

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P5-86-402

С.П.Радев, Т.Л.Бояджиев

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ СУЖАЮЩИХСЯ
ДЛИННЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ**

1986

I. Введение

Классические решения задачи об устойчивости жидкой капиллярной струи, вытекающей в вязкую среду, получены в предположении о цилиндрической форме поверхности и однородном профиле скорости невозмущенного (усредненного) течения. Однако, как показывает локальный анализ устойчивости в^{1/1/}, вниз по течению имеют место эффекты, отражающие влияние сил тяжести на форму невозмущенной струи - эффект сужения струи и на ее скорость - эффект ускорения струи.

Возможность качественного описания этих эффектов дает хорошо известное одномерное приближение уравнений движения^{2/2/}, в котором в невозмущенном и возмущенном течениях пренебрегается зависимостью гидродинамических величин от радиальной координаты. Физически это связано с фактом, что длина волны наиболее быстрорастущих возмущений намного больше радиуса струи. В стационарном случае одномерные уравнения движения легко интегрируются и приводят к струе, сужающейся и ускоряющейся вниз по потоку. Если сравнить с численным решением из^{3/3/}, то такой характер течения приобретает после некоторого короткого "релаксационного" участка в окрестности выходного сечения насадки (или сразу же, если профиль скорости истечения плоский). На этом начальном участке однородный профиль скорости, выводимый из стационарных одномерных уравнений движения, можно интерпретировать как среднюю по сечению скорость невозмущенного течения.

В^{4,5/} при учете эффектов сужения/ускорения струи к одномерным уравнениям движения для малых возмущений применялся метод многих масштабов. Так как этот метод является асимптотическим, он дает удовлетворительные результаты для умеренно длинных струй (умеренных значений отношения длины волны наиболее быстрорастущего возмущения к длине нераспавшейся части струи). В основе метода лежит разложение по малому параметру, каковым в задаче является отношение длины волны к характерному продольному размеру задачи.

Представляет интерес рассмотреть случай очень длинных струй и одновременно выяснить пределы применимости нелокального анализа по методу многих масштабов. С этой целью в настоящей работе к задаче

об устойчивости капиллярной струи к малым осесимметричным возмущениям применяются одномерные уравнения движения, содержащие радиус и скорость невозмущенного течения в виде функции от продольной координаты. Для этих линейных уравнений в частных производных ищутся решения, периодические по времени, и сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям для амплитудных функций. В случае больших чисел Вебера их можно существенно упростить^{/2/} и записать аналогично уравнениям, описывающим распространение малых возмущений, периодических по пространству. Для обоих вариантов уравнений движения (упрощенного и полного) получены численные решения при соответствующем наборе безразмерных параметров задачи. Показано, что так же, как и в непараллельном анализе^{/5/}, длина нераспавшейся части струи является линейной функцией скорости истечения. Поправки, учитывающие непараллельность невозмущенного течения, становятся существенными при достаточно длинных струях. Приведены графические результаты расчета формы струи, которые иллюстрируют развитие возмущений с амплитудой, возрастающей вниз по потоку, и существенно уменьшающимся волновым вектором в окрестности точки распада. Это указывает на необходимость учета поправок от непараллельности и при расчете диаметра основных капель, образующихся при распаде струи. Сделано сравнение с локальным приближением из^{/4/} и непараллельным асимптотическим из^{/5/} и указаны области их применимости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричную жидкую струю с осью oz , направленной вертикально вниз; радиус струи обозначим через $h(z, t)$, ее скорость — через $u(z, t)$. В одномерном приближении скорость u считается функцией только аксиальной координаты z и времени t и совместно с h находится из системы из двух дифференциальных уравнений в частных производных^{/2/}:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2Fr} - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{2} h \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$p - p_e = \frac{2}{We} k^{-3} \left(\frac{k^2}{h} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \quad k \equiv \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Уравнения (1) — (3) записаны в безразмерном виде, принятом в^{/5/}. В качестве безразмерных параметров задачи выбраны число Вебера $We = \rho u_N^2 D_N / \gamma$ и число Фруда $Fr = u_N^2 / g D_N$,

определяемые как комбинации из величин плотности (ρ) и поверхностного натяжения (γ) струи, земного ускорения g и характеристик сопла: скорости истечения u_N и его диаметра D_N .

