^2)=0, \qquad (7.I)$$

задаваемое лагранжианом (I.32) с $\tau=-1$, как

$$\rho_{\eta\xi}+\rho(\rho_\eta\rho_\xi-\vartheta_\eta\vartheta_\xi)(1-\rho^2)^{-1}+\varepsilon\rho(1-\rho^2)=0, \qquad (7.2')$$

$$[\vartheta_\eta\rho^2(1-\rho^2)^{-1}]_\xi+[\vartheta_\xi\rho^2(1-\rho^2)^{-1}]_\eta=0. \qquad (7.2'')$$

Здесь $\varepsilon=1$, $\varphi=\rho e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, $\rho>0$. Рассмотрим решения, удовлетворяющие $\rho\le 1$. Ввиду этого неравенства и уравнения (7.2″), можно ввести новые переменные $\tilde\rho$ и $\tilde\vartheta$ с помощью соотношений

$$\tilde\rho=(1-\rho^2)^{\frac12}, \quad \tilde\vartheta_\eta=-\vartheta_\eta\rho^2(1-\rho^2)^{-1}, \quad \tilde\vartheta_\xi=\vartheta_\xi\rho^2(1-\rho^2)^{-1}. \qquad (7.3)$$

Равенства (7.3) определяют $\tilde\vartheta$ с точностью до аддитивной постоянной. Элементарной подстановкой проверяется, что $\tilde\rho$ и $\tilde\vartheta$ удовлетворяют системе (7.2) с $\varepsilon=-1$. Следовательно, можно сформулировать

Предложение 7.I Пусть $\varphi=\rho e^{i\vartheta}$ –решение уравнения (7.I) такое, что $\rho\le 1$. Тогда $\tilde\varphi=\tilde\rho\exp(i\tilde\vartheta)$ с $\tilde\rho$ и $\tilde\vartheta$, задаваемыми формулами (7.3), удовлетворяет уравнению

$$\tilde\varphi_{\eta\xi}+\frac{\tilde\varphi_\eta\tilde\varphi_\xi\tilde\varphi^*}{1-|\tilde\varphi|^2}-\tilde\varphi(1-|\tilde\varphi|^2)=0. \qquad (7.4)$$

Замечание 7.I Согласно формуле (6.I2) с $\tau=-1$, N-солитонное решение (6.II) уравнения (7.I) [распространяющееся на нулевом фоне, т.е. $|\varphi(x^\mu)|\to 0$ при $|x^1|\to\infty$] удовлетворяет $\rho\le 1$. Применяя к нему преобразование (7.3), мы получим решение уравнения (7.4), состоящее из N кинков [$|\tilde\varphi(x^\mu)|\to 1$]. Формула для модуля этого решения следует непосредственно из (6.I2).

В случае $\tau=1$ лагранжиан (I.32) задает уравнение $O(2)$ sinh-Gordon:

$$\varphi_{\eta\xi}-\varphi_\eta\varphi_\xi\varphi^*(1+|\varphi|^2)^{-1}+\varphi(1+|\varphi|^2)=0. \qquad (7.5)$$

Введем новое поле $\tilde\varphi=\tilde\rho\exp(i\tilde\vartheta)$ с помощью соотношений

$$\tilde\rho=(1+\rho^2)^{1/2}, \quad \tilde\vartheta_\eta=-\vartheta_\eta\rho^2(1+\rho^2)^{-1}, \quad \tilde\vartheta_\xi=\vartheta_\xi\rho^2(1+\rho^2)^{-1}. \qquad (7.6)$$

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 7.2 Пусть $\varphi=\rho e^{i\vartheta}$ –решение уравнения (7.5). Тогда $\tilde\varphi=\tilde\rho\exp(i\tilde\vartheta)$ с $\tilde\rho$ и $\tilde\vartheta$, задаваемыми (7.6), удовлетворяет уравнению $O(2)$ sine-Gordon (7.4).

