сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-86-604

Е.Х.Христов

О СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С РЕГУЛЯРНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К КОНЕЧНО-ЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛАМ

Обратная задача для периодических граничных условий

1986

Настоящая работа является непосрдственным продолжением статьи [1].

В § 1 получены новые формулы разложения, которые при $\sigma_1 = \sigma_2$, где спектры σ_j определяются формулой /1.4/$_1^*$, являются симплектическими. В § 2 получены явные выражения для сумм и разностей потенциалов $Q_j(x)$ операторов /1.1/$_1$ в предположении, что их матрицы-монодромии совпадают. Отсюда, в частности, вытекает аналог теоремы Левитана [2] для задачи Штурма - Лиувилля, а также важное для наших построений представление конечно-зонных потенциалов.

§ 1. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1.1. Пусть по краевым задачам /1.1/$_1$, /1.2/$_1$ построена система вектор-функций $\{S_n\}$ следующим образом:

$$U_{2n+j} = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j})\Phi(x, \lambda_{2n+j}), \quad V_{2n+j} = \Psi(x, \lambda_{2n+j}) \quad n \in \Delta,\ j=1,2, \qquad /1.1/$$

$$P_n = \ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\Psi(x, \lambda_{(n)}), \quad Q_n = C_{2n+1}C_{2n+2}\dot{\Psi}(x, \lambda_{(n)}) - \dot{\Phi}(x, \lambda_{(n)}) \qquad /1.2/$$

$$n \in \bar{\Delta}.$$

Тогда для любой $f \in L_2^{(2)}$ справедлива формула разложения:

$$f(x) = \underset{M \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, S(M, f; x),$$

$$S(M, f; x) = \sum_{n \in \Delta} \sum_{j=1,2} \frac{1}{2}\{V_{2n+j}(x)[f, U_{2n+j}] - U_{2n+j}(x)[f, V_{2n+j}]\} + \qquad /1.3/$$

$$+ \sum_{n \in \Delta(M) \setminus \Delta} \{Q_n(x)[f, P_n] - P_n(x)[f, Q_n]\},$$

где $\Delta(M) = (-2M+1,\ -2M+2, \ldots, 2M+1,\ 2M+2)$.

---

*Здесь и всюду в дальнейшем ссылки на формулы с индексом внизу относятся к работе [1].

Замечание. Формула /1.3/ формально выводится путем суммирования разложения $/2.8/_1$, если учесть, что из $/1.5/_1$ и $/2.2/_1$ вытекают равенства

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1,2} V_{2n+j}(x)\tilde{U}_{2n+j}(y) - U_{2n+j}(x)\tilde{V}_{2n+j}(y)\} =$$

$$= Q_n(x)\tilde{P}_n(y) - P_n(x)\tilde{Q}_n(y), \qquad \lambda_{(n)} \in \sigma''.$$

Доказательство получаем, как и при доказательстве теоремы 2.1 [1], подсчитав контурный интеграл

$$I(M; f; x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_M} \left(\int_0^\pi G(x, y, \lambda) f(y)\, dy \right) d\lambda, \qquad /1.5/$$

где матрица $G = \frac{1}{2}(G_0 + G_\pi)$, а G_0 и G_π определяются формулами $/1.27/_1$ и $/1.33/_1$ соответственно. Из соотношений /1.4/ следует, что при достаточно больших M интеграл $I(M, f; x) = S(M, f; x)$. Отметим, что сходимость в $L_2^{(2)}$ частичных сумм $S(M, f; x)$ в /1.3/ следует сразу из классической формулы обращения ряда Фурье, так как

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_M} \left(\int_0^\pi \Gamma(x, y, \lambda) f(y)\, dy \right) d\lambda = \begin{pmatrix} s(M, f_1; x) \\ s(M, f_2; x) \end{pmatrix},$$

где $\Gamma = G(Q_j \equiv 0; x, y, \lambda)$,

$$s(M, f_j; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f_j(y)\, dy + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{M} (\sin 2nx \int_0^\pi f_j(y) \sin 2ny\, dy +$$

$$+ \cos 2nx \int_0^\pi f_j(y) \cos 2ny\, dy).$$

Теорема доказана.

Очевидным является следующее

Следствие 1. Система $\{S_n\}$ полна в пространстве $L_2^{(2)}$.

Несколько сложнее устанавливается

Следствие 2. Любая из систем

$$\{S_n\}^{(1)} = \{V_{2n+1}, U_{2n+1}\}_{\lambda_{2n+1} \in \sigma'} \cup \{P_n, Q_n\}_{\lambda_{(n)} \in \sigma''},$$

$$\{S_n\}^{(2)} = \{V_{2n+2}, U_{2n+2}\} \cup \{P_n, Q_n\}$$

полна в $L_2^{(2)}$.

