сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-46

И.Д.Илиев, К.П.Кирчев

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ ХИРОТЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ, ОБОБЩАЮЩЕГО КОМПЛЕКСНОЕ МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА И НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

1986

Рассмотрим уравнение[1,2]

$$u_t + i\alpha u + i\beta(u_{xx} - 2\sigma|u|^2 u) + \gamma u_x + \delta(u_{xxx} - 6\sigma|u|^2 u_x) = 0, \qquad /1/$$

где $x \in \boldsymbol{R}$, $t \geq 0$. Здесь α, β, γ, δ, σ, $|\beta| + |\delta| \neq 0$, являются вещественными константами. В частности, при $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$ уравнение /1/ является комплексным модифицированным уравнением Кортевега - де Фриза, а при $\alpha = \gamma = \delta = 0$, $\beta = -1$ - нелинейным уравнением Шредингера. В работе[1] Хирота применил свой метод построения солитонных решений к уравнению /1/. Отметим, что на основе рассуждений, изложенных в параграфах 8-10 книги[3], /1/ может быть проинтегрировано методом обратной задачи для оператора Дирака.

Мы ограничимся случаем $\sigma < 0$, когда /1/ имеет односолитонное решение $\phi(x, t) \in L_2(\boldsymbol{R})$. Не уменьшая общности, в дальнейшем мы будем считать, что в уравнении /1/ $\sigma = -1$.

В настоящей работе мы докажем устойчивость двухпараметрического решения уравнения /1/:

$$\phi(\kappa, t) = r(x - vt)e^{i(\omega x + \lambda t)}, \qquad /2/$$

где

$$r(\xi) = a \operatorname{sech} a\xi, \quad v = \gamma + a^2\delta - 3\omega^2\delta - 2\beta\omega,$$

$$\lambda = -\alpha - \gamma\omega + \beta\omega^2 + \delta\omega^3 - a^2\beta - 3a^2\delta\omega, \quad a > 0,$$

a и ω - вещественные параметры.

Мы имеем в виду устойчивости относительно псевдометрики

$$d(u, \phi) = \inf_{(\eta, \zeta) \in \boldsymbol{R}^2} \| u(x, t) - e^{i\omega\eta} \phi(x - \zeta, t)\|_1, \qquad /3/$$

где $\|\cdot\|_1$ - норма пространства Соболева $H^1(\boldsymbol{R})$.

Вопрос устойчивости решения $\phi(x,t)$ в метрике /3/ естествен для уравнения /1/ /см.[4-6]/.

Сначала покажем, используя теорию квазилинейных эволюционных уравнений[7,8], что задача Коши для уравнения /1/ с начальными данными

$$u(x, 0) = g(x) \in H^s(\boldsymbol{R}), \quad s \geq 2 \qquad /4/$$

имеет единственное глобальное решение $u(x,t)$, при этом $u(\cdot,t) \in \in C([0,\infty);H^s)$. Здесь $H^s(\mathbf{R})$ - пространства Соболева со стандартной нормой $\|\cdot\|_s$.

Для определенности рассмотрим случай $\delta > 0$ /при $\delta \leq 0$ можно поступить аналогичным образом/. Тогда при доказательстве теоремы существования можно считать, что в /1/ $\delta = 1$. Для того чтобы применить теорию абстрактных квазилинейных уравнений, запишем уравнение /1/ в векторной форме:

$$w_t + \alpha J w + \beta J [w_{xx} - 2\sigma (w^* w) w] + \\ + \gamma w_x + w_{xxx} - 6\sigma (w^* w) w_x = 0, \qquad /5/$$

где

$$w = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, u \\ \mathrm{Im}\, u \end{pmatrix}, \quad w^* = (\mathrm{Re}\, u,\ \mathrm{Im}\, u), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем пространство $Z^s = H^s_R \oplus H^s_R$, где H^s_R - вещественное пространство Соболева, и обозначим через

$$P(t) = \exp[-tD^3] \oplus \exp[-tD^3], \qquad D = \frac{d}{dx},$$

сильно непрерывную унитарную группу операторов, действующих в пространстве Z^s. Тогда, подставляя в /5/ $w = P(t)v(t)$, получим квазилинейное эволюционное уравнение [7,8]:

$$\frac{dv}{dt} + A(t,v)v = 0, \quad v(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, g \\ \mathrm{Im}\, g \end{pmatrix}, \qquad /6/$$

