сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-490

Е.Х.Христов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ОДНОМУ СПЕКТРУ

1986

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим две самосопряженные задачи Штурма-Лиувилля

$$y'' + (\lambda - q_j(x))\,y = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi \quad j = 1,2\,, \qquad /1.1/$$

$$y'(0) - h_j y(0) = 0\,, \quad y'(\pi) + h_j y(\pi) = 0\,, \quad |h_j| < \infty\,, \qquad /1.2/$$

где $q_j \in L_1^{(s)} = \{ f \in L_1(0,\pi) \,|\, f(x) = f(\pi - x) \}$. Обозначим через $\phi_j(x,\lambda)$ и $\psi_j(x,\lambda)$ решения уравнений /1.1/, для которых $\phi_j(0,\lambda) = \psi_j(\pi,\lambda) = 1$, $\phi_j'(0,\lambda) = -\psi_j'(\pi,\lambda) = h_j$. Отметим, что

$$\psi_j(x,\lambda) = \phi_j(\pi - x, \lambda). \qquad /1.3/$$

Пусть $\omega_j(\lambda) = \phi_j'(\pi,\lambda) + h_j \phi_j(\pi,\lambda)$ – характеристические функции краевых задач /1.1/, /1.2/. По их спектрам $\sigma_j = \{ \lambda_n^{(j)} = \lambda_{2n+j} \,|\, \omega_j(\lambda_{2n+j}) = 0 \}_{n=0}^{\infty}$, где

$$\lambda_{2n+j} = n^2 + \frac{2}{\pi}\left(2h_j + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q_j(x)\,dx\right) + o(1), \quad n \to \infty\,, \qquad /1.4/$$

построим множества $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma'' = \sigma_1 \; \sigma_2$, $\sigma' = \sigma \; \sigma''$. Всюду в дальнейшем, не оговаривая этого особо, будем предполагать, что при некотором $N < \infty$ имеем

$$\lambda_{2n+1} \neq \lambda_{2n+2} \; (n = 0,1,\dots,N), \quad \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} = \lambda_{(n)} \; (n > N). \qquad /1.5/$$

Как хорошо известно /см., например, Левитан /1//, собственные функции

$$\phi_j(x, \lambda_{2n+j}) = (-1)^n \, \psi_j(x, \lambda_{2n+j}) \qquad n = 0,1,\dots \qquad /1.6/$$

и их нормы

$$\alpha_{2n+j}^{-1} = \int_0^{\pi} \phi_j^2(x, \lambda_{2n+j})\,dx = (-1)^{n+1}\, \dot{\omega}_j(\lambda_{2n+j}) \quad (\cdot = \partial/\partial\lambda). \qquad /1.7/$$

Введем пространство $\mathfrak{H}_1^{(s)} = L_2^{(s)} \oplus \mathbf{C} \ni \tilde{f} = (f(x), a)$ со скалярным произведением $(f_1, f_2) = \int_0^{\pi} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx + a_1 \bar{a}_2$, и пусть

$$\dot{\mathfrak{H}}_1^{(s)} = \{ \tilde{f} \in \mathfrak{H}_1^{(s)} \,|\, \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + 2a = 0 \}. \qquad /1.8/$$

Далее, обозначив $\Phi(x,\lambda) = \phi_1\phi_2(x,\lambda)$, $\Psi(x,\lambda) = \psi_1\psi_2(x,\lambda)$, построим функции

$$\tilde{V}_{2n+j}^{(s)} \equiv (V_{2n+j}(x), V_{2n+j}^{(0)}) = \left(\frac{d}{dx} W_{2n+j}^{(s)}(x), \frac{1}{2} W_{2n+j}^{(s)}(\pi)\right)$$

$$\tilde V^{(s)}_{(n)} = \left(\frac{d}{dx}W^{(s)}_{(n)}(x),\ -\frac{1}{2}W^{(s)}_{(n)}(\pi)\right) \quad (\lambda_{2n+j} \in \sigma',\quad \lambda_{(n)} \in \sigma''), \qquad /1.9/$$

