сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-86-603

Е.Х.Христов

О СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С РЕГУЛЯРНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К КОНЕЧНО-ЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛАМ

Спектральная теория операторов Λ_0 и Λ_π

1986

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изложена спектральная теория операторов, обычно называемых Λ-операторами, для которых построенные в[1] разложения по произведениям решений двух систем Дирака на конечном интервале являются разложениями единицы. Отметим, что Λ-операторы, связанные с системой Дирака на всей оси, были введены в известной работе Абловица, Каупа, Нюела и Сегюра[2], где единообразно построена теория основных нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния[3]. Спектральные свойства этих операторов изучались в работах[4,5]. Аналогичный рассматриваемому здесь круг вопросов для задачи Штурма-Лиувилля на конечном интервале рассматривался в[6].

§ 1. Операторы Λ_0, Λ_π, $R_{0(\pi)} = (\Lambda_{0(\pi)} - \lambda I)^{-1}$

Рассмотрим две самосопряженные краевые задачи, определяемые системой Дирака

$$\ell_j\, y^{(j)} \equiv \left(B\frac{d}{dx} + Q_j(x)\right)y^{(j)} = \lambda y^{(j)} \quad 0 \le x \le \pi \quad j = 1, 2 \qquad /1.1/$$

и граничными условиями

$$y_1^{(j)}(0, \lambda) = y_1^{(j)}(\pi, \lambda) = 0. \qquad /1.2/$$

Здесь $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_j = \begin{pmatrix} p_j(x) & q_j(x) \\ q_j(x) & -p_j(x) \end{pmatrix}$, $y^{(j)} = \begin{pmatrix} y_1^{(j)} \\ y_2^{(j)} \end{pmatrix}$, где вещественные функции* $p_j(x)$, $q_j(x) \in C_1[0, \pi]$. Обозначим через $\phi_j(x, \lambda)$, $\psi_j(x, \lambda)$ решения системы /1.1/, для которых $\phi^{(j)}(0) = \phi^{(j)}(\pi) = (0, 1)^T$, T - транспонирование. Пусть

$$\omega_j(\lambda) = W(\phi^{(j)}, \psi^{(j)}) = \phi_1^{(j)}(\pi, \lambda) = -\psi_1^{(j)}(0, \lambda), \qquad /1.3/$$

где $W(f, g) = f^T B g$, $f = (f_1, f_2)^T$, $g = (g_1, g_2)^T$, - характеристические функции краевых задач /1.1/, /1.2/, определяющие их спектры

$$\sigma_j = \{\lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j} \mid \omega_j(\lambda_{2n+j}) = 0\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad \lambda_n^{(j)} \underset{n\to\infty}{=} n + o(1). \qquad /1.4/$$

Хорошо известно /см., например,[7] /, что собственные числа простые, т.е. $\dot\omega_j(\lambda_{2n+j}) \ne 0$, $\dot{} = \partial/\partial\lambda$. Собственные функции

---

*Если $Q_1(x) = Q_2(x) = Q(x)$, индекс j опускаем.

$\phi^{(j)}(x, \lambda_n^{(j)}) = C_{2n+j}\,\psi^{(j)}(x, \lambda_n^{(j)}),\ C_{2n+j} = \phi_2^{(j)}(\pi, \lambda_n^{(j)}) = \psi_2^{(j)-1}(0, \lambda_{(n)}^{(j)})$

и их нормы

$$\alpha_{2n+j} = \|\phi_{2n+j}^{(j)}\|^{-2} = -C_{2n+j}^{-1}\,\dot\omega_j^{-1}(\lambda_{2n+j}), \qquad /1.6/$$

$$\beta_{2n+j} = \|\psi_{2n+j}^{(j)}\|^{-2} = -C_{2n+j}\,\dot\omega_j(\lambda_{2n+j}), \qquad /1.7/$$