Доказательство. Вычислив, как и в теореме 2.1 [1], контурный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_M} S^{(j)}(x, \lambda)((\lambda - \lambda_{2n+2})\omega_1(\lambda))^{-1} d\lambda, \quad \lambda_{2n+2} \in \sigma', \quad j = 1, 2,$$

где $S^{(j)} = \psi^{(j)} \circ \phi^{(3-j)}$, получаем, с учетом асимптотик $/2.12/_1$, что при $0 < x < \pi$ справедливы представления

$$V_{2n+2}(x) = \sum_{\ell \in \Delta} A^{(1)}_{n,\ell} U_{2\ell+1}(x) + \sum_{\ell \bar{\in} \Delta} \tilde{A}^{(1)}_{n,\ell} P_\ell(x), \qquad /1.6/$$

$$U_{2n+2}(x) = \sum_{\ell \in \Delta} B^{(1)}_{n,\ell} V_{2\ell+1}(x) + \sum_{\ell \bar{\in} \Delta} \tilde{B}^{(1)}_{n,\ell} P_\ell(x), \qquad /1.7/$$

где коэффициенты разложения отличны от нуля,

$A^{(1)}_{n,\ell} = \omega_1(\lambda_{2n+2})\omega_2(\lambda_{2\ell+1})[(\lambda_{2n+2} - \lambda_{2\ell+1})C_{2n+2}\dot{C}_{2\ell+1}]^{-1}$ и т.д.

Следовательно, если $[f, V_{2n+1}] = [f, U_{2n+1}] = [f, P_n] = 0$, то и $[f, V_{2n+2}] = [f, U_{2n+2}] = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Формулы /1.6/ и /1.7/ можно получить непосредственно из разложений $/2.8/_1$ с $f = V_{2n+2}, U_{2n+2}$, вычислив коэффициенты $A^{(1)}_{n\ell}$ и т.д. с помощью тождества $/2.3/_1$.

С помощью $/2.3/_1$ так же легко устанавливается

Лемма 1.1. Для кососкалярных произведений $/1.8/_1$ элементов системы $\{S_n\}^{(1)}$ справедливы следующие соотношения:

$$[V_{2n+1}, V_{2m+1}] = [U_{2n+1}, U_{2m+1}] = 0, \quad [V_{2n+1}, U_{2m+1}] = \delta_{n,m}, \qquad /1.8/$$

$$[P_\ell, P_k] = 0, \quad [Q_\ell, P_k] = \delta_{\ell,k}, \quad [Q_\ell, Q_k] = (1 - \delta_{k,\ell}) A_{k,\ell}, \qquad /1.9/$$

где $n, m \in \Delta$, $\ell, k \bar{\in} \Delta$,

$$A_{k,\ell} = (\lambda_{(k)} - \lambda_{(\ell)})^{-1} (C_{2k+1} C_{2\ell+2} - C_{2k+2} C_{2\ell+1}) (\dot{\omega}_1(\lambda_{(k)}) \dot{\omega}_2(\lambda_{(\ell)}) - \dot{\omega}_2(\lambda_{(k)}) \dot{\omega}_1(\lambda_{(\ell)})) \qquad /1.10/$$

и

$$[V_{2n+1}, P_\ell] = [U_{2n+1}, P_\ell] = 0, \qquad /1.11/$$

$$[Q_\ell, V_{2n+1}] = D_{\ell,2n+1} = \frac{C_{2\ell+1}\dot{\omega}_1(\lambda_{(\ell)})\omega_2(\lambda_{2n+1})}{C_{2n+1}(\lambda_{2n+1} - \lambda_{(\ell)})},$$

$$[Q_\ell, U_{2n+1}] = F_{\ell,2n+1} = \frac{C_{2n+1}C_{2\ell+2}\dot{\omega}_1(\lambda_{(\ell)})}{\dot{\omega}_1(\lambda_{2n+1})(\lambda_{2n+1} - \lambda_{(\ell)})}. \qquad /1.12/$$

Следствие. Если $f(x)$ допускает представление

$$f(x) = \sum_{n \in \Delta} \{a_{2n+1}V_{2n+1}(x) - b_{2n+1}U_{2n+1}(x)\} + \sum_{n \bar{\in} \Delta} \{c_n Q_n(x) - d_n P_n(x)\}, \qquad /1.13/$$