где

$$W^{(s)}_{2n+j} = \Psi(x, \lambda_{2n+j}) - \Phi(x, \lambda_{2n+j}),\quad W^{(s)}_{(n)} = \dot\Psi(x,\lambda_{(n)}) - \dot\Phi(x, \lambda_{(n)}), \qquad /1.10/$$

и функции

$$\tilde U^{(s)}_{2n+j} = (2\dot\Omega(\lambda_{2n+j}))^{-1}\ (\Psi(x, \lambda_{2n+j}) + \Phi(x, \lambda_{2n+j}), 2(\Psi(0, \lambda_{2n+j}) + 1)),$$

$$\tilde U^{(s)}_{(n)} = 2\ddot\Omega^{-1}(\lambda_{(n)})(\Phi(x, \lambda_{(n)}), 2) \equiv 2\ddot\Omega^{-1}(\lambda_{(n)})(\Psi(x, \lambda_{(n)}), 2), \qquad /1.11/$$

где $\Omega(\lambda) = \omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)$. Отметим, что $\tilde V^{(s)}_{2n+j}$, $\tilde V^{(s)}_{(n)} \in \mathring{\mathcal{H}}^{(s)}_1$, $U^{(s)}_{2n+j}(x)$, $U^{(s)}_{(n)}(x) \in L_2^{(s)}$. С помощью тождества

$$W(y_1 y_2, z_1 z_2) = (\lambda - \mu)^{-1}\ \frac{d}{dx} \prod_{j=1,2} W(y_j, z_j),$$

где y_j и z_j - решения уравнений /1.1/ при λ и μ соответственно, $W(f, g) = fg' - f'g$, легко устанавливается

Лемма 1.1. Справедливы следующие соотношения

$$2(\tilde U^{(s)}_{2n+1}, \tilde V^{(s)}_{2m+1})_1 = \delta_{n,m},\quad (\tilde U^{(s)}_{(n)}, \tilde V^{(s)}_{2n+1})_1 = 0,$$

$$(\tilde U^{(s)}_{2n+1}, \tilde V^{(s)}_{(m)})_1 = \alpha_{2n+1}(2\alpha_{2m+1}(\lambda_{2n+1} - \lambda_{(m)}))^{-1},$$

$$(\tilde U^{(s)}_{(n)}, \tilde V^{(s)}_{(m)})_1 \equiv \frac{2}{\ddot\Omega(\lambda_{(n)})}\int_0^\pi (\Phi(x, \lambda_{(n)}) - \frac{1}{2})\frac{d}{dx}W^{(s)}_{(m)}(x)\,dx = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m} = 0$ при $n \neq m$ и $\delta_{n,m} = 1$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.1. Пусть по краевым задачам /1.1/, /1.2/ построены указанным выше способом системы функции $V^{(s)} = \{\tilde V_{2n+1}\ (n = 0,1,\dots,N),\ V^{(s)}_{(n)}\ (n > N)\}$, $U^{(s)} = \{\tilde U^{(s)}_{2n+1}, \tilde U^{(s)}_{(n)}\}$. Тогда для любой функции $\tilde f \in \mathring{\mathcal{H}}^{(s)}_1$ справедливо разложение

$$\tilde f = \sum_{n=0}^{N} d_{2n+1}\tilde V^{(s)}_{2n+1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \tilde V^{(s)}_{(n)}, \qquad /1.12/$$

где в силу леммы 1.1 коэффициенты d_{2n+1} и c_n определяются однозначно по формулам

$$d_{2n+1} = 2(\tilde f, \tilde U^{(s)}_{2n+1})_1 + \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}(f, U^{(s)}_{(\ell)})_1}{\alpha_{2\ell+1}(\lambda_{(\ell)} - \lambda_{2n+1})} < \infty, \qquad /1.13/$$

$$c_n = (\tilde f, \tilde U^{(s)}_{(n)})_1.$$

При этом для любых $f \in L_1^{(s)}$ и $\alpha \in \mathbf{C}$, удовлетворяющих условию /1.8/,