где $(f, g) = \int_0^\pi (f_1(x)\overline{g_1(x)} + f_2(x)\overline{g_2(x)})\,dx$ - скалярное произведение в пространстве $L_2^{(2)}$ вектор- функций $f = (f_1, f_2)$, $f_j \in L_2(0, \pi)$, $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Введем еще кососкалярное произведение

$$[f, g] = (f, Bg) = -[g, f]. \qquad /1,8/$$

Определим, следуя[1], произведение $Y(x, \lambda)$ решений $y^{(1)}(x, \lambda)$ и $y^{(2)}(x, \lambda)$ уравнений /1.1/ по формуле

$$Y(x, \lambda) = y^{(1)}\circ y^{(2)} = (y_1^{(1)}y_1^{(2)} - y_2^{(1)}y_2^{(2)},\ y_1^{(1)}y_2^{(2)} + y_2^{(1)}y_1^{(2)})^T. \qquad /1.9/$$

Введем также операторы

$$\Lambda_{o(\pi)} = (L_{o(\pi)} = \frac{1}{2}B\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\Omega(x)\int_{o(\pi)}^{x}(B\Omega(y))^T dy,\ -\frac{1}{2}v^{(+)}(x)), \qquad /1.10/$$

где

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} -q^{(-)} & p^{(+)} \\ p^{(-)} & q^{(+)} \end{pmatrix},\quad p^{(\pm)} = p_2 \pm p_1,\quad q^{(\pm)} = q_2 \pm q_1,$$

$v^{(+)} = (p^{(+)}, q^{(+)})^T$, которые действуют по формулам

$$\Lambda_{o(\pi)} f^{(o(\pi))}(x) = L_{o(\pi)} f(x) - \frac{1}{2}v^{(+)}(x) f_1(0, (\pi)), \qquad /1.11/$$

а

$$f^{(o(\pi))} = (f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T,\ f_1(0(\pi)))^T. \qquad /1.12/$$

Область определения

$$\mathfrak{D}(\Lambda_o) = \{f \in C_1^{(2)} \mid f_1(\pi) - f_1(0) - [v^{(+)}, f] = 0,\ f_2(0) = 0\}, \qquad /1.13/$$

где $C_1^{(2)} = C_1^{(2)}[0, \pi]$ - пространство непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f(x)$. Так как для любых $f, g \in C_1^{(2)}$ имеет место тождество

$$[\Lambda_o f^{(0)}, g] - [f, \Lambda_\pi f^{(\pi)}] = \frac{1}{2}\{f_1(0)(g_1(\pi) - g_1(0) - [v^{(+)}, g]) + g_1(\pi)(f_1(\pi) - f_1(0) - [v^{(+)}, f]) + f_2(\pi)g_2(\pi) - f_2(0)g_2(0)\}, \qquad /1.14/$$

то справедлива следующая

Лемма 1.1. Оператор Λ_π с областью определения

$$\mathfrak{D}(\Lambda_\pi) = \{f \in C_1^{(2)} \mid f_1(\pi) - f_1(0) - [v^{(+)}, f] = 0,\ f_2(\pi) = 0\} \qquad /1.15/$$

является сопряженным оператору Λ_o относительно кососкалярного произведения /1.18/, т.е.

$$[\Lambda_o f^{(o)}, g] = [f, \Lambda_\pi f^{(\pi)}],\quad f \in \mathfrak{D}(\Lambda_o),\quad g \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi). \qquad /1.16/$$

Введем наряду с $Y(x, \lambda)$ произведение

$$\hat{Y}(x, \lambda) = y^{(1)} * y^{(2)} = (y_2^{(1)}y_1^{(2)} - y_1^{(1)}y_2^{(2)},\ y_1^{(1)}y_1^{(2)} + y_2^{(1)}y_2^{(2)})^T. \qquad /1.17/$$

Связь между $Y(x, \lambda)$ и $\hat{Y}(x, \lambda)$ дается тождеством

$$\frac{d}{dx}\hat{Y}(x, \lambda) = (B\Omega(x))^T Y(x, \lambda), \qquad /1.18/$$