Первое уравнение (1) — одномерный аналог закона сохранения количества движения вдоль струи, второе уравнение выражает закон сохранения массы (непроницаемость поверхности струи), третье соотношение получено из баланса давлений внутри и вне струи с учетом сил поверхностного натяжения.

Для установившегося уравнения (1)–(3) легко интегрируются в аналитическом виде:

$$u^2 = 1 + \frac{z}{Fr} - \frac{4}{We} (1 - h^{-1}), \quad h^2 u = 1. \quad (4)$$

(В (4) приближенно принято $k=1$).

Равенства (4) описывают течение с однородным профилем скорости в поперечном сечении струи, ускоряющееся и, в соответствии с законом сохранения расхода, сужающееся вниз по потоку. Эффекты сужения/ускорения контролируются, главным образом, числом Фруда.

Ниже при исследовании линейной неустойчивости струи на стационарное (невозмущенное) течение (4) накладываются малые возмущения скорости \tilde{u} и радиуса \tilde{h} :

$$u = u + \tilde{u}, \quad h = h + \tilde{h}. \quad (5)$$

Из (1)–(3) после линеаризации имеем

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + u' \tilde{u} = - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} + \frac{h}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + h' \tilde{u} + \frac{u'}{2} \tilde{h} = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{p} = - \frac{2}{We} \left(h^{-2} \tilde{h} + \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial z^2} \right), \quad (8)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z .

В общем случае уравнения (6)–(8) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

Преобразованием Фурье по времени эту систему можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд. Это соответствует отысканию решений для возмущений скорости и радиуса в виде периодических функций времени:

$$\tilde{h} = \bar{h}(z) e^{i\omega t}, \quad \tilde{u} = \bar{u}(z) e^{i\omega t}, \quad (9)$$

где ω — действительное число, характеризующее частоту колебаний.

Уравнения для комплекснозначных амплитуд \dot{h} и \dot{u} удобно сразу записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -2 \frac{\dot{h}}{h} y_1 - \frac{1}{h} (2i\omega\lambda_B + \dot{u}) y_2 - 4\pi \frac{u}{h} y_3, \\ \dot{y}_2 &= 2\pi y_3, \\ y_3 &= -\frac{\varepsilon}{h^2} \lambda_B y_2 - \frac{\dot{h}}{h} y_3 - \pi y_4, \\ \dot{y}_4 &= (2 \frac{u}{h} \dot{h} - i\omega\lambda_B) y_1 + \frac{u}{h} (2i\omega\lambda_B + \dot{u}) y_2 + 4\pi \frac{u^2}{h} y_3, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\varepsilon^2 = 1/We$, $\lambda_B = 2\pi\varepsilon$, а $y_1 = \dot{u}$, $y_2 = \dot{h}$, $y_3 = \varepsilon \dot{h}'$, $y_4 = p$ — новые искомые функции. Во избежание малого параметра ε перед производными введена новая независимая переменная

$$\xi = z / \lambda_B, \quad (11)$$

дифференцирование по которой обозначено точкой сверху.

С точки зрения применения численных методов к системе (10) предпочтительнее решать ее совместно со стационарными уравнениями движения (1)–(3), из которых были получены аналитические выражения (4):

$$\dot{u} = \frac{\lambda_B}{2Fr(u + \varepsilon^2 h)}, \quad \dot{h} = -\frac{\lambda_B h^2}{2Fr(u + \varepsilon^2 h)}. \quad (12)$$

Систему уравнений для возмущений (10) можно существенно упростить, если пренебречь эффектами сужения/ускорения в стационарном течении. Формально это соответствует случаю $Fr = \infty$, $u = h = 1$, $\dot{u} = \dot{h} = 0$, который рассмотрен в [6]. При таких предположениях струя имеет цилиндрическую форму и равномерную вдоль оси скорость, а коэффициенты системы (10) являются постоянными, не зависящими от аксиальной координаты. Общее решение записывается в аналитическом виде:

$$y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + c_3 y^{(3)} + c_4 y^{(4)}, \quad (13)$$