где

$$A(t,y) = \alpha J + \beta J D^2 - 2\beta\sigma P(-t) J a(P(t)y) P(t) + \\ + \gamma D - 6\sigma P(-t) a(P(t)y) D P(t)$$

является линейным оператором, зависящим от t и $y \in Z^s$. Здесь $a(P(t)y)$ - оператор умножения на функцию

$$x \to a((P(t)y)(x)) = [(P(t)y)^*(P(t)y)](x).$$

Если выбрать $X = Z^0$ и $Y = Z^s$ /в терминологии [7] /, то условия абстрактной теоремы существования [7] для уравнения /6/ проверяются так же, как в [8]. Сформулируем результат, который получается для уравнения /1/.

<u>Теорема 1.</u> А. Пусть $s \geq 2$. Для каждого $g(x) \in H^s$ существует единственное решение $u(x,t)$, $u(x,0) = g(x)$, уравнения /1/, которое принадлежит классу

$$u \in C([0,T);H^s) \cap C^1([0,T);H^{s-3}), \qquad /7/$$

где T зависит только от $\|g\|_s$.

Б. Отображение $g \to u$ непрерывно в H^s-норме в том смысле, что если $g_n \to g$ в H^s при $n \to \infty$ и $T' < T$, то решение /1/ $u_n(x,t)$, $u_n(x,0) = g_n$ существует при $t \in [0, T']$ для достаточно больших n и $\|u_n - u\|_s \to 0$ равномерно по $t \in [0,T']$.

В. T может быть выбрано независимо от s в том смысле, что если $u(x,t)$ удовлетворяет /7/ и $u(x,0) = g \in H^{s'}$ для некоторого $s' \neq s$, $s' \geq 2$, то $u(x,t)$ удовлетворяет /7/ и при s' вместо s.

Условие Г. Существуют такие вещественные числа $s_1 \geq s_0 \geq 2$ и неубывающая функция α, что для каждого $T > 0$ и каждой функции $u \in C([0,T);H^{s_1})$, удовлетворяющей /1/, имеет место

$$\|u(\cdot,t)\|_{s_0} < \alpha(\|u(\cdot,0)\|_{s_0}), \quad t \in [0,T).$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть имеет место условие Г. Тогда утверждения теоремы 1 выполняются при $T = \infty$.

<u>Лемма 1.</u> Условие Г выполняется при $s_0 = 2$.

<u>Доказательство.</u> Утверждение леммы непосредственно вытекает из того факта, что нелинейные функционалы

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x|^2 - |u|^4) dx, \qquad /8/$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \{ |u_{xx}|^2 - [\frac{d}{dx}(|u|^2)]^2 - 6|u|^2|u_x|^2 + 2|u|^6 \} dx$$

инвариантны по времени, когда $u(x,t)$ является решением задачи Коши /1/, /4/.

Докажем инвариантность по времени P, E и I. Для этого определим регуляризацию g_ϵ на g /в дальнейшем $\hat{g}$ обозначает преобразование фурье-функции g /, $\hat{g}_\epsilon(k) = \Psi(\epsilon k)\hat{g}(k)$, где Ψ - четная C^∞-функция, $0 \leq \Psi \leq 1$, $\Psi(0) = 1$, причем функция $m(k) = 1 - \Psi(k)$ имеет в 0 нуль бесконечного порядка и, кроме того, Ψ стремится экспоненциально к нулю при $k \to \pm\infty$. Например, мы можем положить $\Psi(k) = \exp[-s(k)]$, $s(k) = k^2 \exp[-1/k^2]$. Из свойства функции Ψ следует, что $g_\epsilon(x) \in H^\infty = \cap H^s$. Обозначим соответствующее решение /1/ через $u_\epsilon(x,t)$, $u_\epsilon(x,0) = g_\epsilon$.