при этом

$$B\frac{d}{dx}Y(x, \lambda) + \Omega(x)\hat{Y}(x, \lambda) = 2\lambda Y(x, \lambda). \qquad /1.19/$$

Отсюда следует, что $Y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$B\frac{d}{dx}Y(x, \lambda) + \Omega(x)\int_{x_0}^{x}(B\Omega(y))^T Y(y, \lambda)\,dy + \Omega(x)\hat{Y}(x_0, \lambda) = 2\lambda Y(x, \lambda). \qquad /1.20/$$

Полагая здесь $x_0 = 0, \pi$, получаем, с учетом равенств $\Phi^T(0, \lambda) = \Psi^T(\pi, \lambda) = (-1, 0)^T$, что имеет место

Теорема 1.1. Построенные по формуле /1.12/ вектор-функции $\Phi^{(o)}(x, \lambda)$ и $\Psi^{(\pi)}(x, \lambda)$, где

$$\Phi(x, \lambda) = \phi^{(1)}\circ\phi^{(2)}(x, \lambda),\quad \Psi(x, \lambda) = \psi^{(1)}\circ\psi^{(2)}(x, \lambda), \qquad /1.21/$$

удовлетворяют уравнениям

$$\Lambda_o\Phi^{(o)}(x, \lambda) \equiv L_o\Phi(x, \lambda) + \frac{1}{2}v^{(+)}(x) = \lambda\Phi(x, \lambda), \qquad /1.22/$$

$$\Lambda_\pi\Psi^{(\pi)}(x, \lambda) \equiv L_\pi\Psi(x, \lambda) + \frac{1}{2}v^{(+)}(x) = \lambda\Psi(x, \lambda). \qquad /1.23/$$

При этом

$$\Phi_2(0, \lambda) = 0,\quad \Phi_1(\pi, \lambda) + 1 - [v^{(+)}, \Phi(\lambda)] = 2\Omega(\lambda), \qquad /1.24/$$

$$\Psi_2(\pi, \lambda) = 0,\quad 1 + \Psi_1(0, \lambda) + [v^{(+)}, \Psi(\lambda)] = 2\Omega(\lambda), \qquad /1.25/$$

где $\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)$. (Вторые равенства в /1.24/ и /1.25/ вытекают из /1.18/ в силу /1.3/).

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\Lambda_o Y^{(o)}(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda),\ Y_2(0, \lambda) = 0,\ Y_1(\pi, \lambda) - Y_1(0, \lambda) - [v^{(+)}, Y(\lambda)] = 0.$$

Введем, следуя[1], матрицу

$$G_0(x,y,\lambda) = \frac{1}{\Omega(\lambda)}\begin{cases} \Phi(x,\lambda)\tilde{\Psi}(y,\lambda), & x < y \le \pi, \\ \sum\limits_{j=1,2} S^{(j)}(x,\lambda)\tilde{S}^{(3-j)}(y,\lambda) - \Psi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(y,\lambda), & 0 \le y < x, \end{cases} \qquad /1.27/$$

где $S^{(j)} = \psi^{(j)} \circ \phi^{(3-j)}$, $\tilde{Y} = (BY)^T$. Справедлива

Теорема 1.2. Матрица G_0 является ядром функции Грина краевой задачи /1.26/, т.е. при $\lambda \in \rho(\Lambda_0) = \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{j=1,2} \sigma_j$ вектор-функция

$$(\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} f(x) \equiv R_0(f; x, \lambda) = \int\limits_0^{\pi} G_0(x,y,\lambda) f(y)\,dy, \qquad /1.28/$$

для всякой $f \in L_2^{(2)}$ удовлетворяет уравнению

$$(\Lambda_0 - \lambda I) R_0(f; x, \lambda) = f(x), \quad R_0(f; x, \lambda) \in \mathfrak{D}(\Lambda_0),$$

$$R_0((\Lambda_0 - \lambda I) f; x, \lambda) = f(x), \quad \forall f \in \mathfrak{D}(\Lambda_0). \qquad /1.29/$$