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x - \int_x^\pi\right) f(y)\,dy = \sum_{n=0}^{N} d_{2n+1}W^{(s)}_{2n+1}(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n W^{(s)}_{(n)}(x). \qquad /1.14/$$

В формуле /1.12/ частичные суммы ряда для $f(x)$ равносходятся по норме L_2 с частичными суммами ряда Фурье $s(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\cos 2nx \int_0^\pi f(y)\cos 2ny\,dy$, а в /1.14/ сходимость равномерна по $0 \le x \le \pi$.

Разложение /1.12/ формально получается почленным дифференцированием по x разложения /1.14/, если положить здесь $x = \pi$, так как $F(x) = -2\alpha - \int_x^\pi f(y)\,dy$. К этой теореме примыкает следующее, более общее утверждение.

Теорема 1.2. Для любой $\tilde f = (f \in L_1^{(s)}, \alpha \in \mathbf{C})$, равномерно по $0 \le x \le \pi$, имеет место разложение

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde d_{2n+1} W^{(s)}_{2n+1}(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde c_n W^{(s)}_{(n)}(x), \qquad /1.15/$$

которое допускает почленное дифференцирование по x, если $f \in L_2^{(s)}$. Здесь

$$\tilde d_{2n+1} = (f, \tilde U_{2n+1})_1 + \sum_{\ell=0}^{N} \frac{(-1)^{\ell+1}\alpha_{2n+1}\omega_1(\lambda_{2\ell+2})}{\lambda_{2n+1} - \lambda_{2\ell+2}}(\tilde f, \tilde U_{2\ell+2})_1, \qquad /1.16/$$

$$\tilde c_n = (f, U_{(n)}),$$

где

$$\tilde U_{2n+j} = \dot\Omega^{-1}(\lambda_{2n+j})(\Phi(x, \lambda_{2n+j}) - \frac{1}{2},\ \Phi(\pi, \lambda_{2n+j}) - 1),$$

$$U_{(n)}(x) = 2\ddot\Omega^{-1}(\lambda_{(n)})(\Phi(x, \lambda_{(n)}) - \frac{1}{2}). \qquad /1.17/$$

При этом

$$\tilde d_{2n+1}(\tilde f \in \mathring{\mathcal{H}}^{(s)}_1) = d_{2n+1},\quad \tilde c_n(\tilde f \in \mathring{\mathcal{H}}^{(s)}_1) = c_n. \qquad /1.18/$$

Доказательство этих теорем, которое приведем в §2, получено на основе формул разложения [2]. В §3 покажем, что из равенства /1.14/ или /1.15/ легко вытекает

Теорема 1.3. Пусть по краевым задачам /1.1/, /1.2/ построена функция $\tilde\Delta q = (\Delta q = q_1(x) - q_2(x),\ \Delta h = h_1 - h_2)$. Тогда $\tilde\Delta q$ удовлетворяют условию /1.8/, и

$$\frac{1}{2}\int_0^x \Delta q(y)\,dy + \Delta h = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{2n+1}W^{(s)}_{2n+1}(x). \qquad /1.19/$$

/В частности, если $\sigma = \emptyset$, отсюда следует сразу классическая теорема единственности Борга[3], т.е. если для краевых задач /1.1/, /1.2/, где $q_j \in L_1^{(s)}$, имеем $\sigma_1 = \sigma_2$, то $q_1(x) = q_2(x)$, $h_1 = h_2$ /.

