сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-47

И.Д.Илиев, К.П.Кирчев

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ВИДА КИНКОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОДОБНЫХ УРАВНЕНИЮ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

1986

Рассмотрим в настоящей работе уравнение

$$u_t + (a(u))_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t \geq 0, \qquad /1/$$

и докажем, что если нелинейность $a(u)$ удовлетворяет некоторым достаточным условиям, то уравнение /1/ имеет решения вида бегущей волны с формой кинка и эти решения являются устойчивыми.

Обозначим через X^s, $s \geq 1$, множество функций $f(x)$, определенных на действительной оси $\boldsymbol{R}$, таких, что для каждой функции $f(x)$ существует константа c_f, для которой

$$|||f|||_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - c_f \operatorname{sgn}(x)]^2 dx + \sum_{k=1}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|^2 dx < \infty, \qquad /2/$$

где $f^{(k)} = d^{(k)} f/dx^{(k)}$ - обобщенная производная.

Линейное пространство X^s, $s \geq 1$, снабженное нормой /2/, является банаховым пространством абсолютно непрерывных на любом конечном интервале функций $f(x)$, для которых

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\lim_{x \to -\infty} f(x) = c_f. \qquad /3/$$

Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|c_f| \leq \sup_{x \in \boldsymbol{R}} |f(x)| \leq \text{const}\, |||f|||_s. \qquad /4/$$

Следовательно, $f^2 - c_f^2 \in H^s(\boldsymbol{R})$. Здесь $H^s(\boldsymbol{R})$ - пространство Соболева со стандартной нормой $\|\cdot\|_s$.

Пусть $\alpha > 0$ является фиксированной константой и пусть $a(s)$ принадлежит C^1 в некоторой окрестности $[-\alpha, \alpha]$.

Введем обозначения:

$$v = \frac{a(\alpha) - a(-\alpha)}{2\alpha},$$

$$P(\varphi) = v(\varphi + \alpha)^2 + 2a(-\alpha)(\varphi - \alpha) - 2\int_{-\alpha}^{\varphi} a(s)\, ds.$$

Лемма 1. Пусть функция $P(\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$P(\pm\alpha) = 0, \quad P''(\pm\alpha) > 0, \quad P(\varphi) > 0 \quad \text{при} \quad |\varphi| < \alpha. \qquad /5/$$

Тогда уравнение /1/ имеет решение вида $u(x,t) = \phi(x - vt)$, для которого имеет место

$$\phi(\xi) \in C^3(\boldsymbol{R}) \cap X^3(\boldsymbol{R}), \quad \phi'(\xi) > 0, \quad \xi \in \boldsymbol{R}, \qquad \lim_{\xi \to \pm\infty} \phi(\xi) = \pm a.$$

Доказательство. Доказательство вытекает элементарно из условий /5/. Действительно, уравнение /1/ эквивалентно уравнению

$$u_t + \left(v - \frac{P''(u)}{2}\right) u_x + u_{xxx} = 0. \qquad /6/$$

Подставляя в /6/ $u(x,t) = \phi(x - vt)$ и интегрируя два раза, имеем

$$\phi''' = \frac{P''(\phi)}{2}\phi', \quad \phi'' = \frac{P'(\phi)}{2}, \quad \phi'^2 = P(\phi).$$

Отсюда для решения $\phi(\xi)$ получаем формулу

$$\xi = \phi^{-1}(0) + \int_0^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{P(s)}}.$$

Таким образом, все указанные свойства $\phi(\xi)$ выполняются в силу условия $P(\pm a) = P'(\pm a) = 0$, $P''(\pm a) > 0$.

Приведем несколько примеров уравнений, для которых выполняются условия /5/:

(i) $u_t - \delta u^2 u_x + u_{xxx} = 0$, $\delta > 0$, – модифицированное уравнение Кортевега - де Фриза;

(ii) $u_t - \delta u^{2n} u_x + u_{xxx} = 0$, $\delta > 0$,

n - целое положительное число;

(iii) $u_t + \delta \cos u\, u_x + u_{xxx} = 0$, $\delta > 0$ (с $0 < a < \pi$).