Доказательство. Положим $H(x) = \Omega(\lambda) R_0(f; x, \lambda)$. Тогда уравнение /1.28/ имеет следующий вид:

$$B\frac{d}{dx}H(x) + \Omega(x)\int\limits_0^x (B\Omega(y))^T H(y)\,dy - v^{(+)}(x) H_1(0) - 2\lambda H(x) = 2\Omega(\lambda) f(x). \qquad /1.30/$$

Из соотношения /1.19/, с учетом равенств /1.3/, вытекает

$$B\frac{d}{dx}H(x) = 2\Omega(\lambda) f(x) + 2\lambda H(x) - \Omega(x)\{\hat{\Phi}(x)\int\limits_x^{\pi} \tilde{\Psi}(y) f(y)\,dy + \sum_{j=1,2} \hat{S}^{(j)}(x)\int\limits_0^x \tilde{S}^{(3-j)}(y) f(y)\,dy - \hat{\Psi}(x)\int\limits_0^x \tilde{\Phi}(y) f(y)\,dy\}. \qquad /1.31/$$

Далее, в силу /1.18/

$$\Omega(x)\int\limits_0^x (B\Omega(y))^T H(y)\,dy = -\Omega(x)\hat{\Phi}(0)\int\limits_0^{\pi} \Psi(y) f(y)\,dy + \int\limits_0^x \{\hat{\Phi}(y)\tilde{\Psi}(y) - \sum_{j=1,2} \hat{S}^{(j)}(y)\tilde{S}^{(3-j)}(y) + \hat{\Psi}(y)\tilde{\Phi}(y)\} f(y)\,dy + \Omega(x)\{\dots\}, \qquad /1.32/$$

где в скобках имеем то же самое выражение, что и в /1.31/. Так как подынтегральная матрица во втором слагаемом в /1.32/ равна нулю, то для того, чтобы получить /1.30/, остается заметить, что выполняется $\Omega(x)\hat{\Phi}(0) = v^{(+)}(x)$. Аналогично проверяются и остальные утверждения теоремы.

Следствие. Матрица

$$G_{\pi}(x,y,\lambda) = -\Omega^{-1}(\lambda)\{\Psi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(y,\lambda)\Theta(x-y) + (\sum_{j=1,2} S^{(j)}(x,\lambda)\tilde{S}^{(3-j)}(y,\lambda) - \Phi(x,\lambda)\tilde{\Psi}(y,\lambda))\Theta(x-y)\} \qquad /1.33/$$

определяет ядро резольвенты, сопряженной к /1.26/ краевой задачи

$$\Lambda_{\pi} Y^{(\pi)}(x,\lambda) = \lambda Y(x,\lambda), \quad Y_2(\pi) = 0, \quad Y_1(\pi) - Y_1(0) - [v^{(+)}, Y] = 0. \qquad /1.34/$$

Замечание. Утверждения леммы 1.1 и теорем /1.1/-/1.3/ остаются справедливыми для любых, возможно, комплекснозначных $p_j(x)$, $q_j(x)$.

§ 2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ Λ_0 И Λ_{π}

Построим по спектрам σ_j, определяемым /1.4/, множества $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\sigma' = \sigma \setminus \sigma''$, где для определенности предполагаем, что $\lambda_n^{(1)} \ne \lambda_n^{(2)}$ при $n \in \Delta = (1, 2, \dots, N < \infty)$ и $\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)}$ при $n \bar{\in} \Delta$. Введем, как в [1], системы $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$, полагая при $n \in \Delta$, $j = 1, 2$

$$U_{2n+j} = \dot{\Omega}^{-1}(\lambda_{2n+j})\Phi(x, \lambda_{2n+j}), \quad V_{2n+j} = \Psi(x, \lambda_{2n+j}) \qquad /2.1/$$