Аналогичные утверждения могут быть доказаны и для модели $O(1,1)$ SG (I.36). Соответствующие уравнения движения выглядят следующим образом (мы полагаем $z_+ = \eta$, $z_- = \xi$):

$$\varphi^{\pm}_{\eta\xi} + \varepsilon\varphi^{\pm}(1+\varphi^+\varphi^-) - \varphi^{\pm}_{\eta}\varphi^{\pm}_{\xi}\varphi^{\mp}(1+\varphi^+\varphi^-)^{-1} = 0. \qquad (7.7)$$

Удобно переписать их в терминах $\mathcal{P} \equiv \varphi^+\varphi^-$ и $Q \equiv \varphi^+/\varphi^-$:

$$\mathcal{P}_{\eta\xi} - \frac{1}{2}[\mathcal{P}_{\eta}\mathcal{P}_{\xi}(1+2\mathcal{P}) - Q_{\eta}Q_{\xi}\mathcal{P}^2Q^{-2}]\mathcal{P}^{-1}(1+\mathcal{P})^{-1} + 2\varepsilon\mathcal{P}(1+\mathcal{P}) = 0 \qquad (7.8)$$

$$[Q_{\eta}Q^{-1}\mathcal{P}(1+\mathcal{P})^{-1}]_{\xi} + [Q_{\xi}Q^{-1}\mathcal{P}(1+\mathcal{P})^{-1}]_{\eta} = 0. \qquad (7.9)$$

Уравнение (7.9) позволяет ввести новые поля, $\tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{Q}$ по формулам

$$\tilde{\mathcal{P}} = -(1+\mathcal{P}),\quad \tilde{Q}_{\eta}\tilde{Q}^{-1} = Q_{\eta}Q^{-1}\frac{\mathcal{P}}{1+\mathcal{P}},\quad \tilde{Q}_{\xi}\tilde{Q}^{-1} = -Q_{\xi}Q^{-1}\frac{\mathcal{P}}{1+\mathcal{P}}. \qquad (7.10)$$

Подставляя равенства (7.10) в уравнение (7.8), мы получаем

Предложение 7.3. Пусть $\varphi^{\pm}$ -решение системы (7.7) при $\varepsilon = 1$. Тогда $\tilde{\varphi}^{\pm}$, где $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\varphi}^+\tilde{\varphi}^-$ и $\tilde{Q} = \tilde{\varphi}^+/\tilde{\varphi}^-$ задаются формулами (7.10), удовлетворяет той же системе (7.7), но при $\varepsilon = -1$.

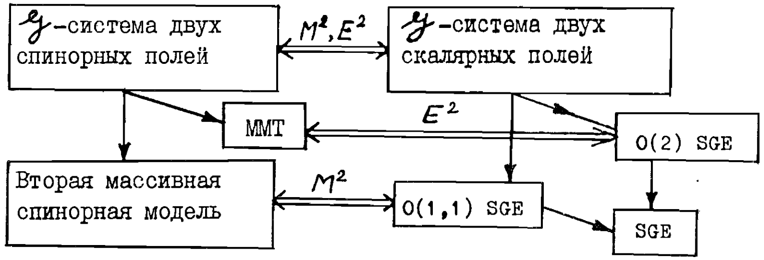
8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ: ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ РАССМОТРЕННЫМИ МОДЕЛЯМИ

Одним из достоинств схемы единого описания релятивистски-инвариантных интегрируемых систем (СХЕОП) является то обстоятельство, что она позволяет глубже понять связь между скалярными и спинорными интегрируемыми системами. Рассмотрим, к примеру, пространство Минковского. Хорошо известно соответствие между (вещественным) уравнением *sine-Gordon* и массивной моделью Тирринга на квантовом уровне /23/, /24/. На классическом же уровне подобная эквивалентность отсутствует хотя бы потому, что ММТ описывается вдвое бо́льшим числом полевых переменных (с учетом порядка уравнений). Можно предположить, однако, что ММТ связана с каким-либо двухполевым обобщением SGE. СХЕОП позволяет снять это подозрение по крайней мере с $O(2)$ и $O(1,1)$ SGE: ММТ и указанные две модели суть различные, неэквивалентные редукции более общей системы.

Ситуация коренным образом меняется в пространстве Евклида. Согласно замечанию I.3, евклидова ММТ (I.26) полностью эквивалентна $O(2)$ SGE (I.34) [чтобы получить (I.33), достаточно выразить v из первого уравнения в (I.28) и подставить во второе]. Взамен, в пространстве

Минковского имеет место соответствие других систем. Именно, как было продемонстрировано в п. I.6, вторая массивная спинорная модель (I.24) эквивалентна уравнению $O(1,1)$ SG (I.36), (4.7). Поскольку вещественное SGE является редукцией последнего, указанное наблюдение доставляет пример спинорной модели, которая на классическом уровне соответствует вещественному SGE (в том смысле, что подкласс решений второй спинорной модели удовлетворяет SGE). Наконец, как в E^2, так и в M^2 -пространстве $\mathcal{J}$ -система (I.14) может быть интерпретирована и как модель (I.17), (I.25) двух спинорных, и как эквивалентная ей система (I.31) двух комплексных скалярных полей.

