86-420

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-420

Ву Суан Минь

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ В СТЕПЕННОЙ РЯД

1986

I. Введение

Задача вычисления неустойчивых движений (аттракторов Лоренца) автономных билинейных динамических систем и динамических систем, порождаемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью, излагалась в /I/. Там разработаны алгоритмы их вычисления с помощью метода разложения в ряд Тейлора.

Автономная билинейная динамическая система описывается системой уравнений

$$\dot{\varphi} = Q\varphi + B(\varphi,\varphi) \quad , \quad \varphi(0) = \varphi^0 \;, \tag{I.I}$$

где $\varphi \in R^q$, $Q \in R^{q\times q}$ и $B(\varphi,\varphi)$ есть вектор-столбец q квадратичных форм

$$B_r(\varphi,\varphi) = \sum_{\substack{i \le j \\ i,j = 1,\dots,q}} B_r^{ij} \varphi_i \varphi_j \qquad (B_r^{ij} \in R \;;\quad r = 1,\dots,q)\,.$$

Алгоритм вычисления движения системы (I.I) состоит из следующей системы рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned} &\varphi(t+h) = \sum_{m=0}^{L} c_m(t) h^m + O_L(t) \;, \quad \varphi(0) = \varphi^0 \;, \\ &c_{m+1}(t) = \frac{1}{m+1}\left(A c_m(t) + \beta\left(c_k(t), c_{m-k}(t)\right)\right), \quad c_0(t) = \varphi(t)\,, \\ &\beta(c_k(t), c_{m-k}(t)) = \sum_{\substack{i,j = 1,\dots,q \\ k = 0,1,\dots,m}} B_r^{ij} c_k^i(t)\, c_{m-k}^j(t) \;, \end{aligned} \tag{I.2}$$

где L – степень аппроксимирующего полинома, h – шаг интегрирования, $O_L(t) = \sum_{L+1}^{\infty} c_m(t) h^m$ – остаток ряда движения.

В более общем случае система с аналитической правой частью может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = f(\varphi) \;, \quad \varphi(0) = \varphi^0 \,, \\ &f_r(\varphi) = a_r^0 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{\alpha_1 = 1,\dots,q \\ \cdots\cdots \\ \alpha_k = 1,\dots,q}} a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_k} \;, \end{aligned} \tag{I.3}$$

$a_r^0 \,,\; a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \in R \;;\quad r = 1,\dots,q\,.$

Алгоритм вычисления её движения имеет вид

$$\varphi(t+h)=\sum_{m=0}^{L} c_m(t)h^m + O_L(t)\ , \quad \varphi(0)=\varphi^0\ ;$$

$$c^r_{m+1}(t)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{N}\ \sum_{\substack{\alpha_1=1,\dots,q\\ \dots\dots\\ \alpha_k=1,\dots,q\\ s_1+\dots+s_k=m}} a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\, c^{\alpha_1}_{s_1}(t)\dots c^{\alpha_k}_{s_k}(t)\ , \tag{I.4}$$

$$c_0(t)=\varphi(t),\quad c_1(t)=f(\varphi(t)),\quad r=1,\dots,q\ ,\quad m=1,2,\dots\ .$$

В предлагаемой работе мы дадим оценку члена остатка $O_L(t)$ на каждом шаге интегрирования, точности вычисления движения на заданном интервале времени и соотношения для выбора величин L и h в зависимости от желаемой степени точности вычисления.

2. Оценка точности вычисления движений и выбор параметров алгоритмов

Для оценки точности вычисления движений автономных билинейных динамических систем с помощью алгоритма (I.2) мы будем использовать метод мажорирующих рядов /2-7/ . Основная идея метода строится на понятии отношения мажорирования.

<u>Определение</u>. Известно, что векторы функции $f(\varphi)$ и $F(\varphi)$, $\varphi\in C^q$, голоморфные в точке φ^0 , находятся в отношении мажорирования $f\prec F$ в точке φ^0 , если для всех соответствующих коэффициентов Тейлора $a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}$ функции f и $A_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}$ функции F в точке φ^0 выполняется неравенство $|a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}|\leqslant A_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}$ ($r=1,\dots,q$).

Основанием метода является следующее утверждение в классическом доказательстве теоремы Коши – Ковалевской /3,5/ :

<u>Лемма I.</u> Если для задач Коши $\dot\varphi=f(\varphi)$ $(\varphi(0)=\varphi^0)$ и $\dot\psi=F(\psi)$ $(\psi(0)=\psi^0)$ имеют место соотношения $f\prec F$ и $\varphi^0\prec\psi^0$ в точке $t=0$, то и решение $\varphi\prec\psi$ в $t=0$.