и при $n \bar{\in} \Delta$, $\lambda_{2n+j} = \lambda_{(n)}$,

$$U_{2n+1} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\Phi(x, \lambda_{(n)}), \quad U_{2n+2} = 2\ddot{\Omega}^{-1}(\lambda_{(n)})\dot{\Phi}(x, \lambda_{(n)}),$$

$$V_{2n+1} = \dot{\Psi}(x, \lambda_{(n)}) - \frac{\dddot{\Omega}(\lambda_{(n)})}{3\ddot{\Omega}(\lambda_{(n)})}\Psi(x, \lambda_{(n)}), \quad V_{2n+2} = \Psi(x, \lambda_{(n)}). \qquad /2.2/$$

С помощью вытекающего из уравнений /1.1/ тождества

$$[Y(\lambda), Z(\mu)] = (\mu - \lambda)^{-1} \prod_{j=1,2} W(y^{(j)}(x,\lambda), z^{(j)}(x,\mu))\Big|_{x=0}^{\pi} \qquad /2.3/$$

устанавливаются следующие соотношения биортогональности:

$$[V_n, U_m] = -[U_m, V_n] = \delta_{n,m} \qquad n, m \in Z. \qquad /2.4/$$

Далее из уравнений /1.22/, /1.23/ и равенств /1.4/, /1.24/ и /1.25/ следует

Лемма 2.1. Функции $U_n \in \mathfrak{D}(\Lambda_0)$ и $V_n \in \mathfrak{D}(\Lambda_{\pi})$. При этом, если $\lambda_n \in \sigma'$, то

$$\Lambda_0 U_n^{(0)}(x) = \lambda_n U_n(x), \quad \Lambda_{\pi} V_n^{(\pi)} = \lambda_n V_n(x), \qquad /2.5/$$

а при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$

$$\Lambda_0 U_{2n+1}^{(0)}(x) = \lambda_{(n)} U_{2n+1}(x), \quad \Lambda_0 U_{2n+2}^{(0)}(x) = \lambda_{(n)} U_{2n+2}(x) + U_{2n+1}(x), \qquad /2.6/$$

$$\Lambda_\pi V^{(\pi)}_{2n+1}(x) = \lambda_{(n)} V_{2n+1}(x) + V_{2n+2}(x),\quad \Lambda_\pi V^{(\pi)}_{2n+2}(x) = \lambda_{(n)} V_{2n+2}(x).$$

Основной в этом параграфе является следующая /2.7/

Теорема 2.2 /о спектральных разложениях операторов Λ_0 и Λ_π/.

(I). Для всякой, возможно комплекснозначной, функции $f \in L_2^{(2)}$ справедливы формулы разложения

$$f(x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(x)[f, V_n],\quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(x)[f, U_n], \qquad /2.8/$$

где сходимость рядов имеет место в норме $L_2^{(2)}$ как предел при $M \to \infty$ частичных сумм $S_\pi(M, f; x) = \sum_{n\in\Delta(M)} V_n(x)[f, U_n]$ и $S_0(M, f; x) = \sum_{n\in\Delta(M)} - U_n(x)[f, V_n]$, где $\Delta(M) = (-2M+1, -2M+2, \dots, 2M+2)$.

(II). Для любой $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_0)$

$$\Lambda_0 f^{(0)}(x) = \sum_{\lambda_{2n+j}\in\sigma'} -\lambda_{2n+j} U_{2n+j}(x)[f, V_{2n+j}] - \sum_{\lambda_{(n)}\in\sigma''} \{\lambda_{(n)} U_{2n+1}(x)[f, V_{2n+1}] + (\lambda_{(n)} U_{2n+2}(x) + U_{2n+1}(x))[f, V_{2n+2}]\}, \qquad /2.9/$$

и для любой $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$

$$\Lambda_\pi f^{(\pi)}(x) = \sum_{\lambda_{2n+j}\in\sigma'} \lambda_{2n+j} V_{2n+j}(x)[f, U_{2n+j}] + \sum_{\lambda_{(n)}\in\sigma''} \{\lambda_{(n)} V_{2n+2}(x)[f, U_{2n+2}] + (\lambda_{(n)} V_{2n+1}(x) + V_{2n+2}(x))[f, U_{2n+1}]\}, \qquad /2.10/$$

где ряды сходятся по норме $L_2^{(2)}$.