Отметим, что устойчивость кинка для уравнения (i) была ранее доказана при помощи метода Бенжамина [1] в работе [2].

Для того чтобы получить теорему существования решения для задачи Коши /1/, /7/

$$u(x,0) = g(x) \in X^s, \quad s \geq 3, \qquad /7/$$

применим теорию абстрактных квазилинейных уравнений [3]. Так как начальное условие $g(x) \in X$, $s \geq 3$, то, не уменьшая общности, при доказательстве теоремы существования можно считать, что $\lim g(x) = \pm 1$ при $x \to \pm\infty$.

В /1/ сделаем замену зависимой переменной, полагая

$$u = w + \operatorname{th} x. \qquad /8/$$

Тогда задача Коши /1/, /7/ трансформируется в задачу

$$w_t + [a(w + \operatorname{th} x)]_{xxx} + w_{xxx} = -\frac{4}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{6}{\operatorname{ch}^4 x}, \qquad /9/$$

$$w(x,0) = g(x) - \operatorname{th} x = r(x) \in H^s(\boldsymbol{R}), \quad s \geq 3. \qquad /10/$$

Перепишем /9/ и /10/ в виде

$$w_t + a_1(w + \operatorname{th} x) w_x + w_{xxx} = -\frac{4}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{6}{\operatorname{ch}^4 x} - \frac{a_1(w + \operatorname{th} x)}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad /11/$$

где $a_1(y) = a'(y)$, $w(x,0) = r(x)$.

Подставляя в /11/ $w = P(t)\,v(t)$, где $P(t) = \exp[-tD^3]$, $(D = d/dx)$ - сильно непрерывная унитарная группа операторов, действующих в пространстве $H^s(\boldsymbol{R})$, получим квазилинейное эволюционное уравнение [3,4]

$$\frac{dv}{dt} + A(t,v)\,v = f(t,v), \quad v(0) = r(x), \qquad /12/$$

где $A(t,y)$ - линейный оператор, зависящий от (x,t) и $y \in H^s(\boldsymbol{R})$, и

$$A(t,y) = P(-t)\, a_1[P(t)y + \operatorname{th} x]\, DP(t).$$

Здесь $a_1[P(t)y + \operatorname{th} x]$ - оператор умножения на функцию $x \to a_1[(P(t)y)(x) + \operatorname{th} x]$;

$$f(t,v) = P(-t)\left\{-\frac{4}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{6}{\operatorname{ch}^4 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} a[P(t)v + \operatorname{th} x]\right\}.$$

Если выбрать $X = H^0 = L_2(\boldsymbol{R})$ и $Y = H^s(\boldsymbol{R})$ /в терминологии [3]/, то условия абстрактной теоремы существования [3] для уравнения /12/ проверяются так же, как в [4]. Возвращаясь к задаче /1/, /7/, сформулируем результат, который получается для уравнения /1/.

Теорема 1. Пусть $s \geq 3$. Для каждого $\mathbf{g}(x) \in X^s$ существует единственное решение $u(x,t)$, $u(x,0) = g(x)$, уравнения /1/, которое принадлежит классу

$$u \in C([0,T); X^s) \cap C^1([0,t); H^{s-3}), \qquad /13/$$

где T зависит только от $|||g|||_s$.

Условимся в дальнейшем под $[0,T)$ понимать интервал, на котором в силу теоремы 1 существует единственное решение $u(x,t)$ задачи Коши /1/, /7/. Отметим, что при некоторых дополнительных требованиях к нелинейности $a(u)$ можно доказать, что $T = \infty$, то есть существует глобальное решение задачи /1/, /7/.