Мажорирующая функция может быть выбрана различными путями. Минимальная мажорирующая функция F имеет такие коэффициенты: $A_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}=|a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}|$. Для интегрирования мажорирующей системы в квадратурах желательно построить функцию F с тождественно равными правыми частями уравнений.

Для оценки коэффициентов степенного ряда мы можем применить следующее неравенство Коши /8/:

<u>Лемма 2</u>. Если степенной ряд $\psi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m z^m$ сходится в круге $|z|<\rho$ и представляет в нём функцию $\psi(z)$, модуль которой все время меньше M , то имеет место неравенство

$$|c_m|\leqslant\frac{M}{\rho^m}\ .$$

Ниже с помощью лемм I и 2 мы дадим оценку точности вычисления движения системы (I.I) по алгоритму (I.2) в зависимости от величины шага интегрирования h и степени аппроксимирующего полинома L . Вводим обозначение $|\varphi(t)|=\max_r|\varphi_r(t)|$.

<u>Теорема I</u>. Пусть $\varphi(t)$ – движение системы (I.I) в момент t . Пусть, далее, M и α – положительные числа, такие, что $M>\alpha\geqslant|\varphi(t)|$. Положим

$$a=\max_r\sum_{i=1}^{q}|Q_{ri}|\ ,$$

$$b=\max_r\sum_{i,j=1}^{q}|B_r^{ij}|\ ,$$

$$\rho(M)=\frac{1}{a}\ln\frac{M(a+b\alpha)}{\alpha(a+bM)}\ . \tag{2.I}$$

Тогда для любого $h<\rho(M)$ ряд

$$\varphi(t+h)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(t)h^m \tag{2.2}$$

сходится и является значением движения системы (I.I) в момент $t+h$. При этом коэффициенты и остаток ряда (2.2) удовлетворяют неравенствам

$$|c_m(t)|\leqslant\frac{M}{\rho^m(M)}\ , \tag{2.3}$$

$$\left|\sum_{L+1}^{\infty}c_m(t)h^m\right|\leqslant\frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}\ , \tag{2.4}$$

где $\Delta=\dfrac{h}{\rho(M)}$.

<u>Доказательство</u>. Минимальная функция, мажорирующая правую часть системы (I.I), имеет вид

$$F(\theta)=\bar{Q}\,\theta+\bar{B}(\theta,\theta),$$

где $\bar{Q}_{ri}=|Q_{ri}|$, $\bar{B}_r(\theta,\theta)=\sum\limits_{i,j=1,\dots,q}|B_r^{ij}|$.

Тогда по лемме I движение $\varphi(t)$ системы (I.I) в момент t мажорируется решением системы

$$\dot{\theta}=F(\theta)\;,\quad \theta_1(t)=\dots=\theta_q(t)=\alpha\;.$$

Рассмотрим систему с тождественно равными правыми частями

$$\dot{\Psi}=\Psi\,(a+b\Psi)\;,\quad \Psi(t)=\alpha\,. \qquad (2.5)$$

С помощью индукции по индексам коэффициентов Тейлора докажем, что $\theta(t)\prec\Psi(t)$.

Положим $\theta_r(t+h)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}d_m^r(t)\,h^m$ и $\Psi(t+h)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}e_m(t)\,h^m$.
При m = I и для любого r = I, ..., 9 имеем

$$d_1^r(t)=\sum_{i=1}^{q}|Q_{ri}|\alpha+\sum_{i,j=1,\dots,q}|B_r^{ij}|\alpha^2\le a\alpha+b\alpha^2=e_1(t)\,.$$

Предположим, что для всех $j\le m$ справедливы неравенства

$$d_j^r(t)\le e_j(t)\,. \qquad (2.6)$$

Тогда для m + I имеем

$$d_{m+1}^r(t)=\frac{1}{m+1}\Big(\sum_{i=1}^{q}|Q_{ri}|\,d_m^i(t)+\sum_{\substack{i,j=1,\dots,q\\ k=0,1,\dots,m}}|B_r^{ij}|\,C_k^i(t)\,C_{m-k}^j(t)\le$$

$$\le\frac{1}{m+1}\Big(\sum_{i=1}^{q}|Q_{ri}|\,e_m(t)+\sum_{\substack{i,j=1,\dots,q\\ k=0,1,\dots,m}}|B_r^{ij}|\,e_k(t)\,e_{m-k}(t)\quad\le$$

$$\le\frac{1}{m+1}\Big(ae_m(t)+b\sum_{k=0,1,\dots,m}e_k(t)\,e_{m-k}(t)\Big)=e_{m+1}(t)\,.$$

Таким образом, соотношение (2.6) справедливо для всех индексов коэффициентов Тейлора. Отсюда $\varphi(t)\prec\theta(t)\prec\Psi(t)$.