Доказательство формул разложения /2.8/ вполне аналогично подробно изложенному в [1], здесь наметим лишь его схему. Обозначим через $c_M = (M + \frac{1}{2})\exp(i\phi)$, $0 \le \phi < 2\pi$, окружность в λ-плоскости и рассмотрим контурный интеграл

$$I_0(M, f; x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_M}\left(\int_0^\pi G_0(x, y, \lambda) f(y)\,dy\right) d\lambda. \qquad /2.11/$$

По теореме о вычетах с учетом равенств /1.5/ получаем, что при достаточно больших M выполнено $I_0(M, f; x) = S_0(M, f; x)$. Далее в силу известных асимптотик

$$\phi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -\sin\lambda x \\ \cos\lambda x \end{pmatrix} + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\,x}}{\lambda}\right),\quad \psi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -\sin\lambda(x-\pi) \\ \cos\lambda(x-\pi) \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda} e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(\pi - x)}\right) \qquad /2.12/$$

стандартным образом с помощью леммы Жордана находим, что равномерно по x в любом интервале $\Delta \subset (0, \pi)$ $\lim_{M\to\infty} |S_0(M, f; x) - s_0(M, f; x)| = 0$, и $\lim_{M\to\infty}\sup_{0\le x\le\pi} |S_0(M, f; x) - s_0(M, f; x)| < \infty$. Здесь $s_0(M, f; x)$ сумма ряда, полученного путем подсчета, как и выше, интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_M}\left(\int_0^\pi \Gamma_0(x, y, \lambda) f(y)\,dy\right) d\lambda,$$

где Γ_0 - матрица, которая получается из G_0 при $Q_j(x) \equiv 0$. Явный вид этого ряда приведен в [1] и здесь его опускаем. Отметим лишь, что сходимость $\mathrm{l.i.m.}\, s_0(M\to\infty, f; x) = f(x)$ устанавливается на основе полученного В.А.Ильиным[8] критерия базисности.

Для того, чтобы получить спектральное разложение /2.10/, следует заменить в /2.8/ функцию $f(x)$ на $\Lambda_0 f^{(0)}(x)$, $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_0)$ и учесть, что ввиду лемм 1.1 и 2.1 имеем

$$[\Lambda_0 f^{(0)}, V_{2n+j}] = [f, \Lambda_\pi V^{(\pi)}_{2n+j}] = \lambda_{2n+j}[f, V_{2n+j}], \qquad /2.13/$$

$$[\Lambda_0 f^{(0)}, V_{2n+1}] = [f, \Lambda_\pi V^{(\pi)}_{2n+1}] = \lambda_{(n)}[f, V_{2n+1}] + [f, V_{2n+2}], \qquad /2.14/$$

где в /2.13/ $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$, $\lambda_{2n+2} = \lambda_{(n)} \in \sigma''$, а в /2.14/ $\lambda_{(n)} \in \sigma''$. Теорема доказана.

Следствие. Спектр $\sigma(\Lambda_0) = \mathbf{C}\setminus\rho(\Lambda_0)$ краевой задачи /1.26/ совпадает со спектром $\sigma(\Lambda_\pi)$ краевой задачи /1.34/ и, кроме того, $\sigma(\Lambda_0) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Числа $\lambda_n \in \sigma'$ являются простыми собственными значениями, для которых $U_n^{(0)}$ и $V_n^{(\pi)}$ суть соответствующие собственные функции. Числа $\lambda_{(n)} \in \sigma''$ - двукратные собственные значения, для которых $U^{(0)}_{2n+1}, U^{(0)}_{2n+2}$ и $V^{(\pi)}_{2n+2}, V^{(\pi)}_{2n+1}$ - собственные и присоединенные функции краевых задач /1.26/ и /1.34/ соответственно.