где $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$; а $y^{(j)} = y^{(j)} e^{-ik_j \xi}$ ($j=1, \dots, 4$) — линейно независимые решения (10). Собственные числа k_j находятся из характеристического уравнения (дисперсионного соотношения) задачи

$$k^4 - 4\pi^2 \left(\frac{u^2}{h^2} + \frac{\varepsilon^2}{h^2} \right) k^2 + 16\pi^3 \varepsilon \omega \frac{u}{h} k - \frac{16\pi^4}{h} \varepsilon^2 \omega^2 = 0, \quad (14)$$

а через $y^{(j)}$ обозначены соответствующие им собственные векторы. Как показано в [6], дисперсионное соотношение имеет четыре действительных или два действительных и два комплексносопряженных корня; при достаточно малых ε комплексные корни находятся из асимптотических выражений

$$k_{1,2} = 2\pi\omega\varepsilon(1 \pm i\varepsilon\sqrt{1-\omega^2}). \quad (15)$$

Пользуясь произволом в выборе интегрированных постоянных c_j , можно положить $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, $c_1 = \hat{h}$ и рассматривать \hat{h} как значение амплитуды возмущения на выходе из сопла; без ограничения общности \hat{h} можно считать действительным числом. Таким образом, из всей совокупности решений (13) мы выбираем физически самое интересное, амплитуда которого возрастает вниз по течению

$$y = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_4^{(1)})^T \hat{h} e^{-ik_1 \xi}, \quad (16)$$

где $y_1^{(1)} = (4\pi\varepsilon\omega/k_1) - 2$, $y_2^{(1)} = 1$, $y_3^{(1)} = -ik_1/2\pi$, $y_4^{(1)} = (k_1^2/2\pi^2) - 2\varepsilon^2$. Оно соответствует возмущениям, распространяющимся со средней скоростью жидкости, приводящим к ее распаду на капли. Например, для возмущения радиуса \hat{h} имеем

$$\tilde{h} = \hat{h} e^{q\xi} e^{i(\omega t - \alpha\xi)}, \quad (17)$$

где $\alpha = \text{re}(k_1)$ — волновой вектор, $q = \text{Im}(k_1)$ — коэффициент возрастания возмущений.

В общем случае $Fr \neq \infty$ и систему (10) нужно решать численно. Представляется естественным начальные условия для нее выбирать в форме (16). Ниже будет видно, что из-за эффектов сужения/ускорения форма возмущений будет отличаться от (17). Как показано в [6], при конечных, но достаточно больших числах Fr влияние этих эффектов можно учесть, считая волновое число α и коэффициент возрастания q медленно меняющимися функциями ξ .

Если применять (10) вплоть до точки распада струи $|\tilde{h}| = h$, то численный счет наталкивается на трудности, вытекающие из-за наличия нейтральных, но быстро осциллирующих компонент вектора y с длиной волны порядка единицы. (В аналитическом решении (13) они соответствуют собственным числам k_3 и k_4). Их желательно избегать, так как они накладывают жесткие требования на выбор шага интегрирования, которые тем ограничительнее, чем длиннее струя (чем больше числа Вебера).

3. Упрощенные уравнения для возмущений

С тем, чтобы получить более простые уравнения для амплитудных функций \tilde{u} и \tilde{h} , можно воспользоваться преобразованием, при помощи которого в $\sqrt{2}$ доказана эквивалентность задач о временно и пространственно растущих возмущениях, а именно:

$$\theta = \alpha z - \omega t, \quad z = \varepsilon^{-1} \alpha^{-1} x, \quad (18)$$

где θ и x - новые независимые переменные. Для очень многих практически интересных случаев числа we достаточно большие и величину ε можно считать малым параметром задачи. Будем искать решение исходных уравнений движения (1)-(3) в виде

$$u = w + \varepsilon \tilde{w} = w + \varepsilon \tilde{w} e^{i\theta}, \quad h = x + \tilde{\zeta} = x + \tilde{\zeta} e^{i\theta}, \quad (19)$$