Замечание. Впервые формулы вида /1.19/ были получены Хохштадтом[4]. Далее Левитан[1], доказывая в условиях теоремы 1.3 обобщенную вырожденность уравнения Гельфанда-Левитана в обратной задаче Штурма-Лиувилля, получил следующее уточнение соответствующей формулы из[4]:

$$\frac{1}{2}\int_0^x \Delta q(y)\,dy + \Delta h = \sum_{n=0}^{N} -\alpha_n^{(1)}\{(\phi_2(\pi,\lambda_n^{(1)}) - (-1)^n)c_2(x,\lambda_n^{(1)}) + (\phi_2'(\pi,\lambda_n^{(1)}) + h_1\phi_2(\pi,\lambda_n^{(1)}) + (-1)^n h_2)s_2(x,\lambda_n^{(1)})\}\phi_1(x,\lambda_n^{(1)}), \qquad /1.20/$$

где $s_2(x,\lambda)$ и $c_2(x,\lambda)$ - решения уравнения /1.1/ при $j = 2$, для которых $s_2(\pi,\lambda) = c_2'(\pi,\lambda) = 0$, $s_2'(\pi,\lambda) = c_2(\pi,\lambda) = 1$. Непосредственно проверяется, что

$$W_{2n+1}^{(s)}(x) = -\phi_1(x,\lambda_n^{(1)})\{(\phi_2(\pi,\lambda_n^{(1)}) - (-1)^n)c_2(x,\lambda_n^{(1)}) + (\phi_2'(\pi,\lambda_n^{(1)}) + (-1)^n h_2)s_2(x,\lambda_n^{(1)})\}.$$

Следовательно, формула /1.20/ отличается от /1.19/ суммой

$$\sum_{n=0}^{N} -\alpha_n^{(1)} h_1 \phi_2(\pi,\lambda_n^{(1)})\phi_1(x,\lambda_n^{(1)})s(x,\lambda_n^{(1)}) = $$

$$= \sum_{n=0}^{N} -h_1\alpha_n^{(1)}\omega_2^{-1}(\lambda_n^{(1)})N_{2n+1}(x),$$

где $N_{2n+1}(x) = \Phi(x,\lambda_{2n+1}) - (-1)^n\,\phi_2(\pi,\lambda_{2n+1})\Psi(x,\lambda_{2n+1})$, которая должна равняться нулю.

Рассмотрим теперь набор величин $\tilde q = (q(x),h)$, определяющих краевую задачу /1.1/,/1.2/ $(q_j = q, h_j = h)$ как элемент пространства $\mathfrak{H}_1^{(s)}$ и собственные числа $\lambda_n = \lambda_n(\tilde q)$ как функционалы из $\mathfrak{H}_1^{(s)}$ в $\mathbb{R}$. Тогда /см., например,[2,5]/ при любом $\tilde q \in \mathfrak{H}_1^{(s)}$ существуют дифференциалы

$$\frac{d}{d\epsilon}\lambda_n(\tilde q + \epsilon\tilde f)\Big|_{\epsilon=0,\ \tilde f\in\mathfrak{H}_1^{(s)}} = \left(\tilde f, \frac{\partial\lambda_n}{\partial\tilde q}\right)_1,$$

$$\partial\lambda_n/\partial\tilde q = \alpha_n(\Phi(x,\lambda_n), 2). \qquad /1.21/$$

Отсюда, в силу теоремы 1.1, сразу следует

Теорема 1.4. Для любой $\tilde f \in \mathring{\mathfrak{H}}_1^{(s)}$ имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{d}{dx}W_n^{(s)}(x)\left(\tilde f, \frac{d\lambda_n}{\partial\tilde q}\right)_1, \quad \text{где} \qquad /1.22/$$

$$\left(\tilde f, \frac{\partial\lambda_n}{\partial\tilde q}\right)_1\Big|_{\tilde f\in\mathring{\mathfrak{H}}_1^{(s)}} = \alpha_n\int_0^{\pi} f(x)\left(\Phi(x,\lambda_n) - \frac{1}{2}\right)dx$$

и в силу леммы 1.1 система $\{\alpha_n\frac{d}{dx}W_n^{(s)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ биортогональна системе $\{\alpha_n(\Phi(x,\lambda_n) - \frac{1}{2})\}_{n=0}^{\infty}$.