Замечание 1. Из приведенных в лемме 2.1 уравнений для функций U_n и V_n следует, что формулы /2.9/ и /2.10/ можно рассматривать как полученные путем применения операторов Λ_0 и Λ_π почленно к обеим сторонам соответствующих разложений в /2.8/, т.е.

$$\Lambda_0 f^{(0)}(x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_0 U_n^{(0)}(x)[f, V_n],\quad \Lambda_\pi f^{(\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_\pi V_n^{(\pi)}(x)[f, U_n], \qquad /2.15/$$

где при $f \in \mathfrak{D}(\Lambda_0)$ ($f \in \mathfrak{D}(\Lambda_\pi)$) сходимость этих рядов вытекает из соотношений /2.13/ и /2.14/.

Замечание 2. Подсчитав, как в доказательстве теоремы 2.2, контурный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_M}\frac{R_o(f;\ x,\ z)}{\lambda - z}\,dz,$$

находим, что при любом $\lambda \in \rho(\Lambda_o)$ справедливо следующее представление для резольвенты:

$$R_\theta\,(f;\ x,\ \lambda)\ =\sum_{\lambda_{2n+j}\in\sigma'} -\ \frac{\Phi(x,\ \lambda_{2n+j})[f,\ \Psi(\lambda_{2n+j})]}{\dot\Omega\,(\lambda_{2n+j})(\lambda\ -\ \lambda_{2n+j})}\ -$$

$$-\sum_{\lambda_{(n)}\in\sigma''}\frac{2}{\ddot\Omega(\lambda_{(n)})}\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\Phi(x,\ z)}{\lambda\ -\ z}\Big|_{z=\lambda_{(n)}}[f,\ \Psi(\lambda_{(n)})\ +\qquad /2.16/$$

$$+\ \frac{\Phi(x,\lambda_{(n)})}{\lambda-\ \lambda_{(n)}}\Big\{[f,\ \dot\Psi(\lambda_{(n)})]\ -\ \frac{\dddot\Omega(\lambda_{(n)})}{3\ddot\Omega(\lambda_{(n)})}[f,\ \Psi(\lambda_{(n)})]\Big\}\Big\}.$$

Отсюда, применяя оператор $\Lambda_0 - \lambda I$ к обеим частям последнего равенства, получаем, в силу леммы 2.1 и уравнения /1.28/, первую формулу разложения в /2.8/. Второе разложение можно вывести аналогичным образом, исходя из соответствующего спектрального разложения оператора $(\Lambda_\pi - \lambda I)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирчев К.П., Христов Е.Х. Теория функций, функц. анализ и их приложения. Харьков, "Вища школа", 1982, вып.37, с.48-50; Препринт ОИЯИ, Р5-12410, Дубна, 1979.
2. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newel A.C., Segur H., Studies in Appl.Math., 1974, v.63, No.4, p.249-325.
3. Теория солитонов; метод обратной задачи. /Под ред.С.П.Новикова/. "Наука", М., 1980.
4. Kaup D.J. J. of Math. Ann. and Appl.,1976, v.54, No.3, p.845-864.
5. Герджиков В.С., Христов Е.Х. Болгарский физ.журнал, 1980, т.7, № 1, с.28-44; ОИЯИ, Е2-12731, Дубна, 1979.
6. Христов Е.Х. Сообщение ОИЯИ, Р5-84-503, Дубна, 1984.
7. Левитан Б.М., Соргсян И.С. Введение в спектральную теорию. "Наука", М., 1970.
8. Ильин В.А. ДАН СССР, 1976, 227, № 4, с.796.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 сентября 1986 года.