при этом, во избежание недоразумений, через $x(x)$ и $w(x)$ обозначены радиус и скорость струи как функции новой продольной координаты x . При замене переменных по формулам (18) и подстановке (19) в уравнения движения кроме стандартной линеаризации относительно малых возмущений условно также пренебрегать величинами порядка ε^2 и выше. Тогда имеем

$$w \frac{d\tilde{w}}{dx} = -ic_x \tilde{w} - \frac{d\tilde{w}}{dx} + 2i(x^{-2} - \alpha^2) \tilde{\zeta}, \quad (20)$$

$$w \frac{d\tilde{\zeta}}{dx} = -ic_x \tilde{w} - \frac{1}{2} \frac{d\tilde{w}}{dx} \tilde{\zeta} - \frac{1}{2} ix \tilde{w},$$

$$c_x = c_x(x) = \varepsilon^{-1} (w - \frac{\omega}{\alpha}).$$

Присоединяя сюда уравнения (12) для стационарных профилей x и w , переписанные в новой переменной x , получаем замкнутую систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд возмущений w и $\tilde{\zeta}$. В случае $Fr = \infty$ эта система имеет чисто аперриодическое решение ($\omega = \alpha$)

$$\tilde{\zeta} = \hat{h} e^{\sigma x}, \quad \tilde{w} = 2i\sigma \hat{h} e^{\sigma x}, \quad \sigma = (1 - \alpha^2)^{1/2} \quad (21)$$

в диапазоне волновых чисел $0 < \alpha < 1$, что является аналогом классического результата Рэлея (срав. с формулой (15)). Второе линейно независимое решение (20) затухающее. При учете сужения/ускорения струи амплитуды возмущений скорости и радиуса являются осциллирующими функциями. Без ограничения общности можно принять $\omega = \alpha$, так как, очевидно, выбор $\alpha \neq \omega$ оказывает влияние только на осциллирующую часть амплитуд.

4. Обсуждение численных результатов

В упрощенной системе (20) удалось избавиться от нейтральных быстро осциллирующих мод, что делает ее предпочтительней при численных расчетах. Преобладающее большинство численных вариантов считалось на основе (20). Для сравнения некоторые варианты были рассчитаны для полной системы (10). Численное интегрирование как упрощенной, так и полной системы проводилось методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага.

На рис. I показан набор профилей возмущенной поверхности струи $\tilde{\zeta}_z$ вплоть до точки разрыва: частота ω и число Вебера we остаются фиксированными, меняется число Fr . Хорошо видно, что длина волны возмущения возрастает вдоль оси струи тем заметнее, чем меньше число Фруда. Это соответствует выводу, сделанному в $\sqrt{5}$ при непараллельном

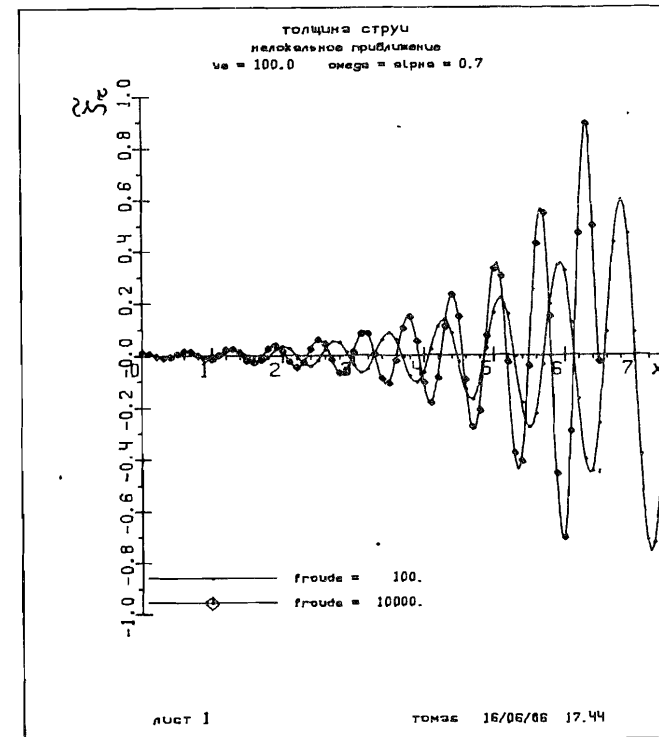


Рис. I. Профили возмущенной поверхности струи: $\omega = \alpha = 0,7, we = 100, \hat{h} = 0,01; 1 - Fr = 10000, 2 - Fr = 1000, 3 - Fr = 500, 4 - Fr = 100.$

анализе устойчивости струи. Такой результат представляется существенным, так как длиной волны определяется размер основных капель, на которые распадается струя. Его нужно иметь в виду и при нелинейном анализе неустойчивости, так как в этих условиях взаимодействие гармоник между собой будет сопровождаться локальным изменением длины волны основной моды.