то коэффициенты разложения определяются по формулам

$$c_n = [f, P_n], \quad d_n = [f, Q_n] - \sum_{\substack{m \neq n \\ m \bar{\in} \Delta}} c_m A_{m,n} + \sum_{m \in \Delta} \{a_{2m+1} D_{n,2m+1} - b_{2m+1} F_{n,2m+1}\},$$

$$a_{2n+1} = [f,\ U_{2n+1}] - \sum_{m \in \Delta} c_m F_{m,2n+1}, \qquad /1.14/$$

$$b_{2n+1} = [f,\ V_{2n+1}] - \sum_{m \in \Delta} c_m D_{m,2n+1}.$$

Лемма 1.2. Для того, чтобы вектор-функция $f \in L_2^{(2)}$ допускала представление

$$f(x) = \sum_{n \in \Delta} \{a_{2n+1}^{(N)} V_{2n+1}(x) - b_{2n+1}^{(N)} U_{2n+1}(x)\}, \qquad /1.15/$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{2n+1}^{(N)} = [f,\ U_{2n+1}], \quad b_{2n+1}^{(N)} = [f,\ V_{2n+1}], \qquad /1.16/$$

$$c_n = 0, \quad d_n = [f, Q_n] + \sum_{m \in \Delta} \{a_{2m+1}^{(N)} D_{n,2m+1} - b_{2m+1}^{(N)} F_{n,2m+1}\} = 0.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ представима в виде /1.15/. Тогда из /1.14/ получаем, что условия /1.16/ необходимы для этого представления. Далее, обозначим через $g(x)$ сумму ряда в правой части равенства /1.15/, где коэффициенты определяются по формулам /1.16/. Из леммы 1.1 следует, что $[g, U_{2n+1}] = [f, U_{2n+1}]$,

$[g, V_{2n+1}] = [f, V_{2n+1}]$, $[g, P_n] = [f, P_n] = 0$, $[g, Q_n] = [f, Q_n]$.

Отсюда ввиду полноты системы $\{S_n\}^{(1)}$ получаем $f = g$. Лемма доказана.

В заключение данного параграфа рассмотрим более подробно случай, когда $\Delta = \emptyset$. Введем важный для дальнейших построений оператор

$$\Lambda \equiv \frac{1}{2}(\Lambda_0 + \Lambda_\pi) = (L = \frac{1}{2}(L_0 + L_\pi),\ -\frac{1}{2} v^{(+)}(x)), \qquad /1.17/$$

где операторы Λ_0 и Λ_π определяются из /1.10/$_1$. Оператор Λ действует на функциях

$$f^{(s)} = (f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T,\ \frac{1}{2}(f_1(0) + f_1(\pi))^T \qquad /1.18/$$

по формуле

$$\Lambda f^{(s)}(x) = L f(x) - \frac{1}{4}(f_1(0) + f_1(\pi)) v^{(+)}(x). \qquad /1.19/$$

На основе доказательства леммы 1.1 /1/ легко устанавливается

Лемма 1.3. Оператор Λ с областью определения

$$\mathfrak{D}(\Lambda) = \{f \in C_1^{(2)} \mid f_2(0) = f_2(\pi),\ f_1(\pi) - f_1(0) - [v^{(+)}, f] = 0\} \qquad /1.20/$$

является самосопряженным относительно кососкалярного произведения /1.8/$_1$, т.е.

$$[\Lambda f^{(s)}, g] = [f, \Lambda g^{(s)}], \qquad f, g \in \mathfrak{D}(\Lambda). \qquad /1.21/$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Lambda Y^{(s)}(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda), \quad Y_2(0) = Y_2(\pi), \quad Y_1(\pi) - Y_1(0) - [v^{(+)}, Y] = 0. \qquad /1.22/$$

Справедлива

Лемма 1.4. Функции P_n и Q_n являются собственными функциями краевой задачи /1.22/, т.е. $P_n, Q_n \in \mathfrak{D}(\Lambda)$ и

$$\Lambda P_n^{(s)}(x) = \lambda_n P_n(x), \quad \Lambda Q_n^{(s)}(x) = \lambda_n Q_n(x) \quad (\lambda_n = \lambda_{(n)}). \qquad /1.23/$$

Доказательство этой леммы, которое легко вытекает из леммы 2.1 /1/, здесь опускаем.

Аналогом теорем 1.2 и 2.2 /1/ здесь является

Теорема 1.2. Пусть $\Delta = \emptyset$. Тогда: I. Система $\{P_n, Q_n\}$ является симплектическим базисом в пространстве $L_2^{(2)}$, т.е. для любой $f \in L_2^{(2)}$ имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{Q_n(x)[f, P_n] - P_n(x)[f, Q_n]\}, \qquad /1.24/$$

где

$$[P_n, P_m] = [Q_n, Q_m] = 0, \quad [Q_n, P_m] = \delta_{n,m}. \qquad /1.25/$$

II. Для любой $f \in \mathfrak{D}(\Lambda)$

$$\Lambda f^{(s)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\lambda_n Q_n(x)[f, P_n] - \lambda_n P_n(x)[f, Q_n]\}, \qquad /1.26/$$

т.е. разложение /1.24/ является разложением единицы для оператора Λ.