Замечание. Формула обращения вида /1.22/ в случае краевых условий $y(0) = y(\pi) = 0$ /т.е. $h = \infty$ / получена Барселоном[6], в связи с построением итерационной схемы решения соответствующей обратной задачи. Общий подход к итерационным методам решения обратных задач Штурма-Лиувилля, основанный на формулах в теории возмущения спектральных характеристик краевых задач $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$, $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0$, где $q \in L_2$, $H_1 \neq H_2$, либо $h \neq H_1 = H_2$, изучался в[2,5] исходя из эволюционных уравнений непрерывного аналога метода Ньютона. Некоторые из результатов работ[2,5] /в частности, формулы /1.21// недавно были получены независимо в[8].

Ниже сохраняются все введенные здесь обозначения.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.1 И 1.2

Введем функции

$$\tilde\Phi(\lambda) = (\Phi(x,\lambda) - \frac{1}{2},\ \Phi(\pi,\lambda) - 1),\quad \tilde\Psi(\lambda) = (2\Psi'(x,\lambda), -1). \qquad /2.1/$$

В работе[2] /см. теоремы 1.2/ показано, что для любой функции $\tilde f = (f(x) \in L_2,\ \alpha \in \mathbb{C})$ имеют место разложения

$$\tilde f = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde V_n(\tilde f, \tilde U_n)_1,\quad -\int_x^{\pi} f(y)\,dy - 2\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)(\tilde f, \tilde U_n)_1, \qquad /2.2/$$

где при $\lambda = \lambda_{2n+j} \in \sigma'$ величины $\tilde U_{2n+j}$ определяются формулой /1.17/, $\tilde V_{2n+j} = \tilde\Psi(\lambda_{2n+j})$, а при $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} = \lambda_{(n)} \in \sigma''$

$$\tilde U_{2n+1} = 2\ddot\Omega^{-1}(\lambda_{(n)})\tilde\Phi(\lambda_{(n)}),\quad \tilde U_{2n+2} = 2\ddot\Omega^{-1}(\lambda_{(n)})\dot{\tilde\Phi}(\lambda_{(n)}), \qquad /2.3/$$

$$\tilde V_{2n+1} = \dot{\tilde\Psi}(\lambda_{(n)}) - \dddot\Omega(\lambda_{(n)})(3\ddot\Omega(\lambda_{(n)}))^{-1}\tilde\Psi(\lambda_{(n)}),\quad \tilde V_{2n+2} = \tilde\Psi(\lambda_{(n)}). \qquad /2.4/$$

Во второй формуле разложения в /2.2/ функция $f \in L_1(0,\pi)$, а система $\{W_n\}$ строится следующим образом:

$$W_n(x) = 2\Psi(x,\lambda_n)\quad (\lambda_n \in \sigma',\ \lambda_{2n+2} \in \sigma''),$$

$$W_{2n+1}(x) = 2\dot\Psi(x,\lambda_{(n)}) - 2\dddot\Omega(\lambda_{(n)})(3\ddot\Omega(\lambda_{(n)}))^{-1}\Psi(x,\lambda_{(n)}), \qquad /2.5/$$

$(\lambda_{(n)} \in \sigma'')$.

Наряду с разложениями /2.2/ справедливы и разложения /см.[2], теорема 3/

$$\tilde f = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde V_n^+ (\tilde f, \tilde U_n^+)_1 \;, \quad \int_0^x f(y)\,dy + 2\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} W_n^+(x)(\tilde f, U_n^+)_1 \;, \qquad /2.6/$$

где системы $\{U_n^+\}$ и $\{V_n^+\}$ построены соответственно заменой в /1.17/, /2.3/ и /2.4/ $\tilde\Phi$ на $\tilde\Psi^+ = (\Psi(x,\lambda) - \frac{1}{2},\ \Psi(0,\lambda) - 1)$ и $\tilde\Psi$ на $\tilde\Phi^+ = (-2\,\Phi'(x,\lambda), -1)$. Система $\{W_n^+\}$ получается заменой в /2.5/ $\Psi(x,\lambda)$ на $-\Phi(x,\lambda)$.