Чтобы лучше выявить влияние эффектов сужения/ускорения на форму струи, на рис.2 изображены действительные части амплитуд $\bar{\zeta}_r = \text{Re}(\tilde{\zeta})$ кривых с рис.1. Рис.2 показывает, что $\bar{\zeta}_r$ является действительной амплитудой возмущенного радиуса (т.е. $|\tilde{\zeta}| = \bar{\zeta}_r$) только в асимптотическом случае $Fr = \infty$, когда она монотонно возрастает. Во всех остальных случаях $\bar{\zeta}_r$ осциллирует вниз по течению и число осцилляций до точки разрыва возрастает с уменьшением числа Fr . Кроме того, $|\bar{\zeta}_r|$ возрастает медленнее по сравнению с асимптотическим случаем, что приводит к удлинению сплошного участка струи. Локальная длина

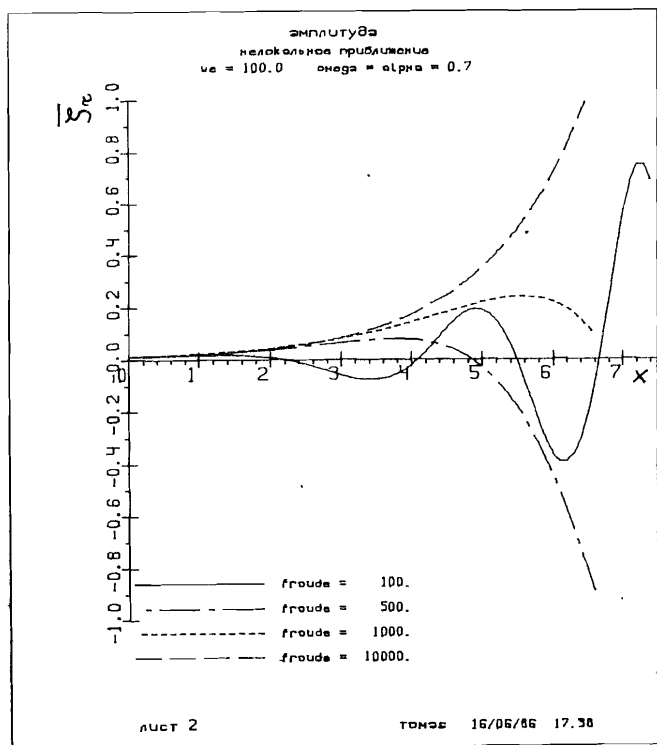


Рис.2. Комплексная амплитуда возмущенной поверхности (действительная часть); параметры и обозначения, как на рис.1.

волны струи в окрестности данного поперечного сечения выводится из соотношения (19) после перемножения обоих множителей $\bar{\zeta}$ и $e^{i\theta}$. С возрастанием числа We (см. рис.3) число осцилляций $\bar{\zeta}_r$ растет, что говорит о возрастании влияния непараллельных эффектов на динамику возмущений. Другими словами, эффекты сужения/ускорения становятся более существенными для длинных струй.

Интересно заметить, что подобные картинки формы струи можно качественно получить уже при упрощенном подходе, который применительно к системе (20) сводится к пренебрежению производными от невозмущенных профилей (но зависимость w и x от x сохраняется). Рассчитанные в таком приближении профили $\bar{\zeta}_r$ показаны для сравнения на рис.4. Также для сравнения на рис.5 показаны профили $\bar{\zeta}_r$ для случая $\omega \neq \alpha$. Как уже обсуждалось, по сравнению с рис.1 изменилась фаза осцилляций, но характер нарастания возмущений сохранился тот же.