Решение уравнения (2.5) таково:

$$\rho(\Psi)=\int_{\alpha}^{\Psi}\frac{dv}{v\,(a+bv)}\,.$$

Отсюда (2.I) является решением уравнения (2.5) при $\Psi=M$. Поэтому для любого $h<\rho(M)$ ряд $\Psi(t+h)$ сходится. При том $e_m(t)\ge 0$, так как $a\ge 0$ и $b\ge 0$. Следовательно, $M=\max\limits_{|z|=\rho(M)}|\Psi(t+z)|$.
Тогда из леммы 2 вытекают соотношения

$$|C_m(t)|\le e_m(t)\le\frac{M}{\rho^m(M)}\,.$$

Отсюда для остатка ряда (2.2) имеем оценку

$$\Big|\sum_{L+1}^{\infty}C_m(t)\,h^m\Big|\le\sum_{L+1}^{\infty}|C_m(t)|\,h^m\le M\sum_{L+1}^{\infty}\Big(\frac{h}{\rho(M)}\Big)^m=\frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}\;,$$

так как $\Delta<$ I. Теорема доказана.

Для ограниченного движения системы (I.I) с помощью теоремы I мы получим оценку точности его вычисления на любом интервале времени.

Теорема 2. Пусть движение $\varphi(t)$ системы (I.I) ограничено на интервале $t=0\div\tau$, $\varepsilon>0$ – произвольно заданное малое положительное число и $\alpha\geqslant|\varphi(t)|+\varepsilon$ на интервале. Пусть, далее, $\varphi^*(t)$ – ее соответствующее движение, вычисляемое по алгоритму (I.2). Положим

$$a_1=\max_{r,\nu}|Q_{r\nu}|\,,$$

$$b_1=\max_{r,\nu}\Big\{\sum_{i=1}^{\nu-1}|B_r^{i\nu}|+2|B_r^{\nu\nu}|+\sum_{j=\nu+1}^{q}|B_r^{\nu j}|\Big\}\;,$$

$$\rho(h) = \exp((a_1+b_1\alpha)qh).$$

Тогда если шаг интегрирования h и степень аппроксимирующего полинома L удовлетворяют неравенствам

$$h < \rho(M) = \frac{1}{a}\ln\frac{M(a+b\alpha)}{\alpha(a+bM)}, \tag{2.7}$$

$$\Delta^{L+1} \leqslant \frac{(1-\Delta)\varepsilon}{M\sum\limits_{k=0}^{N-1}\rho^k(h)}, \tag{2.8}$$

где $M>\alpha$, $Nh \leqslant \tau$, $\Delta = \dfrac{h}{\rho(M)}$, то

$$|\varphi(t)-\varphi^*(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t=0,h,\ldots,Nh. \tag{2.9}$$

<u>Доказательство</u>. Из условия теоремы и по теореме I следует, что соотношения (2.3) и (2.4) имеют место для всех $\varphi(t)$ на интервале $t=0\div\tau$. Кроме того, если $|\varphi(t)-\varphi^*(t)|\leqslant s$, то они имеют место и для $\varphi^*(t)$.

Предположим, что в момент $t=kh$ имеем оценку $|\sigma(t)|=|\varphi(t)-\varphi^*(t)|\leqslant\delta(k)$. Оценим величину $|\varphi(t+h)-\varphi^*(t+h)|$. Погрешность вычисления в момент $t+h$ определяется отклонением $\theta(t+h)$ от движения, вызываемым возмущением $\sigma(t)$ в момент t, и остатком разложения в ряд по формуле (2.4).