III. При $\lambda \in \rho(\Lambda) = \mathbf{C} \setminus \sigma = \{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ резольвентный оператор

$$R(f; \lambda, x) \equiv (\Lambda - \lambda I)^{-1} f(x) = \int_0^\pi G(x, y, \lambda) f(y)\, dy, \qquad /1.27/$$

где $G(x, y, \lambda) = 2^{-1}(G_0(x, y, \lambda) + G_\pi(x, y, \lambda))$, а матрицы G_0 и G_π, определяются формулами /1.27/$_1$ и /1.33/$_1$ соответственно.

Доказательство формулы /1.24/ следует из /1.3/. Равенства /1.25/ вытекают из леммы 1.1. Разложение /1.26/ является прямым следствием /1.24/ и леммы 1.4. Равенство /1.27/ можно проверить, следуя вкладкам при доказательстве теоремы 1.2 /1/, либо исходя из спектрального представления

$$R(f; \lambda, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} \{Q_n(x)[f, P_n] - P_n(x)[f, Q_n]\} \qquad /1.28/$$

с последующим применением леммы 1.4 и разложения /1.24/. Теорема доказана.

Следствие. Спектр $\sigma(\Lambda)$ краевой задачи /1.22/ состоит из собственных чисел $\lambda_n = \lambda_{(n)}, n \in Z$, которые являются двухкратными. Каждому λ_n соответствуют собственные функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$.

§ 2. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $v^{(\pm)}(x)$ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНО-ЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим для оператора Дирака $/1.1/_1$ периодическую краевую задачу

$$\ell_j y^{(j)} = \lambda y^{(j)}, \quad y^{(j)}(0) = y^{(j)}(\pi), \quad j = 1,2, \qquad /2.1/$$

а также антипериодическую

$$\ell_j y^{(j)} = \lambda y^{(j)}, \quad y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(\pi). \qquad /2.2/$$

Предположим, что их дискриминанты Хилла совпадают, т.е.

$$\Delta(\lambda) = \Delta_j \overset{\text{def.}}{=} \theta_1^{(j)}(\pi,\lambda) + \phi_2^{(j)}(\pi,\lambda), \qquad /2.3/$$

где $\theta^{(j)}(x, \lambda)$ – решение /1.1/, для которого $\theta^{(j)}(0,\lambda) = (1,0)^T$. Обозначим через $<\mu_{2n}^- < \mu_{2n}^+ <, n \in \mathbf{Z}$ нули уравнения $\Delta(\lambda) = 2$, которые, как хорошо известно /см., например [3]/, определяют собственные значения краевой задачи /2.1/, и через $<\mu_{2n+1}^- \le \mu_{2n+1}^+ <$, $n \in \mathbf{Z}$ нули уравнения $\Delta(\lambda) = -2$, определяющие собственные значения краевой задачи /2.2/.

Имеют место следующие неравенства:

$$\ldots < \mu_{2n-1}^- \le \lambda_{2n-1} \le \mu_{2n-1}^+ < \mu_{2n}^- \le \lambda_{2n} \le \mu_{2n}^+ < \ldots \qquad /2.4/$$

$$\ldots < \mu_{2n-1}^- \le \nu_{2n-1} \le \mu_{2n-1}^+ < \mu_{2n}^- \le \nu_{2n} \le \mu_{2n}^+ < \ldots, \qquad /2.5/$$

где λ_n – собственные значения краевой задачи $\ell y = \lambda y$, $y_1(0) = y_1(\pi) = 0$, а ν_n – собственные значения краевой задачи

$$\ell y = \lambda y, \quad y_2(0) = y_2(\pi) = 0. \qquad /2.6/$$

Потенциал $v(x) = (p(x), q(x))^T$, определяющий матрицу $Q(x)$ в операторе Дирака $/1.1/_1$, будем называть N-зонным, если

$$\mu_{2n}^- = \mu_{2n}^+, \quad \mu_{2n+1}^- = \mu_{2n+1}^+ \quad n \bar{\in} \Delta = (1, 2, \ldots, N). \qquad /2.7/$$

Напомним, что если

$$C_n \equiv \phi_2(\pi, \lambda_n) = \pm 1, \text{ то } \Delta(\lambda_n) = \pm 2, \qquad /2.8/$$