При доказательстве устойчивости решения $\phi(x-vt)$ основную роль будет играть нелинейный функционал

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + P(u))\,dx, \qquad /14/$$

инвариантный по времени, когда $u(x,t)$ является решением задачи Коши /1/, /7/, $t \in [0,T)$.

Лемма 2. Пусть выполняются условия /5/ и $u(x,t)$ - решение уравнения /1/, принадлежащее классу $C([0,T']; X^s)$, $s \geq 3$, $T'<T$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \pm\alpha$. Тогда $dE(u)/dt = 0$, то есть $E(u)$ является законом сохранения.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $s>3$. При этом $u(x,t)$ является классическим решением уравнения /1/. Умножая обе стороны /6/ на $2u_{xx} - P'(u)$ и интегрируя по x, получим

$$0 = \int u_t\,(2u_{xx} - P'(u))\,dx + 2\int \left(u_{xx} - \frac{P'(u)}{2}\right)\left(u_{xx} - \frac{P'(u)}{2} + vu\right)_x dx =$$

$$= I_1 + I_2 .$$

Имеем

$$I_1 = -\frac{d}{dt}\int (u_x^2 + P(u))\,dx + 2u_x u_t\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{dE(u)}{dt},$$

$$I_2 = \left[\left(u_{xx} - \frac{P'(u)}{2}\right)^2 + v(u_x^2 - P(u))\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

В случае, если $s=3$, $u(x,t)$ является L_2- решением /то есть для каждого $t \in [0,T']$ уравнение /1/ выполняется почти всюду по x/, u_t принадлежит $C([0,T']; L_2(\boldsymbol{R}))$ /в силу теоремы 1/ и, следовательно, мы не можем интегрировать по частям, как в случае $s>3$. При $s=3$ доказательство леммы можно провести следующим образом: при помощи теории квазилинейных уравнений /3/ получить соответствующую теорему о непрерывной зависимости от начальных данных для задачи Коши /1/, /7/; далее, соответствующим образом регуляризуя начальные данные, после предельного перехода в /14/ можно получить утверждение леммы 2.

Положим $q = \max|P''(s)|$ и введем псевдометрику

$$d_q^2(u,\phi) = \inf_{\zeta\in\boldsymbol{R}} \left(\|u_x(u,t) - \phi'(x-\zeta-vt)\|^2 + q\|u(x,t) - \phi(x-\zeta-vt)\|^2\right). \qquad /15/$$

Здесь $\|\cdot\|$ - норма в $L_2(\boldsymbol{R})$.

Лемма 3. Пусть $u(x,t) \in C([0,T); X^3(\boldsymbol{R}))$ - решение уравнения /1/, для которого $\lim\limits_{x\to\pm\alpha} u(x,t) = \pm\alpha$.

Тогда $d_q(u,\phi)$ - непрерывная функция от $t\in[0,T)$ и минимум в /15/ достигается в конечной точке $\zeta = \zeta(t)$.

Лемма 4. Пусть $u(x,t) \in C([0,T); X^3(\boldsymbol{R}))$ - решение уравнения /1/, для которого $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \pm\alpha$.

Тогда, если выполняются условия /5/, существуют константы K, δ_0, такие, что если $d_q(u,\phi) < \delta_0$, то $E(u) - E(\phi) \geq K d_q^2(u,\phi)$.