Вариация системы (I.I) на интервале $(t,t+h)$ имеет вид

$$\dot\theta(t+s) = \Gamma(t+s)\theta(t+s), \quad \theta(t)=\sigma(t), \tag{2.10}$$

где элементы матрицы $\Gamma(t+s)$ определяются как

$$\Gamma_{r\nu}(t+s) = \frac{\partial}{\partial\varphi_\nu}\Big(\sum_{i=1}^{q}Q_{ri}\varphi_i + \sum_{\substack{i\leqslant j\\ i,j=1,\ldots,q}}B_r^{ij}\varphi_i\varphi_j\Big)\Big|_{\varphi=\varphi(t+s)} =$$

$$=\Big(Q_{r\nu}+\sum_{i=1}^{\nu-1}B_r^{i\nu}\varphi_i + 2B_r^{\nu\nu}\varphi_\nu + \sum_{j=\nu+1}^{q}B_r^{\nu j}\varphi_j\Big)\Big|_{\varphi=\varphi(t+s)}.$$

Из условия $|\varphi(t)|+s\leqslant\alpha$ на всем интервале $t=0\div\tau$ имеем

$$|\Gamma_{r\nu}(t+s)|\leqslant|Q_{r\nu}|+\sum_{i=1}^{\nu-1}|B_r^{i\nu}|\alpha+2|B_r^{\nu\nu}|\alpha+\sum_{j=\nu+1}^{q}|B_r^{\nu j}|\alpha\leqslant a_1+b_1\alpha \tag{2.11}$$

для всех $r,\nu = 1,\ldots,q$.

Решение уравнения (2.I0) равно решению интегрального уравнения

$$\theta(t+s)=\sigma(t)+\int_0^s\Gamma(t+s)\,\theta(t+v)\,dv. \tag{2.12}$$

Полагаем

$$\theta_0(t+s)=\sigma(t),$$

$$\theta_{m+1}(t+s)=\int_0^s\Gamma(t+v)\,\theta_m(t+v)\,dv.$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\theta_m(t+s) \tag{2.13}$$

равномерно сходится. Тогда он является решением уравнения (2.I2).

Очевидно, что

$$|\theta_0(t+s)|\leqslant\delta(k).$$

Учитывая (2.II), имеем оценку для $\theta_1(t+s)$:

$$|\theta_1(t+s)|\leqslant\int_0^s|\Gamma(t+v)\sigma(t)|\,dv\leqslant\int_0^s|a_1+b_1\alpha\;\delta(k)HI|\,dv,$$

где все элементы матрицы H и вектора I равны единице. Отсюда

$$|\theta_1(t+s)|\leqslant\delta(k)(a_1+b_1\alpha)q\int_0^s dv=\delta(k)(a_1+b_1\alpha)qs.$$

Предположим, что для некоторого m имеем оценку

$$|\theta_m(t+s)|\leqslant\delta(k)\frac{((a_1+b_1\alpha)qs)^m}{m!}. \tag{2.14}$$

Тогда для $m+1$ имеем

$$|\theta_m(t+s)|\leqslant\int_0^s|\Gamma(t+v)\theta_m(t+v)|\,dv\leqslant$$

$$\leqslant \int_0^s \left| (a_1+b_1\alpha)\,\delta(k)\,\frac{((a_1+b_1\alpha)qv)^m}{m!} HI \right| dv \leqslant$$

$$\leqslant \delta(k)\frac{((a_1+b_1\alpha)q)^{m+1}}{m!}\int_0^s v^m dv = \delta(k)\frac{((a_1+b_1\alpha)qs)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Таким образом, по индуктивному предположению оценка (2.I4) справедлива для всех m. Тогда для ряда (2.I3) имеем

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}\theta_m(t+s)\right| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}|\theta_m(t+s)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\delta(k)\frac{((a_1+b_1\alpha)qs)^m}{m!} = \delta(k)\exp((a_1+b_1\alpha)qs).$$

Следовательно, ряд (2.I3) является отклонением от движения в момент $t+s$, вызываемым возмущением $\delta(t)$. Отсюда в момент $t+h$ имеем оценку для отклонения

$$|\theta(t+h)| \leqslant \delta(k)p(h).$$

Учитывая и остаток разложения в ряд при вычислении движения в момент $t+h$, получим

$$|\varphi(t+h)-\varphi^*(t+h)| \leqslant |\theta(t+h)| + \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta} = \delta(k)p(h) + \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}. \qquad (2.I5)$$

На первом шаге вычисления, т.е. $t=h$, оценка погрешности вычисления определяется неравенством (2.4):

$$|\varphi(h)-\varphi^*(h)| \leqslant \delta(1) = \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}.$$