причем

$$\mu_n^- = \lambda_n = \mu_n^+ \iff \Delta(\lambda_n) = \pm 2, \quad \dot{\Delta}(\lambda_n) = 0. \qquad /2.9/$$

Отметим также, что

$$C_n = \frac{1}{2}\Delta(\lambda_n) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2(\lambda_n) - 4}, \quad C_n = (-1)^n |C_n|. \qquad /2.10/$$

Нам понадобится следующая простая

Лемма 2.1. Справедливо равенство

$$\Delta(\lambda) \equiv \theta_1(\pi,\lambda) + \phi_2(\pi,\lambda) = \psi_2(0,\lambda) + \phi_2(\pi,\lambda). \qquad /2.11/$$

Доказательство. Так как $W(\theta, \phi) = 1$, то

$$\psi(x, \lambda) = \theta_1(\pi,\lambda)\,\phi(x,\lambda) - \phi_1(\pi,\lambda)\,\theta(x,\lambda). \qquad /2.12/$$

Полагая здесь $x = 0$, получим $\psi_2(0,\lambda) = \theta_1(\pi,\lambda)$ и т.д.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.1. Пусть заданы две краевые задачи $/1.1/_1$ $/1.2/_1$, для которых выполняются условия /2.3/ и /2.7/. Тогда справедливы представления

$$\delta(x) \equiv B v^{(-)}(x) = \sum_{n \in \Delta} \{\alpha_{2n+1}\Psi(x,\lambda_{2n+1}) - \beta_{2n+1}\Psi(x,\lambda_{2n+1})\}, \qquad /2.13/$$

$$v^{(+)}(x) = \sum_{n \in \Delta} \Big\{ \frac{1 - C_{2n+1}\phi_2^{(2)}(\pi,\lambda_{2n+1})}{\dot{\omega}_1(\lambda_{2n+1})\,\omega_2(\lambda_{2n+1})}\Psi(x,\lambda_{2n+1}) + \qquad /2.14/$$

$$+ \frac{1 - C_{2n+1}^{-1}\psi_2^{(2)}(0,\lambda_{2n+1})}{\dot{\omega}_1(\lambda_{2n+1})\,\omega_2(\lambda_{2n+1})}\Phi(x,\lambda_{2n+1})\Big\}.$$

Доказательство получаем при помощи леммы 1.2. Здесь приведем подробный вывод формулы /2.14/. Интегрируя второе равенство в $/1.18/_1$ с $y^{(j)} = \phi_j, \psi_j$, находим

$$1 - \phi_1^{(1)}(\pi,\lambda)\,\phi_1^{(2)}(\pi,\lambda) + \phi_2^{(1)}(\pi,\lambda)\,\phi_2^{(2)}(\pi,\lambda) = [v^{(+)}, \Phi(\lambda)], \qquad /2.15/$$

$$\psi_1^{(1)}(0,\lambda)\,\psi_1^{(2)}(0,\lambda) + \psi_2^{(1)}(0,\lambda)\,\psi_2^{(2)}(0,\lambda) - 1 = [v^{(+)}, \Psi(\lambda)]. \qquad /2.16/$$

Отсюда при $\lambda_{2n+1} \in \sigma'$ имеем равенства

$$1 - C_{2n+1}\phi_2^{(2)}(\pi,\lambda_{2n+1}) = [v^{(+)}, \Phi(\lambda_{2n+1})],$$

$$C_{2n+1}^{-1}\psi_2^{(2)}(0,\lambda_{2n+1}) - 1 = [v^{(+)}, \Psi(\lambda_{2n+1})], \qquad /2.17/$$

из которых при $\lambda = \lambda_{(n)} \in \sigma''$ вытекает

$$1 - C_{2n+1}C_{2n+2} = [v^{(+)}, \Phi(\lambda_{(n)})], \quad C_{2n+1}^{-1}C_{2n+2}^{-1} - 1 = [v^{(+)}, \Psi(\lambda_{(n)})]. \qquad /2.18/$$

Дифференцируя /2.15/ и /2.16/ по λ при $\lambda = \lambda_{(n)}$, получаем

$$[v^{(+)}, Q_n] = C_{2n+1}(\dot{\psi}_2^{(1)}(0,\lambda_{(n)}) + \dot{\phi}_2^{(2)}(\pi,\lambda_{(n)})) + \qquad /2.19/$$

$$+ C_{2n+2}(\dot{\phi}_2^{(2)}(\pi,\lambda_{(n)}) + \dot{\psi}_2^{(1)}(0,\lambda_{(n)})).$$