Используя равенства Парсеваля, нетрудно вывести, что $g_\epsilon \to g$ в H^s, $s \geq 2$ при $\epsilon \to 0$. Тогда в силу теоремы 1 для каждого $T' < T$ и для достаточно малых ϵ

$$u_\epsilon(x,t) \in C([0,T'];H^\infty),$$
$$\|u_\epsilon(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|_s \to 0 \qquad /9/$$

при $\epsilon\to 0$ равномерно по $t\in[0,T']$. Дифференцируя по времени в /8/ и учитывая, что $u_\epsilon(x,t)$ удовлетворяет /1/, в классическом смысле получим $I(u_\epsilon)=I(g_\epsilon)$, $P(u_\epsilon)=P(g_\epsilon)$, $E(u_\epsilon)=E(g_\epsilon)$. Делая предельный переход в этих равенствах, в силу /9/ получим инвариантность по времени P, E и I.

Из теоремы 2 и леммы 1 вытекает, что задача Коши /1/, /4/ имеет единственное глобальное решение $u(x,t)$, для которого выполняются утверждения теоремы Т при $T=\infty$.

Основную роль в нашем доказательстве устойчивости будут играть ранее введенные функционалы P и E, как и функционал $Q(u) = i\int_{-\infty}^{\infty} u\bar{u}_x dx$, для которого точно так же можно доказать, что $Q(u)$ инвариантен по времени, когда является решением задачи Коши /1/, /4/.

Введем обозначения:

$$\|u\|_1^2(q) = \|u_x\|^2 + q^2\|u\|^2,$$
$$d_q(u,\phi) = \inf_{(\eta,\zeta)\in \boldsymbol{R}^2} \|u(x,t)-e^{i\eta}\phi(x-\zeta,t\|_1(q), \qquad /10/$$

где $q>0$ - константа.

Лемма 2 /см.[6,9,10] /. Пусть $u(x,t)\in C([0,\infty);H^1(\boldsymbol{R}))$. (i) Пусть $d_q(u,\phi)\le q\|\phi\|$. Тогда inf в /10/ достигается в конечной точке (η,ζ). (ii). $d_q(u,\phi)$ - непрерывная функция от $t\in[0,\infty)$.

Лемма 3. $\phi(x,t)$ минимизирует функционал

$$M(u) = E(u) - 2\omega Q(u) \qquad /11/$$

в классе решений $u\in C([0,\infty);H^2(\boldsymbol{R}))$ уравнения /1/ при условии

$$P(u)=P(\phi). \qquad /12/$$

Точнее, существуют положительные константы K, q, δ_0 /зависящие только от параметров a, ω /, такие, что, если $d_q(u,\phi)<\delta_0$, имеет место оценка

$$M(u)-M(\phi)\ge K\, d_q^2(u,\phi). \qquad /13/$$

Доказательство. Зафиксируем $t\in[0,\infty)$, и пусть минимум в /10/ достигается /в силу леммы 2/ в точке $(\eta,\zeta)=(\eta(t),\zeta(t))\in\boldsymbol{R}^2$. Положим

$$u(x,t) = e^{i\eta}\phi(x-\zeta,t)+h(x,t). \qquad /14/$$

Таким образом, $d_q(u,\phi)=\|h\|_1(q)$.

Введем обозначение: $\Delta M = M(u)-M(\phi)$, и после несложных вычислений получим

$$\Delta M = 2\,\mathrm{Re}\int e^{i\eta}\bar{h}(-\phi_{xx}-2|\phi|^2\phi+2i\omega\phi_x)dx +$$
$$+\int[|h_x|^2-4|\phi|^2|h|^2-2i\omega h\bar{h}_x-2\,\mathrm{Re}(h^2e^{-2i\eta}\bar{\phi}^2)]dx-$$
$$-\int|h|^2[|h|^2+4\,\mathrm{Re}(e^{i\eta}\phi\bar{h})]dx.$$

Непосредственное вычисление выражения в скобках в первом интеграле дает величину $-(a^2+\omega^2)\phi$, а при помощи /14/ и /12/ получаем

$$-2\,\mathrm{Re}\int e^{i\eta}\bar{h}|\phi|dx = \int|h|^2dx. \qquad /15/$$

Следовательно,

$$\Delta M = \int[|h_x|^2+(a^2+\omega^2-4|\phi|^2)|h|^2-2i\omega h\bar{h}_x -$$
$$-2\,\mathrm{Re}(h^2e^{-2i\eta}\bar{\phi}^2)]dx+\int O(|h|^3)dx = I_1+I_2.$$