Предположим, что в момент $t=nh$ имеет место неравенство

$$|\varphi((n+1)h)-\varphi^*((n+1)h)| \leqslant \delta(n)p(h) + \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta} = \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}\sum_{k=0}^{n}p^k(h). \qquad (2.I6)$$

Тогда в момент $t=(n+1)h$ по (2.I5) имеем оценку

$$|\varphi((n+1)h)-\varphi^*((n+1)h)| \leqslant \delta(n)p(h) + \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta} = \frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}\sum_{k=0}^{n}p^k(h).$$

Таким образом, с помощью индукции по n оценка (2.I6) справедлива для всех $n = I, \dots N$, если мы выбираем L из неравенства

$$\frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}\sum_{k=0}^{N-1}p^k(h) \leqslant \varepsilon,$$

которое эквивалентно (2.8). Тем самым справедливы и неравенства (2.9). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{aligned}\dot\varphi_1 &= -10\varphi_1 + 10\varphi_2,\\ \dot\varphi_2 &= 28\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_1\varphi_3,\\ \dot\varphi_3 &= -\tfrac{8}{3}\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\end{aligned} \qquad (2.I7)$$

с начальным условием $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_2(0)=1$, $\varphi_3(0)=0$. Известно, что такое движение является странным аттрактором на некотором компактном многообразии /9,I0/. При этом $|\varphi(t)|+\varepsilon < 50$. Пусть мы хотим вычислять его со степенью точности $\varepsilon = 10^{-8}$. Выбираем $\alpha = 50$ и $M = 10^3$.

Вычислив соответствующие коэффициенты в теоремах I и 2 для системы (2.I7), получим

$$a = 29, \quad b = I, \quad a_1 = 28, \quad b_1 = I, \quad \rho(M) = 0{,}0147875.$$

Для каждого значения шага $h < \rho(M)$ и длины временного интервала τ мы определяем гарантированную степень аппроксимирующего полинома L из соотношения (2.8). В таблице представлены гарантированные величины L для различных величин h при τ = I0, 20, 60.

Таблица

h	τ = I0	τ = 20	τ = 60
10^{-2}	2442	6797	20243
10^{-3}	490	973	2894
10^{-4}	265	525	I558
10^{-5}	I78	300	I066
10^{-6}	I38	273	8I0
10^{-7}	I62	220	654
10^{-8}	92	I85	548
10^{-9}	79	I60	47I
10^{-10}	68	I40	4I4
10^{-11}	63	I24	369
10^{-12}	56	II2	332
10^{-13}	5I	I02	304

Из условия теоремы 2 следует, что для автономной билинейной динамической системы на компактном многообразии степень L аппроксимирующего полинома, выбранная по условию (2.8), является общей для вычисления всех движений на нем, так как оценки не зависят от значений движения. Если величины L и h зафиксированы, то при вычислении конкретного движения учет его вычисляемых значений дает более точную оценку погрешности.

Теорема 3. Пусть величины L и h в алгоритме (I.2) зафиксированы и M – достаточно большое положительное число. Тогда на каждом шаге интегрирования k справедлива оценка

$$|\varphi((k+1)h)-\varphi^*((k+1)h)|\leq\delta(k+1)=\delta(k)P_k+\frac{M\Delta_k^{L+1}}{1-\Delta_k},\ \delta(0)=0, \tag{2.I8}$$

пока $\delta(k)$ достаточно мало и

$$h<\rho_k(M)=\frac{1}{a}\ln\frac{M(a+b\alpha_k)}{\alpha_k(a+bM)},$$

где

$$\Delta_k=\frac{h}{\rho_k(M)},$$

$$\alpha_k=|\varphi^*(kh)|+\delta(k),$$

$$P_k=\exp((a_1+b_1\vartheta_k)qh),$$

$$\vartheta_k=\max_{s\leq h}|\varphi^*(kh+s)|+\delta(k).$$

Доказательство. Следуя доказательству теоремы с заменой α на α_k и доказательству теоремы 2 с заменой α на ϑ_k в оценке (2.II), получим оценку (2.I8). Теорема доказана.

При использовании теоремы 3 нет необходимости знать верхнюю грань абсолютных значений движения.

Оценка точности вычисления движений динамической системы (I.3) с помощью алгоритма (I.4) может быть легко получена аналогичным образом с помощью лемм I и 2.