Отсюда вследствие /2.8/, /2.9/ и /2.11/ имеем

$$[v^{(+)}, P_n] = [v^{(+)}, Q_n] = 0, \quad n \bar{\in} \Delta. \qquad /2.20/$$

Наконец, из /2.17/ и /2.20/ следует

$$I_{n,2m+1} = a^{(N)}_{2m+1} D_{n,2m+1} - b^{(N)}_{2m+1} F_{n,2m+1} =$$

$$= \frac{\dot\omega_1(\lambda_{(n)})}{\dot\omega_1(\lambda_{2m+1})(\lambda_{2m+1} - \lambda_{(n)})} \{C_{2m+1} + C^{-1}_{2m+1} - \phi^{(2)}_2(\pi,\lambda_{2m+1}) - \psi^{(2)}_2(0,\lambda_{2m+1})\}.$$

Теперь для того, чтобы получить /2.14/, остается воспользоваться разложением /1.15/ с $f = v^{(+)}$, так как из /2.3/ и $\Delta(\lambda_{2m+1}) = C_{2m+1} + C^{-1}_{2m+1}$ вытекает, что $I_{n,2m+1} = 0$.

Формула /2.13/ выводится аналогично, на основе равенств

$$\omega_2(\lambda_{2n+1}) C_{2n+1} = [\delta, \Phi(\lambda_{2n+1})], \quad \omega_2(\lambda_{2n+1}) C^{-1}_{2n+1} = [\delta, \Psi(\lambda_{2n+1})] \qquad /2.21/$$

при $\lambda_{2n+1} \in \sigma'$ и

$$[\delta, \Phi(\lambda_{(n)})] = 0, \quad [\delta, Q_n] = (C_{2n+1} - C_{2n+2})(\dot\omega_1(\lambda_{(n)}) + \dot\omega_2(\lambda_{(n)})) \qquad /2.22/$$

при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$. Так как в этом случае

$$a^{(N)}_{2m+1} = C_{2m+1} \dot\omega_1^{-1}(\lambda_{2m+1}), \quad b^{(N)}_{2m+1} = \omega_2(\lambda_{2m+1}) C^{-1}_{2m+1}, \qquad /2.23/$$

то

$$I_{n,2m+1} \equiv a^{(N)}_{2m+1} D_{n,2m+1} - b^{(N)}_{2m+1} F_{n,2m+1} =$$

$$= \dot\omega_1(\lambda_{(n)}) \omega_2(\lambda_{2m+1}) \dot\omega_1^{-1}(\lambda_{2m+1})(C_{2n+1} - C_{2n+2}). \qquad /2.24/$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Полагая в /2.13/ и /2.14/ $x = 0, \pi$, получаем, с учетом условия /2.3/, что $v^{(\pm)}(0) = v^{(\pm)}(\pi)$, т.е что любой конечно-зонный потенциал является периодической вектор-функцией.

Замечание 1. Из равенств /2.21/-/2.24/ следует, что для представления /2.13/ достаточно потребовать, чтобы

$$C_{2n+1} = C_{2n+2} \qquad n \bar\in \Delta. \qquad /2.25/$$

Замечание 2. Если в формуле /2.13/ сделать предельный переход $\lambda_{2n+2} \to \lambda_{2n+1} = \lambda_{(n)}$, $n \in \Delta$, получаем

$$Bv^{(-)}(x) = \sum_{n \in \Delta} (C_{2n+1} - C_{2n+2})(\dot\omega_1(\lambda_{(n)}) + \dot\omega_2(\lambda_{(n)})) P_n(x). \qquad /2.26/$$

Эта формула является частным случаем следующего более общего утверждения:

Теорема 2.2. Пусть для краевых задач $/1.1/_1$, $/1.2/_1$ выполнено $\sigma_1 = \sigma_2$, т.е. $\lambda^{(1)}_n = \lambda^{(2)}_n = \lambda_n$. Тогда

$$Bv^{(-)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{2n+1} - C_{2n+2})(\dot\omega_1(\lambda_{(n)}) + \dot\omega_2(\lambda_n)) P_n(x). \qquad /2.27/$$

Доказательство получаем сразу из разложения /1.24/ с $f = Bv^{(-)}(x)$, ввиду равенств /2.22/. Теорема доказана.