Христов Е.Х. Р5-86-603

О симплектических разложениях, связанных с регулярным оператором Дирака и их приложениях к конечно-зонным потенциалам. Спектральная теория операторов Λ_0 и Λ_π

Показано, что полученное в /1/ разложение по произведениям решений двух самосопряженных задач Дирака

$$B\frac{d}{dx}y^{(j)}\ +\ Q_j(x)y^{(j)}\ =\lambda y^{(j)},\ 0\le x\le\pi,\ y_1^{(j)}(0)=y_1^{(j)}(\pi)=0,\ j=1,2,$$

где

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q_j=\begin{pmatrix}p_j & q_j\\ q_j & -p_j\end{pmatrix},\ y^{(j)}=\begin{pmatrix}y_1^{(j)}\\ y_2^{(j)}\end{pmatrix}.$$

является разложением единицы для следующей краевой задачи:

$$\Lambda_0 Y^{(0)}(x,\lambda)=\lambda Y(x,\lambda),\ Y_2(0)=0,\ Y_1(\pi)-Y_1(0)-[v^{(+)},Y]=0.$$

Здесь $[f,g]=(f,Bg),\ (f,g)=\int_0^\pi (f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)dx,$

$$\Lambda_0=(L_0=\frac{1}{2}B\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\Omega(x)\int_0^x(B\Omega(y)^T dy,\ -\frac{1}{2}v^{(+)}(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}p^{(+)}\\ q^{(+)}\end{pmatrix}),$$

где

$$\Omega(x)=\begin{pmatrix}-q^{(-)} & p^{(+)}\\ p^{(-)} & q^{(+)}\end{pmatrix},\ p^{(\pm)}=p_2\pm p_1,\ \ q^{(\pm)}=q_2\pm q_1,$$

$$\Lambda_0 f^{(0)}(x)=L_0 f(x)-\frac{1}{2}v^{(+)}f_1(0),\ \ f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}.$$

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Перевод О.С.Виноградовой

Khristov E.Kh. P5-86-603

On Simplectic Expansions, Associated with Regular Dirac Operator and their Aplications for Fenite-Gap Potentials. Spectral Theory of Operators Λ_0 and Λ_π

It is shown that the expantion formula from ref./1/ over the products of solutions of two selfadjoint Dirac problems

$$B\frac{d}{dx}y^{(j)}+Q_j(x)y^{(j)}=\lambda y^{(j)},\ 0\le x\le\pi,\ y_1^{(j)}(0)=y_1^{(j)}(\pi)=0,\ j=1,2,$$

where

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q_j=\begin{pmatrix}p_j & q_j\\ q_j & -p_j\end{pmatrix},\ y^{(j)}=\begin{pmatrix}y_1^{(j)}\\ y_2^{(j)}\end{pmatrix}$$

is spectral expansion for the following problem

$$\Lambda_0 Y^{(0)}(x,\lambda)=\lambda Y(x,\lambda),\ Y_2(0)=0,\ Y_1(\pi)-Y_1(0)-[v^{(+)},Y]=0,$$

where $[f,g]=(f,Bg),\ (f,g)=\int_0^\pi (f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x))dx,$

$$\Lambda_0=(L_0=\frac{1}{2}B\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\Omega(x)\int_0^x(B\Omega(y))^T dy,\ -\frac{1}{2}v^{(+)}(x)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}p^{(+)}\\ q^{(+)}\end{pmatrix})$$

and

$$\Omega(x)=\begin{pmatrix}-q^{(-)} & p^{(+)}\\ p^{(-)} & q^{(+)}\end{pmatrix},\ p^{(\pm)}=p_2\pm p_1,\ \ q^{(\pm)}=q_2\pm q_1\ .$$

$$\Lambda_0 f^{(0)}(x)=L_0 f(x)-\frac{1}{2}v^{(+)}(x)f_1(0),\ f(x)=(f_1,f_2)^T.$$

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986