Теорема 4. Пусть движение $\varphi(t)$ системы (I.3) ограничено на интервале $t=0\div\tau$, $\varepsilon>0$ – произвольно заданное малое положительное число и $\alpha\geq|\varphi(t)|+\varepsilon$ на интервале. Пусть, далее, $\varphi^*(t)$ – ее соответствующее движение, вычисляемое по алгоритму (I.4). Положим

$$a_0=\max_r|a_r^0|,$$

$$a_k=\max_r\sum_{\substack{\alpha_1=1,\dots,q\\ \cdots\\ \alpha_k=1,\dots,q}}|a_r^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}|,\qquad k=1,\dots,N,$$

$$P(h)=\exp\left(qh\sum_{k=1}^{N}ka_k\alpha^{k-1}\right).$$

Тогда если шаг интегрирования h и степень аппроксимирующего полинома L удовлетворяют неравенствам

$$h<\rho(M)=\int_\alpha^M\frac{dv}{\sum_{k=0}^{N}a_k v^k},$$

$$\Delta^{L+1}\leq\frac{(1-\Delta)\varepsilon}{M\sum_{k=0}^{N-1}P^k(h)},$$

где $M>\alpha$, $Nh\leq\tau$, $\Delta=\frac{h}{\rho(M)}$, то

$$|\varphi(t)-\varphi^*(t)|\leq\varepsilon\quad\text{для всех}\quad t=0,h,\dots,Nh.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы I легко показать, что движение $\varphi(t)$ системы (I.3) в момент t мажорируется решением системы уравнений с тождественно равными правыми частями:

$$\dot\psi=\sum_{k=0}^{N}a_k\psi^k,\qquad \psi(t)=\alpha.$$

Её решение таково:

$$\rho(\psi)=\int_\alpha^\psi\frac{dv}{\sum_{k=0}^{N}a_k v^k}.$$

Отсюда с помощью лемм I и 2 ряд $\varphi(t+h)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(t)h^m$ сходится при $h<\rho(M)$, и мы получим остаток ряда

$$\left|\sum_{L+1}^{\infty}c_m(t)h^m\right|\leq\frac{M\Delta^{L+1}}{1-\Delta}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 легко показать, что для вариации системы (I.3) на интервале $(t,t+h]$

$$\dot\theta(t+s)=\Gamma(t+s)\theta(t+s),\qquad \theta(t)=\sigma(t),$$

элементы матрицы $\Gamma(t+s)$ удовлетворяют неравенству

$$|\Gamma_{r\nu}(t+s)| \leq \sum_{k=1}^{N} k a_k \alpha^{k-1} \tag{2.19}$$

для всех $r, \nu = 1, \dots, q$.

Дальнейшее доказательство полностью совпадает с доказательством теоремы 2 с единственным отличием, что вместо (2.II) будет неравенство (2.I9). Теорема доказана.

Литература

I. Vu Xuan Minh. JINR, E5-86-I32, Dubna, I986.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во Московского университета, М., I984.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. "Мир", М., I964.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. Физматгиз, М., I970.
5. Гофен А.М. Дифференциальные уравнения, том 20, № 7, с. II8I-- II93, I984.
6. Corliss G. and Lowery D. J. of Computational and Applied Mathematics, vol 3, No 4, p. 25I-256, I977.
7. Chang Y.F. and Corliss G. J. Inst. Maths. Applics, vol. 25, p. 349-359, I980.
8. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. "Технико-теоретическая литература", М., I954.
9. Lorenz E.N. Journal of the Atmospheric Sciences, vol 20, p.I30-I4I, I963.
I0. Странные аттракторы. "Мир", М., I98I.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня I986 года.

Ву Суан Минь

P5-86-420

Оценка точности вычисления движения автономных билинейных динамических систем с помощью метода разложения в степенной ряд

Для алгоритмов, построенных на основе разложения решения задачи Коши при вычислении движений автономных билинейных динамических систем, даны соотношения между степенью аппроксимирующего полинома, шагом интегрирования и точностью вычисления. Аналогичные оценки получены также для динамических систем, порождаемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Vu Xuan Minh

P5-86-420

Estimation of Accuracy of Computation of Motions of the Autonomous Bilinear Dynamical Systems by the Expansion into Power Series

The correlations between the degree approximating polynomial, the step of integration and the accuracy of computation of motions of the autonomous bilinear dynamical systems are given for the algorithms constructed on the base of expansion of Cauchy problem solution into power series. The analogous estimations are obtained also for the dynamical systems determined by systems of ordinary differential equations with an analytical right part.

The equation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986