Доказательство. Пусть inf в /15/ достигается в точке $\zeta = \zeta(t)$. Зафиксируем $t\in[0,T)$ и положим

$$u(x,t) = \phi(x-\zeta-vt) + b(x,t). \qquad /16/$$

Так как по условию $\lim u(x,t) = \lim \phi(x-\zeta-vt) = \pm\alpha$ при $x\to\pm\infty$, то $h(x,t) \in H^3(\boldsymbol{R})$. Подставляя /16/ в /14/, получим

$$\Delta E = E(u) - E(\phi) = \int\left[h_x^2 + \frac{P''(\phi)}{2}h^2\right]dx +$$

$$+ \int [P''(\phi+\theta h) - P''(\phi)]\,\frac{h^2}{2}\,dx = I_1 + I_2 \qquad (\theta < 1).$$

Имеем $I_1 = \int hLh\,dx$, где самосопряженный в $L_2(R)$ оператор L порожден дифференциальным выражением

$$L = -\frac{d}{dx^2} + \frac{P''(\phi)}{2}.$$

Непрерывный спектр оператора L совпадает с множеством $[\sigma,\infty)$, где $\sigma = \min(P''(\alpha)/2,\ P''(-\alpha)/2) > 0$. Так как $\phi'>0$ и $L\phi'=0$, то точка $\lambda=0$ является самым малым собственным числом оператора L.

Положим $h = \mu\phi' + \psi$, $\int \phi'\psi\,dx = 0$. Тогда

$$I_1 = \int \psi L\psi\,dx \geq \sigma_0\|\psi\|^2 = \sigma_0(\|h\|^2 - \mu^2\|\phi'\|^2).$$

В верхнем выражении $\sigma_0 = \sigma$, если у оператора L нет положительных чисел; в противном случае σ_0 равняется меньшему из положительных собственных чисел оператора L.

Для того чтобы оценить $\mu^2\|\phi'\|^2$ через $\|h\|^2$, воспользуемся тем, что в точке ζ, в которой достигается минимум, имеем $\frac{d}{d\zeta} d_q^2(u,\phi) = 0$.

Этот факт дает соотношение

$$\int \left[q - \frac{P''(\phi)}{2}\right] \phi' h\,dx = 0.$$

Отсюда получается

$$\mu \|\phi'\|^2 = \frac{1}{2q} \int P''(\phi)\, \phi' h\, dx, \quad \mu^2 \|\phi'\|^2 \le \frac{1}{4} \|h\|^2 .$$

Следовательно, $I_1 \ge \frac{3\sigma_0}{4} \|h\|^2$.

С другой стороны, из

$$d_q^2(u, \phi) = \|h_x\|^2 + q\|h\|^2 < \delta_0$$

и леммы Соболева вытекает, что $|h| \le \delta_0 / (4q)^{1/4}$, и, следовательно, если δ_0 достаточно малое,

$$|P''(\phi + \theta h) - P''(\phi)| \le \sigma_0 / 2 .$$

Отсюда $|I_2| \le (\sigma_0/4)\|h\|^2$ и, таким образом, выводим оценку $\Delta E \ge (\sigma_0/2)\|h\|^2$. Непосредственно оценивая ΔE снизу, имеем

$$\Delta E \ge \|h_x\|^2 - \left(\frac{q}{2} + \frac{\sigma_0}{4}\right) \|h\|^2 .$$

Комбинируя обе оценки для ΔE, окончательно получим

$$\Delta E \ge K(\|h_x\|^2 + q\|h\|^2) = K d_q^2(u, \phi),$$

где $K = \dfrac{2\sigma_0}{3\sigma_0 + 6q} > 0$.

Тем самым лемма 4 доказана. Теперь мы готовы доказать основную теорему настоящей работы. Введем псевдометрики:

$$d_I^2(u, \phi) = \inf_{\zeta \in \mathbf{R}} \|u(x,t) - \phi(x - \zeta - vt)\|_1^2 .$$

$$d_{II}^2(u, \phi) = \inf_{\zeta \in \mathbf{R}} |||u(x,t) - \phi(x - \zeta - vt)|||_1^2 .$$

Теорема 2. Пусть $u(x, t) \in C([0, T);\ X^s(\mathbf{R}))$, $(s \ge 3)$ - решение уравнения /1/, для которого $\lim\limits_{x \to \pm a} u(x,t) = \pm a$, и пусть выполняются условия /5/. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $d_I(u, \phi)|_{t=0} < \delta$, то $d_I(u, \phi) < \epsilon$ для всех $t \in [0, T)$.