Сначала мы выведем оценку

$$I_1 \ge \frac{a^2}{2}\|h\|^2+O(\|h\|^3).$$

В интеграле I_1 подставим

$$h=(h_1+ih_2)e^{i(\eta+\omega x-\omega\zeta+\lambda t)}, \qquad /16/$$

где h_1, h_2 - вещественные функции. Тогда имеем

$$I_1 = \int[h_{1x}^2+(a^2-6r^2)h_1^2]dx+\int[h_{2x}^2+(a^2-2r^2)h_2^2]dx \equiv$$
$$\equiv \int h_1L_1h_1dx+\int h_2L_2h_2dx.$$

Самосопряженные в $L_2(R)$ операторы L_1 и L_2, порожденные дифференциальными выражениями

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2}+a^2-6r^2, \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2}+a^2-2r^2 \quad (r=|\phi|),$$

имеют непрерывный спектр, совпадающий со множеством $[a^2,\infty)$. Дискретный спектр оператора L_1 состоит из собственных чисел $\lambda_0=-3a^2$ и $\lambda_1=0$ с собственными функциями $\varphi_0=r^2$ и $\varphi_1=r'$. L_2 имеет единственное собственное число "нуль" с собственной функцией r.

Теперь разложим h_1 и h_2 по спектру L_1 и L_2:

$$h_1=\mu_0 r^2+\mu_1 r'+\theta_1, \quad \int r^2\theta_1 dx=\int r'\theta_1 dx=0;$$

$$h_2=\mu_2 r+\theta_2, \quad \int r\theta_2 dx=0.$$

Подставляя эти выражения в верхнем представлении интеграла I_1, получим, что

$$I_1=-3a^2\mu_0^2\|r^2\|^2+\int\theta_1 L_1\theta_1 dx+\int\theta_2 L_2\theta_2 dx. \tag{17}$$

Разлагая θ_i по непрерывному спектру L_i, $i=1,2$, выводим неравенства

$$\int\theta_i L_i\theta_i\, dx\ge a^2\|\theta_i\|^2, \quad i=1,2. \tag{18}$$

С другой стороны,

$$\|\theta_1\|^2=\|h_1\|^2-\mu_0^2\|r^2\|^2-\mu_1^2\|r'\|^2,$$
$$\|\theta_2\|^2=\|h_2\|^2-\mu_2^2\|r\|^2. \tag{19}$$

Подставляя /19/ и /18/ в /17/ и вычисляя соответствующие нормы, получим

$$I_1\ge a^2(\|h\|^2-\frac{16a^3}{3}\mu_0^2-\frac{2a^3}{3}\mu_1^2-2a\mu_2^2).$$

Теперь мы оценим μ_i через $\|h\|$.

А. Оценка для μ_0

Подставляя h из /16/ в левую часть равенства /15/, получим

$$-2\int r h_1 dx=\|h\|^2.$$

Положим $r=\mu r^2+\psi$, где константу $\mu>0$ выберем позднее. Имеем $\int r^2 h_1 dx=\|r^2\|^2\mu_0=(4a^3/3)\mu_0$. Отсюда

$$\frac{4a^3}{3}\mu\mu_0+\int\psi h_1 dx=-\frac{1}{2}\|h\|^2$$

и, следовательно,

$$\frac{4}{3}a^3|\mu_0|\le\frac{\|\psi\|}{\mu}\|h_1\|+\frac{1}{2\mu}\|h\|^2.$$

Выбираем μ таким образом, чтобы коэффициент перед $\|h_1\|$ был минимальным, то есть

$$\mu=\frac{4}{\pi a}, \quad \|\psi\|^2=a(\frac{64}{3\pi^2}-2).$$

Следовательно,

$$\frac{16a^3}{3}\mu_0^2\le(4-\frac{3\pi^2}{8})\|h\|^2+O(\|h\|^3).$$

Б. Оценка для μ_1 и μ_2

Воспользуемся фактом, что в точке (η,ζ), в которой достигается inf в /10/, первые частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}d_q^2(u,\phi)=\frac{\partial}{\partial\zeta}d_q^2(u,\phi)=0.$$