Следствие /теорема единственности в обратной задаче для оператора $/1.1/_1$, $/1.2/_1$ /. Для того, чтобы $Q_1(x) = Q_2(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda^{(1)}_n = \lambda^{(2)}_n$, $C^{(1)}_n = C^{(2)}_n$, $n \in Z$. При этом $\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как из $Q_1 = Q_2$ следует, что $\phi^{(1)}_1(\pi,\lambda) = \phi^{(2)}_1(\pi,\lambda)$, $\phi^{(1)}_2(\pi,\lambda) = \phi^{(2)}_2(\pi,\lambda)$. Далее, заметив, что при $\lambda \to \infty$ имеем $\omega_j(\lambda) \sim -\sin\pi\lambda$, в силу асимптотики $/1.4/_1$ находим $\dot\omega_j(\lambda_n) \sim (-1)^{n+1}\pi (n \to -\infty)$. Отсюда, так как $P_n(x) \not\equiv 0$ и $\dot\omega_j(\lambda^{(j)}_n) \neq 0$, вытекает неравенство $\dot\omega_1(\lambda_n) + \dot\omega_2(\lambda_n) \neq 0$. Следовательно, если $C_{2n+1} = C_{2n+2}$, то из /2.27/ получаем $v^{(-)}(x) \equiv 0$.

Замечание. Постановка сформулированной выше обратной задачи сходна с предложенной в работе[4] постановкой обратной задачи для оператора Штурма - Лиувилля.

Напомним /см., например,[5,6], что в случае распадающихся граничных условий оператор Дирака определяется однозначно по двум спектрам. Из формулы /2.13/ видно, что условие $\Delta_1(\lambda) = \Delta_2(\lambda)$, из которого следует, что спектры задач /2.1/ и /2.2/ совпадают, не является достаточным для того, чтобы $Q_1(x) = Q_2(x)$. Здесь справедлива

Теорема 2.3. Пусть для краевых задач /1.1/, /1.2/ выполняется условие /2.3/. Тогда:

I. Для того, чтобы $Q_1(x) = Q_2(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_1 = \sigma_2$, где спектры σ_j определяются формулой $/1.4/_1$ и $C_{2n+1} = C_{2n+2}$, где C_{2n+j} определяются по формулам /2.10/.

II. Для любого N-зонного потенциала имеет место разложение

$$v(x) \equiv \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \sum_{n \in \Delta} \{(C^{-2} - 1) 4^{-1} \dot\omega^{-2}(\lambda_n) Q_n(x) - C_n \dot\Delta(\lambda_n) P_n(x)\}, \qquad /2.28/$$

где P_n и Q_n определяются по формулам /1.2/ с $v_1 = v_2 = v$. При этом представление /2.28/ остается справедливым и в случае бесконечнозонных потенциалов, где суммирование ведется по всем n, для которых $\mu^-_n \neq \mu^+_n$.

Доказательство. Утверждение I, которое хорошо известно, получается непосредственно из следствия 1 теоремы 2.2. Представление /2.28/ следует из формулы разложения /1.24/ с $f = v(x)$, в силу равенств /2.8/, /2.18/ и /2.19/. В случае N-зонного потенциала его можно получить из /2.14/ при $\lambda_{2n+2} \to \lambda_{2n+1} = \lambda_n$, $n \in \Delta$. Теорема доказана.

Замечание I. Первая часть теоремы остается справедливой, если вместо совпадения спектров краевых задач /1.1/$_1$, /1.2/$_1$ потребовать совпадения спектров $\{\nu_n^{(j)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ краевых задач /2.6/ с $\ell = \ell_j$, $j = 1,2$.

Замечание II. При изучении периодических задач, связанных с оператором Дирака, удобно рассматривать сразу обе краевые задачи /1.1/$_1$ /1.2/$_1$ и /2.6/, на что указывалось в работе /7/. Таким путем, например, нетрудно вывести соотношения /2.9/. Действительно, из интегральных уравнений для $\dot\phi(x, \lambda)$ и $\dot\theta(x, \lambda)$ легко вытекает формула

$$\dot\Delta(\lambda) = \pi(\phi_1(\pi, \lambda) - \theta_2(\pi, \lambda)). \qquad /2.29/$$

Пусть теперь $\mu_{2n}^{-} = \mu_{2n}^{+}$. Тогда из /2.4/ и /2.5/ имеем $\lambda_{2n} = \nu_{2n} = \mu_{2n}^{\pm}$. Следовательно, $\Delta(\lambda_{2n}) = 2$, $\dot\Delta(\lambda_{2n}) = 0$, так как $\phi_1(\pi, \lambda_{2n}) = \theta_2(\pi, \lambda_{2n}) = 0$. Так же просто устанавливается достаточность этих условий, для того, чтобы $\mu_{2n}^{\pm}$ было двухкратным собственным числом задачи /2.1/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Е.Х. ОИЯИ, P5-86-603, Дубна, 1986.
2. Левитан Б.М. Известия АН СССР, сер. матем. 1978, 42, с.200.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения. Киев, "Наукова думка", 1977.
4. Isaacson E.L., Trubowitz E., Comm.Pure and Appl. Math. 1981, v.34, p.767.
5. Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т. Труды летней школы по спектральной теории операторов и теории представления групп . Изд.Элм, Баку, 1975, с.46.
6. Кирчев К.П., Христов Е.Х. Теория функций, функц. анализ и их приложения. Харьков, "Вища школа", 1982, вып.37, с.48; ОИЯИ, P5-12410, Дубна, 1979.
7. Ma Y., Ablowitz, Studies in Appl. Math, 1981, v.65, p.113.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 сентября 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Христов Е.Х.
Р5-86-604