<u>Лемма 2.1.</u> Для любой функции $f(x) \in L_1^{(s)}$ и $\alpha \in \mathbf{C}$ имеет место разложение

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1,2} W_{2n+j}^{(s)}(x)(\tilde f, \tilde U_{2n+j})_1 + \sum_{n=N+1}^{\infty} W_{(n)}^{(s)}(x)(f, U_n)\,, \qquad /2.7/$$

и если $\tilde f \in \mathring{\mathfrak{N}}_1^{(s)}$,

$$\tilde f = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1,2} \tilde V_{2n+j}^{(s)}(\tilde f, \tilde U_{2n+j})_1 + \sum_{n=N+1}^{\infty} V_{(n)}^{(s)}\ (\tilde f, \tilde U_{(n)}^{(s)})_1\ . \qquad /2.8/$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $f \in L_1^{(s)}$. Тогда из /1.3/ имеем

$\Phi(x,\lambda) = \Psi(\pi - x, \lambda)$, $\quad \dot\Phi(x,\lambda) = \dot\Psi(\pi - x, \lambda)$,

а из /1.6/ вытекает, что

$\Psi(x, \lambda_{(n)}) = \Psi(x, \lambda_{(n)})$, $\quad \lambda_{(n)} \in \sigma''$.

Следовательно, $(\tilde f, \tilde U_{2n+j})_1 = (\tilde f, \tilde U_{2n+j}^+)_1$ при $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$ и $(\tilde f, \tilde U_{2n+2})_1 = (\tilde f, \tilde U_{2n+2}^+)_1$, $(\tilde f, \tilde U_{2n+1})_1 = (\tilde f, \tilde U_{2n+1}^+)_1 = (f, U_{(n)})$ при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$. Отсюда формула /2.7/ получается сложением вторых разложений из /2.2/ и /2.6/. Формулу /2.8/ получаем аналогично из первых разложений в /2.2/ и /2.6/, учитывая, что если $\tilde f \in \mathring{\mathfrak{N}}_1^{(s)}$, то $(\tilde f, \tilde U_{(n)}^{(s)})_1 = (f, U_{(n)})$. Выражение для $\alpha = -\frac{1}{4}\int_0^\pi f(x)\,dx$ в /2.8/ получается из /2.7/ при $x = \pi(0)$, так как $W^{(s)}(0,\lambda) = W^{(s)}(\pi,\lambda)$. Лемма доказана.

Теперь для того чтобы доказать теорему 1.2, остается воспользоваться следующей леммой.

<u>Лемма 2.2.</u> При $\lambda_{2n+2} \in \sigma'$ справедливо представление

$$W_{2n+2}^{(s)}(x) = \sum_{\ell=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}\,\omega_1(\lambda_{2n+2})\,\alpha_{2\ell+1}}{\lambda_{2\ell+1} - \lambda_{2n+2}}\, W_{2\ell+1}^{(s)}(x)\,.$$

<u>Доказательство</u> получаем, подсчитав по теореме о вычетах контурный интеграл

$$I_R(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{\psi_1(x,\lambda)\phi_2(x,\lambda) - \psi_2(x,\lambda)\phi_1(x,\lambda)}{(\lambda - \lambda_{2n+2})\,\omega_1(\lambda)}\,d\lambda\,, \qquad /2.9/$$

где c_R - окружность в λ-плоскости с радиусом $(R + 1/2)^2$ /R - целое, положительное число/, учитывая равномерность по $0 \le x \le \pi$ при $|k| \to \infty$ $(k^2 = \lambda,\ k = \sigma + i\tau)$

$$\phi_j(x) = \cos kx + O(k^{-1}\exp(|\tau|x))\,,$$

$$\psi_j(x) = \cos k(\pi - x) + O(k^{-1}\exp(|\tau|(\pi - x))\,,$$

$$\omega_j^{-1}(k^2) = (-k\sin k\pi)^{-1}(1 + O(k^{-1})) \qquad (\lambda \in c_R)\,,$$

имеем $\lim I_R(x) = 0$ при $R \to \infty$. Слагаемые, которые соответствуют вычетам в точках $\lambda_{(n)}$, равны нулю вследствие /1.6/. Лемма доказана.