После соответствующих вычислений получаем

$$\frac{\partial}{\partial\eta}d_q^2(u,\phi)=2\,\mathrm{Im}\int e^{i\eta}(-\phi_{xx}+q^2\phi)\bar h\,dx=$$

$$=\int[(a^2-\omega^2-q^2-2r^2)rh_2-2\omega r'h_1]dx=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}d_q^2(u,\phi)=2\,\mathrm{Re}\int e^{i\eta}(-\phi_{xxx}+q^2\phi_x)\bar h\,dx=$$

$$=\int[(6r^2-a^2+3\omega^2+q^2)r'h_1+(6r^2-3a^2+\omega^2+q^2)\omega rh_2]dx=0.$$

Подставляя в эти равенства

$$\int r'h_1 dx=\mu_1\|r'\|^2=\frac{2a^3}{3}\mu_1; \quad \int rh_2 dx=\mu_2\|r\|^2=2a\mu_2,$$

выведем систему

$$\frac{4a^3\omega}{3}\mu_1+2a(q^2+\omega^2-a^2)\mu_2=-2\int r^3h_2 dx;$$

$$\frac{2a^3}{3}(q^2+3\omega^2-a^2)\mu_1+2a\omega(q^2+\omega^2-3a^2)\mu_2=$$

$$=-6\int r^2r'h_1 dx-6\omega\int r^3h_2 dx.$$

Решая эту систему относительно μ_1 и μ_2, получим

$$\mu_1 = \frac{6\omega(q^2+\omega^2)\int r^3 h_2 dx + 9(q^2+\omega^2-a^2)\int r^2 r' h_1 dx}{a^3(4a^2q^2-(q^2+a^2+\omega^2)^2)},$$

$$\mu_2 = \frac{(q^2-3\omega^2-a^2)\int r^3 h_2 dx - 6\omega\int r^2 r' h_1 dx}{a(4a^2q^2-(q^2+a^2+\omega^2)^2)},$$

то есть

$$\mu_i = K_{i1}\int r^3 h_2 dx + K_{i2}\int r^2 r' h_1 dx, \quad i=1,2.$$

Отсюда

$$|\mu_i| \le |K_{i1}|\,\|r^3\|\,\|h_2\| + |K_{i2}|\,\|r^2 r'\|\,\|h_1\| \le$$

$$\le C(a^{5/2}|K_{i1}| + a^{7/2}|K_{i2}|)\|h\|.$$

Полагая $q^2 = N(a^2+\omega^2)$, $N \gg 1$, и оценивая K_{ij}, получаем окончательно

$$\frac{2a^3}{3}\mu_1^2 + 2a\mu_2^2 \le \frac{C}{N^2}\|h\|^2.$$

/В верхних оценках C обозначает абсолютную константу/. Тогда, фиксируя N достаточно большим, будем иметь оценку

$$I_1 \ge a^2\|h\|^2\left[1-\left(4-\frac{3\pi^2}{8}\right)-\frac{C}{N^2}\right] + O(\|h\|^3) \ge \frac{a^2}{2}\|h\|^2 + O(\|h\|^3).$$

С другой стороны, непосредственно оценивая снизу I_1, получим

$$I_1 \ge \|h_x\|^2 + (\omega^2-5a^2)\|h\|^2 - 2|\omega|\,\|h\|\,\|h_x\| \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\|h_x\|^2 + (\omega^2+5a^2)\|h\|^2.$$

Объединяя оба неравенства, выводим

$$I_1 = (1-2K)I_1 + 2KI_1 \ge \left(\frac{1}{2}-K\right)a^2\|h\|^2 +$$

$$+ O(\|h\|^3) + K\|h_x\|^2 - 2K(\omega^2+5a^2)\|h\|^2 =$$

$$= K\|h_x\|^2 + \left[\frac{a^2}{2} - K(11a^2+2\omega^2)\right]\|h\|^2 + O(\|h\|^3).$$