О симплектических разложениях, связанных с регулярным оператором Дирака, и их приложениях к конечно-зонным потенциалам. Обратная задача для периодических граничных условий

Работа является непосредственным продолжением статьи /1/. Рассмотрены две самосопряженные задачи Дирака:

$$B\frac{d}{dx}y^{(j)} + Q_j(x)\,y^{(j)} = \lambda y^{(j)}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y_1^{(j)}(0) = y_1^{(j)}(\pi) = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_j = \begin{pmatrix} p_j & q_j \\ q_j & -p_j \end{pmatrix}, \qquad y^{(j)} = \begin{pmatrix} y_1^{(j)} \\ y_2^{(j)} \end{pmatrix},$$

для которых дискриминанты Хилла совпадают. Получены разложения для $v^{(\pm)}(x) = (p^{(\pm)} = p_2 \pm p_1,\ q^{(\pm)} = q_2 \pm q_1)$ по произведениям решений этих задач в случае конечно-зонных потенциалов Q_j, откуда вытекает соответствующая теорема единственности в обратной задаче для оператора Дирака с периодическими граничными условиями. Показано, что если эти задачи изоспектральные, то собственные функции краевой задачи

$$\Lambda Y^{(s)}(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda), \quad Y_2(0) = Y_2(\pi), \quad Y_1(\pi) - Y_1(0) - [v^{(+)}, Y] = 0,$$

где $\Lambda = (L = \frac{1}{2}(L_0 + L_\pi),\ -\frac{1}{2}v^{(+)}(x))$, L_0 и L_π – те же, что и в /1/,

$$\Lambda f^{(s)}(x) = Lf(x) - \frac{1}{4}(f_1(0) + f_1(\pi))\,v^{(+)}(x), \quad f^{(s)} = (f(x) = (f_1, f_2)^T,\ \frac{1}{2}(f_1(0) + f_1(\pi)))^T$$

порождают симплектическое разложение в пространстве $L_2^{(2)} \ni f = (f_1, f_2)$, которое является разложением единицы для оператора Λ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Khristov E.Kh.
P5-86-604

On Simplectic Expansions, Associated with Regular Dirac Operator and their Applications for Finite-Gap Potentials. The Inverse Problem for Periodic Boundary Conditions

This paper is the second part of /1/. We consider two selfadjoint Dirac problems

$$B\frac{d}{dx}y^{(j)} + Q_j(x)\,y^{(j)} = \lambda y^{(j)}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad y_1^{(j)}(0) = y_1^{(j)}(\pi) = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_j = \begin{pmatrix} p_j & q_j \\ q_j & -p_j \end{pmatrix}, \quad y^{(j)} = \begin{pmatrix} y_1^{(j)} \\ y_2^{(j)} \end{pmatrix},$$

for which their Hill's discriminants coincide. Expansions for $v^{(\pm)}(x) = (p^{(\pm)} = p_2 \pm p_1,\ q^{(\pm)} = q_2 \pm q_1)$ over products of solutions of this problems for finite-gap potentials are obtained. This leads to a uniqueness theorem in the inverse problem for Dirac operator with periodic boundary conditions. It is shown that if this problems are isospectral, then the eigenfunctions of the problem

$$\Lambda Y^{(s)}(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda), \quad Y_2(0) = Y_2(\pi), \quad Y_1(\pi) - Y_1(0) - [v^{(+)}, Y] = 0,$$

where $\Lambda = (L = 2^{-1}(L_0 + L_\pi),\ -2^{-1}v^{(+)}(x))$, L_0 and L_π are the same as in /1/,

$$\Lambda f^{(s)}(x) = Lf(x) - 4^{-1}(f_1(0) + f_1(\pi))\,v^{(+)}(x), \quad f^{(s)} = (f(x) = (f_1, f_2)^T,\ 2^{-1}(f_1(0) + f_1(\pi)))^T$$

generate in space $L_2^{(2)} \ni f = (f_1, f_2)$ a simplectic expansion formula, which is the spectral expansion for the operator Λ.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986