Заметим, что для любой $\tilde f \in \mathring{\mathfrak{N}}_1^{(s)}$ имеем

$(\tilde f, \tilde U_{2n+j})_1 = (\tilde f, \tilde U_{2n+j}^{(s)})_1$, $\quad (\tilde f, \tilde U_{(n)}) = (\tilde f, \tilde U_{(n)}^{(s)})_1$.

Отсюда равенства /1.18/ получаем при помощи следующей леммы.

<u>Лемма 2.3.</u> Для любой $\tilde f \in \mathfrak{N}_1^{(s)}$ имеем

$$(\tilde f, \tilde U_{2n+1}^{(s)})_1 = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{(-1)^{\ell+1}\,\omega_1(\lambda_{2\ell+2})\,\alpha_{2n+1}}{\lambda_{2n+1} - \lambda_{2\ell+2}}\,(\tilde f, \tilde U_{2\ell+2}^{(s)})_1 + \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}(\tilde f, \tilde U_{(\ell)}^{(s)})_1}{\alpha_{2\ell+1}\,(\lambda_{2n+1} - \lambda_{(\ell)})}\,.$$

<u>Доказательство</u> получаем, подсчитав, как в лемме 2.2, контурный интеграл

$$I_R^{(s)}(\tilde f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R} \Big\{ \int_0^\pi f(x)\,S(x,\lambda)\,dx + \alpha S(0,\lambda) \Big\} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_{2n+2})\,\omega_1(\lambda)}\,,$$

где $S(x,\lambda) = \phi_1(x,\lambda)\,\psi_2(x,\lambda) + \phi_2(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1 следует непосредственно из теоремы 1.2 в силу равенств /1.18/.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3

Из $N < \infty$ и асимптотики /1.4/ следует, что $\tilde{\Delta q} \in \mathring{\mathfrak{N}}_1^{(s)}$. Далее из уравнений /1.1/ имеем тождество

$$\Delta h + \int_0^\pi \Delta q(x)\,\Phi(x,\lambda)\,dx = \phi_2(\pi,\lambda)\,\phi_1'(\pi,\lambda) - \phi_2'(\pi,\lambda)\,\phi_1(\pi,\lambda).$$

Отсюда, учитывая, что $\phi_j(\pi, \lambda_{2n+j}) = (-1)^n$, получаем равенства $(-1)^{n+3-j}\omega_{3-j}(\lambda_{2n+j}) = (\Delta\tilde{q}, \tilde{\Phi}(\lambda_{2n+j}))_1$, $j = 1,2$, где $\Phi(\lambda)$ определяется формулой /2.1/. Следовательно, $a_{2n+j} = (-1)^{3-j}(\Delta\tilde{q}, \tilde{U}^{(s)}_{2n+j}) = (-1)^{3-j}(\Delta\tilde{q}, \tilde{U}_{2n+j})_1$ при $\lambda_{2n+j} \in \sigma'$ и $(\Delta\tilde{q}, \tilde{U}^{(s)}_{(n)})_1 = (\Delta q, U_{(n)}) = 0$ при $\lambda_{(n)} \in \sigma''$, что в силу разложения /1.13/, /1.14/ дает искомое равенство /1.19/. Отметим, что, если воспользоваться непосредственно формулой /1.16/, получаем

$$\tilde{d}_{2n+1}(\Delta\tilde{q}) = a_{2n+1}\Big(1 + \sum_{\ell=0}^{N} \frac{\omega_1(\lambda_{2\ell+2})}{(\lambda_{2\ell+2} - \lambda_{2n+1})\,\dot{\omega}_2(\lambda_{2\ell+2})}\Big).$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$I_R(\lambda_{2n+1}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R} \omega_1(\lambda)[(\lambda - \lambda_{2n+1})\omega_2(\lambda)]^{-1} d\lambda,$$