В заключение приведем для наглядности схему редукций и связей между различными моделями в невырожденном $sl(2,\mathbb{C})$ -случае СХЕОП:



ЛИТЕРАТУРА

I. Захаров В.Е., Михайлов А.В. ЖЭТФ, 74, I953 (I978).
2. Zakharov V.E., Mikhailov A.V., Commun.Math.Phys.74,21 (1980).
3. Barashenkov I.V., Getmanov B.S. Report on the III International Symposium on Selected Problems of Statistical Mechanics, Dubna, August 1984, JINR preprint D17-84-407,37, Dubna (1984).
4. Гетманов Б.С. там же, с. 2I2.
5. Гетманов Б.С. там же, с. 2I7.
6. Mikhailov A.V., Physica 3D,73 (1981).
7. Mikhailov A.V., Olshanetsky M.A., Perelomov A.M., Commun.Math. Phys. 79,473 (1981).
8. Лезнов А.Н., Савельев М.В. ЭЧАЯ, I2, I25 (I98I).
9. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Функ. Анализ и Приложения, I3, I3 (I979).
IO. Герджиков В.С., Иванов М.И., Кулиш П.П. ТМФ, 44, 342 (I980).

II. Кузнецов Е.А., Михайлов А.В. ТМФ, 30, 303 (1977).
I2. David D., J.Math.Phys.25,3424 (1984)
I3. Pohlmeyer K., Commun.Math.Phys. 46,207 (1976) .
I4. Lund F., Regge T., Phys.Rev.D14,1524 (1976) .
I5. Гетманов Б.С. Письма в ЖЭТФ, 25, 132 (1977).
I6. David D., Harnad J., Shnider S., Lett.Math.Phys. 8,27 (1984)
I7. Hirota R., J.Phys.Soc.Jpn.33,1459 (1972) .
I8. Caudrey P.J., Eilbeck J.C., Gibbon J.D. and Bullough R.K., J.Phys. A: Math., Nucl. Gen. 6, L112 (1973).
I9. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. ДАН, 219, 1334 (1974)
20. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Segur H., Phys. Rev. Lett. 30, 1262 (1973).
2I. Pogrebkov A.K., Lett. Math. Phys. 5, 277 (1981).
22. Borisov A.B., Tankeyev A.P., Shagalov A.G., Bezmaternih G.V., Phys. Lett. 111A, 15 (1985).
23. Coleman S., Phys. Rev. D11, 2088 (1975)
24. Kaup D.J. and Newell A.C., Lett.Nuovo Cim. 20, 325 (1977).
25. Fordy A.P. and Gibbons J., Commun. Math. Phys. 77, 21 (1980).
26. Гетманов Б.С. ТМФ, 38, 186 (1979).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1986 года.

Барашенков И.В., Гетманов Б.С. P5-86-628

Многосолитонные решения в схеме единого описания интегрируемых релятивистских массивных полей. Невырожденный $sl(2, C)$ случай

Схема регулярного построения интегрируемых моделей двумерной лоренц-инвариантной лагранжевой массивной теории поля представлена для случая, когда ассоциированная линейная задача формулируется на алгебре $sl(2, C)$. Для системы общего положения — системы двух скалярных либо спинорных полей развита естественная процедура одевания и построено явное N-солитонное решение на нулевом фоне. Из решения системы общего положения извлекаются решения редуцированных систем, включающих как известные, так и новые уравнения, причем не все из этих редукций связаны непосредственно с вещественными формами $sl(2, C)$. Для случая скалярных уравнений предъявлены преобразования типа преобразования Миуры, переводящие друг в друга решения с различными граничными условиями.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Barashenkov I.V., Getmanov B.S. P5-86-628

Multisoliton Solutions in the Scheme for Unified Description of Integrable Relativistic Massive Fields. Non-degenerate sl (2,C) case

A scheme for systematic construction of integrable two-dimensional models of the Lorentz-invariant Lagrangian massive field theory is presented in the case when the associated linear problem is formulated on sl(2,C) algebra. A natural dressing procedure is developed then for the generic system of two (either scalar or spinor) fields inherent in the scheme and explicit N-soliton solution on zero background is calculated. Solutions of reduced systems which include both familiar and new equations are extracted from the solution of the generic system, only part of these reductions being related immediately to sl(2,C) real forms. Finally, in the case of scalar equations the Miura-type transformations are presented relating solutions with different boundary conditions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986