Доказательство. Пусть K и δ_0 выбраны в соответствии с леммой 4. Так как ΔE не зависит от t, $t \in [0, T)$, то существует константа m, такая, что $\Delta E < m d_I^2(u, \phi)|_{t=0}$.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $m \ge 1$, $q \ge 1$.

Пусть

$$\epsilon > 0, \quad \delta = \min\left(\frac{\delta_0}{2}\sqrt{\frac{K}{mq}},\ \epsilon\sqrt{\frac{K}{m}} \right)$$

и $d_I(u, \phi)|_{t=0} < \delta$. Тогда

$$d_q(u, \phi)|_{t=0} \le q^{1/2}\, d_I(u, \phi)|_{t=0} < \frac{\delta_0}{2},$$

и из леммы 3 вытекает, что существует число $T_0 \in [0, T)$, такое, что $d_q(u, \phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_0)$. Тогда в силу леммы 4

$$\Delta E \ge K d_q^2(u, \phi), \quad t \in [0, T_0).$$

Пусть $T_{max} \le T$ является самым большим числом, таким, что

$$\Delta E \ge K d_q^2(u, \phi), \quad t \in [0, T_{max}).$$

Допустим, что $T_{max} < T$. Тогда при $t \in [0, T_{max}]$ имеем

$$d_q^2(u, \phi) \le \frac{\Delta E}{K} \le \frac{m}{K} d_I^2(u, \phi)|_{t=0} < \frac{m}{K}\delta^2 \le \frac{\delta_0^2}{4}.$$

Применяя еще раз лемму 3, получим, что существует число $T_1 > T_{max}$, такое, что $d_q(u, \phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_1)$.

В силу леммы 4 это противоречит допущенному $T_{max} < T$.

Следовательно, $T_{max} = T$ и

$$\Delta E \ge K d_q^2(u, \phi) \ge K d_I^2(u, \phi), \quad t \in [0, T).$$

Отсюда

$$d_I^2(u, \phi) \le \frac{\Delta E}{K} \le \frac{m}{K} < \epsilon^2, \quad t \in [0, T).$$

Тем самым теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия /5/. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $u(x, t)$ является решением задачи /1/, /7/, $t \in [0, T)$ и $d_{II}(u, \phi)|_{t=0} < \delta$, то $d_{II}(u, \phi) < \epsilon$ для всех $t \in [0, T)$.

Доказательство. Утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 2 в силу неравенства треугольника и оценки /4/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T.B. Proc.R.Soc.Lond., 1972, A328, p.153.
2. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Сиб.матем.ж.,1984,т.XXV, № 5, с.30.
3. Kato T. Proc. of the Symp. at Dundee, 1974; Lect. Notes in Math. 448 Spectral Theory and Differential Equations, Springer, 1975, p.25-70.
4. Kato T. Manuscripta Math.,1979, 28; p.88.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 января 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Илиев И.Д., Кирчев К.П. Р5-86-47

Устойчивость решений вида кинков для некоторых нелинейных уравнений, подобных уравнению Кортевега - де Фриза

Доказано, что если нелинейность удовлетворяет некоторым достаточным условиям, то уравнение $u_t + (a(u))_x + u_{xxx} = 0$, $x \in R$, $t \geq 0$, имеет решения вида бегущей волны с формой кинка и эти решения являются устойчивыми.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Iliev I.D., Kirchev K.P. P5-86-47

The Stability of Kink-Like Solutions of Nonlinear Equations Similar to the Korteveg-de Vries Equation

It is proved in the paper, that if a nonlinearity satisfies certain sufficient conditions, then the equation $u_t + (a(u))_x + u_{xxx} = 0$, $x \in R$, $t \geq 0$ has traveling wave-solutions of kink-like shape that are stable.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986