Определяя K таким образом, чтобы

$$2Kq^2 = \frac{a^2}{2} - K(11a^2+2\omega^2),$$

то есть

$$K = \frac{a^2}{2(2q^2+11a^2+2\omega^2)},$$

выводим неравенство

$$I_1 \ge K\|h\|_1^2(q) + Kq^2\|h\|^2 + O(\|h\|^3).$$

Далее имеем

$$\Delta M = I_1 + I_2 \ge K\|h\|_1^2(q) + Kq^2\|h\|^2 + O(\|h\|^3) - |I_2| =$$

$$= Kd_q^2(u,\phi) + \|h\|^2(Kq^2 + O(\|h\|) + O(\max|h|)).$$

Пусть $\delta_0 > 0$ и $d_q(u,\phi) < \delta_0$, тогда

$$\|h\| \le \frac{\|h\|_1(q)}{q} < \frac{\delta_0}{q}$$

и в силу леммы Соболева имеем $\max|h| \le \|h\|_1(q)/\sqrt{2q} < \delta_0/\sqrt{2q}$. Следовательно, фиксируя δ_0 достаточно малым, получим, что коэффициент перед $\|h\|^2$ в верхнем выражении будет неотрицательным. Отсюда $\Delta M = M(u) - M(\phi) \ge Kd_q^2(u,\phi)$.

Тем самым лемма 3 доказана.

Теперь мы готовы доказать основную теорему настоящей работы.

Теорема 3. Для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$, такое, что если $u(x,t)$ является решением задачи /1/, /4/ и $d(u,\phi)|_{t=0} < \delta_1$, то $d(u,\phi) < \epsilon$ для всех $t \in [0,\infty)$.

Доказательство. Сначала докажем теорему при дополнительном условии $P(u)=P(\phi)$. Пусть K, q, δ_0 выбраны в соответствии с леммой 3. Так как ΔM не зависит от t, $t \in [0,\infty)$, то существует константа m, такая, что $\Delta M \le md^2(u,\phi)|_{t=0}$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $m \ge 1$, $q \ge 1$.

Пусть

$$\epsilon > 0, \quad \delta_1 = \min\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot\frac{\delta_0}{2q},\ \sqrt{\frac{K}{m}}\,\epsilon\right)$$

и $d(u,\phi)|_{t=0} < \delta_1$.

Тогда

$$d_q(u,\phi)|_{t=0} \le q^{1/2}\, d(u,\phi)|_{t=0} < \delta_0/2$$

и из леммы 2 (ii) вытекает, что существует число $T_0 > 0$, такое, что $d_q(u,\phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_0)$. Тогда в силу леммы 3 $\Delta M \geq K d_q^2(u,\phi)$, $t \in [0, T_0)$.

Пусть T_{max} является самым большим числом, таким, что $\Delta M > K d_q^2(u,\phi)$, $t \in [0, T_{max})$.

Допустим, что $T_{max} < \infty$. Тогда при $t \in [0, T_{max}]$ имеем

$$d_q^2(u,\phi) \leq \frac{\Delta M}{K} \leq \frac{m}{K} d^2(u,\phi)|_{t=0} < \frac{m}{K}\delta_1^2 \leq \frac{\delta_0^2}{4}.$$

Применяя еще раз лемму 2 (ii), получаем, что существует число $T_1 > T_{max}$, такое, что $d_q(u,\phi) < \delta_0$, $t \in [0, T_1)$.

В силу леммы 3 это противоречит допущенному $T_{max} < \infty$. Следовательно, $T_{max} = \infty$ и

$$\Delta M \geq K d_q^2(u,\phi) \geq K d^2(u,\phi), \quad t \in [0,\infty).$$

Отсюда $d^2(u,\phi) \leq \Delta M/K \leq (m/K)\delta_1^2 < \epsilon^2$, $t \in [0,\infty)$, тем самым теорема доказана.

Теперь освободимся от ограничения $P(u) = ||u||^2 = ||\phi||^2 = P(\phi)$. Имеем $||\phi|| = (2a)^{1/2}$. Положим $b = ||u||^2/2$, и пусть при этом ϕ_b имеет вид /2/, где вместо a проставлено b. Тогда $||\phi_b|| = ||u|| = \sqrt{2b}$.