где окружности c_R те же, что и в /2.9/. При $R \to \infty$ имеем $\lim I_R = 1$, а по теореме о вычетах

$$I_R = \sum_{\ell=0}^{N} \omega_1(\lambda_{2\ell+2})[(\lambda_{2\ell+2} - \lambda_{2n+1})\,\dot{\omega}_2(\lambda_{2\ell+2})]^{-1},$$

так как $\omega_1(\lambda_{2n+1}) = 0$ и $\omega_1(\lambda_{2\ell+2}) = 0$ при $\ell > N$. Следовательно, $\tilde{d}_{2n+1}(\Delta\tilde{q}) = 2a_{2n+1}$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б.М. Известия АН СССР, сер.мат., 1978, т.42, с.200.
2. Кирчев К.П., Христов Е.Х. Сиб.матем.журнал, т.21, вып.1,1980, с.99.
3. Borg G. Acta Math., 78, 2, 1945, p.1.
4. Hochstadt H. Comm.Pure and Appl.Math., 1976, 26, p.715.
5. Касчиев М., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-12915, Дубна, 1979.
6. Barcilon V. J.Math.Phys., v.15, 4, p.429.
7. Христов Е.Х. ОИЯИ, 11-81-414, Дубна, 1981.
8. Isaacson F., Trubowitz E. Comm. Pure and Appl. Math., 1983, 36, p.767.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1986 года.

Христов Е.Х. Р5-86-490

Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному спектру

Получены формулы разложений функции $\tilde{f} = (f(x) = f(\pi - x) \in L_2(0,\pi), a \in C)$ по произведениям решений двух самосопряженных задач $y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0$, $y'(0) - h_j y(0) = 0$, $y'(\pi) + h_j y(\pi) = 0$, в предположении, что $q_j(x) = q_j(\pi - x) \in L_2$ и собственные числа $\lambda_n^{(1)} \neq \lambda_n^{(2)}$ при $n = 0,1,\dots,N$ и $\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)}$ при $n > N$. В частности, доказана формула

$$\int_0^x (q_1(y) - q_2(y))dy + 2(h_1 - h_2) = \Sigma_{n=0}^{N} 2\|\phi_1(\lambda_n^{(1)})\|_{L_2}^{-2}\, W(x, \lambda_n^{(1)})$$

где решения $\phi_j(x,\lambda)$: $\phi_j(0) = 1$, $\phi_j'(0) = h_j$, а $W(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) - \Phi(\pi - x, \lambda)$, $\Phi = \phi_1\phi_2$, которая уточняет одну теорему Хохштадта.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод автора

Khristov E.Kh. P5-86-490

On Determination of the Sturm-Liouville Operator by one Spectrum

We obtained an expansion formulae for function $\tilde{f} = (g(x) = f(\pi - x) \in L_2(0,\pi), a \in C)$ over products of solutions of two selfadjoint problems $y'' + (\lambda - q_j(x))y = 0$, $y'(0) - h_j y(0) = 0$, $y'(\pi) + h_j y(\pi) = 0$, $j = 1,2$ where $q_j(x) = q_j(\pi - x) \in L_2$ and eigenvalues $\lambda_n^{(1)} \neq \lambda_n^{(2)}$ for $n = 0,1,\dots,N$, $\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)}$ for $n > N$. In particulary, we proofed the formula

$$\int_0^n (q_1(x) - q_2(y))\,dy + 2(h_1 - h_2) = \Sigma_{n=0}^{N} 2\|\phi_1(\lambda_n^{(1)})\|_{L_2}^{-2}\; W(x, \lambda_n^{(1)}),$$

where solutions $\phi_j(x,\lambda)$: $\phi_j(0) = 1$, $\phi_j'(0) = h_j$, $W(x,\lambda) = \Phi(\pi - x, \lambda) - \Phi(x,\lambda)$, $\Phi = \phi_1\phi_2$, which improved one theorem of Hochstadt.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986