Положим $r_b = |\phi_b|$. Подставляя в интеграл /минимум которого по (η,ζ) является $d^2(\phi_b,\phi)/\eta = (a^2 - b^2)(\beta + 2\delta\omega)t$, $\zeta = (b^2 - a^2)t$, получаем неравенство

$$d^2(\phi_b,\phi) \leq (1+\omega^2)||r_b - r||^2 + ||r_b' - r'||^2.$$

На основе этого неравенства, применяя теорему конечных приращений к $r_b - r$ и $r_b' - r'$ при $1/2 \leq b/a \leq 3/2$ ($\Leftrightarrow |b-a| \leq a/2$), получим $d(\phi_b,\phi) \leq |b-a|\, C$, где $C = C(a,\omega)$ не зависит от b.

Пусть $\epsilon > 0$. Из неравенства

$$|\,||\phi_b|| - ||\phi||\,| = |\,||u|| - ||\phi||\,| < d(u,\phi)|_{t=0} < \delta_1$$

вытекает

$$-(2a)^{-1/2}\delta_1 < (||\phi||)^{-1}||\phi_b|| - 1 < (2a)^{-1/2}\delta_1$$

и, следовательно, $1 - \delta_2 < b/a < 1 + \delta_2$, то есть $|b-a| < a\delta_2$, где $\delta_2 = (1 + (2a)^{-1/2}\delta_1)^2 - 1$.

Таким образом,

$$d(u,\phi_b)|_{t=0} \leq d(u,\phi)|_{t=0} + d(\phi,\phi_b)|_{t=0} <$$

$$< \delta_1 + aC\delta_2 = \delta_0,$$

Выберем δ_1 достаточно малым и применим уже доказанную часть теоремы:

$$d(u,\phi_b)|_{t=0} < \delta_0 \Rightarrow d(u,\phi_b) < \epsilon/2, \quad t \in [0,\infty).$$

В силу неравенства $|b-a| \leq a/2$ можем выбрать δ_0 независимо от b /см. доказательство леммы 3 и вид констант K, q, δ_0 /. Тогда, выбирая $\delta_1 > 0$ достаточно малым, для всех $t \in [0,\infty)$ получим

$$d(u,\phi) \leq d(u,\phi_b) + d(\phi_b,\phi) < \epsilon/2 + aC\delta_2 < \epsilon.$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hirota P. J.Math.Phys., 1973, 14, p.805.
2. Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.V. Proc. IEEE, 1973, vol.61, p.1443; ТИИЭР, 1973, т.61, № 10, с.79.
3. Теория солитонов. Метод обратной задачи /под ред. С.П.Новикова/. "Наука", М., 1980.
4. Benjamin T.B. Proc.R.Soc.Lond., 1972, A328, p.153.
5. Cazenave T., Lions P.L. Comm.Math.Phys., 1982, 85, No.4, p.549.
6. Жидков Е.П., Кирчев К.П. ЭЧАЯ, 1985, т.16, вып.3, с.597.
7. Kato T. Proc. of the Symp. at Dundee, 1974; Lect.Notes in Math. 448 Spectral Theory and Differential Equations. Springer, 1975, p.25.
8. Kato T. Manuscripta Math., 1979, 28, p.88.
9. Жидков Е.П., Илиев И.Д., Кирчев К.П. ОИЯИ, Р5-83-812, Дубна, 1983.
10. Bona J.L. Proc.R.Soc.Lond., 1975, A344, p.363.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 января 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Илиев И.Д., Кирчев К.П.

Р5-86-46

Устойчивость односолитонного решения Хироты для уравнения, обобщающего комплексное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза и нелинейное уравнение Шредингера

Доказана орбитальная устойчивость односолитонного решения Хироты для уравнения $u_t + i\alpha u + i\beta(u_{xx} - 2\sigma|u|^2 u) + \delta(u_{xxx} - 6\sigma|u|^2 u_x) = 0$, где $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \neq 0$, $|\beta| + |\delta| \neq 0$ – вещественные константы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Iliev I.D., Kirchev K.P.

P5-86-46

The Stability of the Hirota Single-Soliton Solution of the Equation Generalizing Complex Modified KdV and NLS Equations

We give a proof of the orbital stability of the Hirota single-soliton solution for the equation: $u_t + i\alpha u + i\beta(u_{xx} - 2\sigma|u|^2 u) + \delta(u_{xxx} - 6\sigma|u|^2 u_x) = 0$, where $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \neq 0$, $|\beta| + |\delta| \neq 0$ are real constants.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986