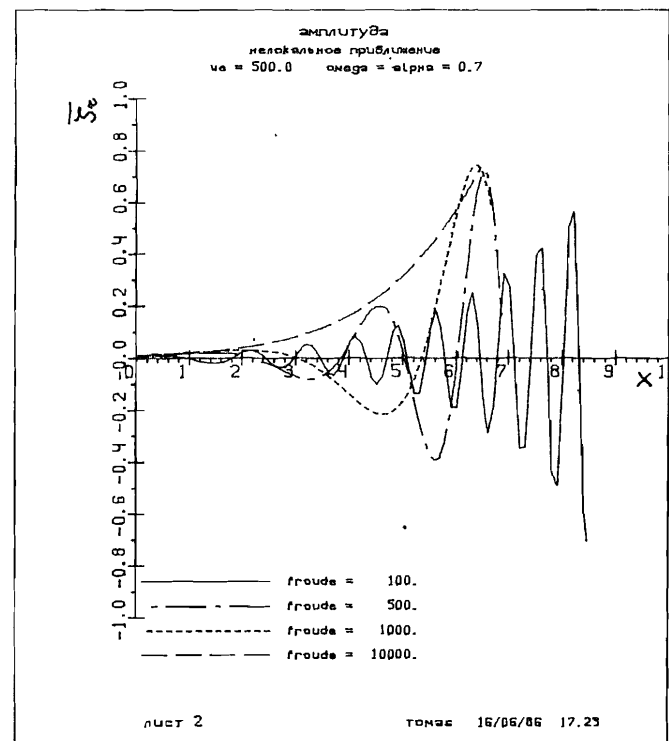


Рис.3. Влияние числа We на комплексную амплитуду: $\omega = \alpha = 0,7$, $We = 500$, $\hat{h} = 0,01$; числа Fr , как на рис.1.

В экспериментах наиболее удобная для измерения величина – это длина нераспавшегося участка струи L . В расчетах положение точки разрыва струи x_L является функцией волнового числа α , но вслед за Рэлеем длину струи принято отождествлять с минимальным значением x_L : $2L = \min x_L$. Для выяснения параметрической зависимости L от Fr и We была проведена серия расчетов, в которых точка разрыва находилась из уравнения

$$|\tilde{h}(x_L)| = h(x_L).$$

Для невязкой цилиндрической струи длина L – линейная функция параметра \sqrt{We} , в плоскости (\sqrt{We}, L) изображается прямой линией, проходящей через начало координат; угол ее наклона определяется логарифмом реципрочного значения начальной амплитуды $\ln \hat{h}^{-1}$. Такой характер изменения L описывает участок экспериментальной кри-

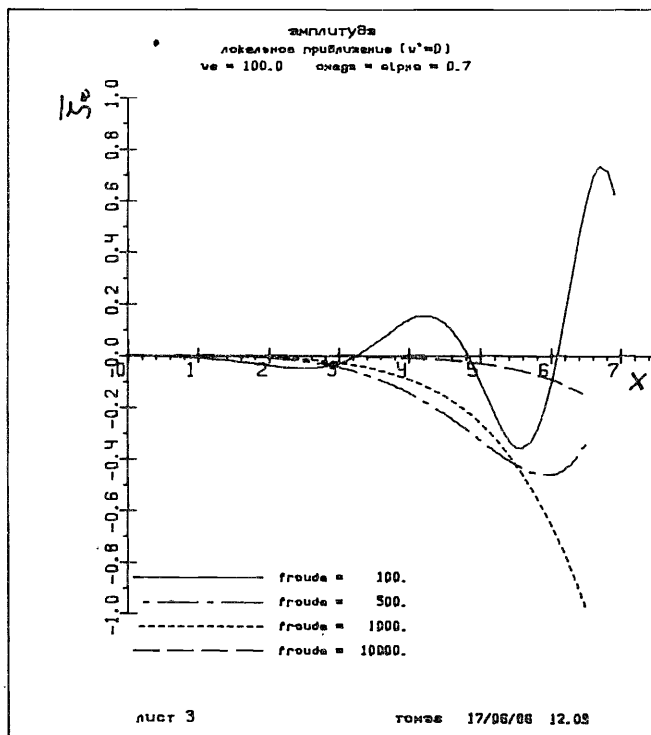


Рис.4. Комплексная амплитуда без учета кривизны; остальные параметры и обозначения, как на рис.1.

вой $L-u_N$, на котором, как известно, длина струи возрастает вместе со скоростью истечения u_N по линейному закону. За линейным участком кривая $L-u_N$ проходит через максимум, который нельзя описать в рамках модели цилиндрической струи.

К линейной зависимости длины струи от \sqrt{We} приводят и уточненные модели неустойчивости (10) и (20), включающие эффекты сужения/ускорения. На рис.6 нанесены результаты численных расчетов кривых $L-\sqrt{We}$ в разных приближениях: цилиндрическом (Рэлей), непараллельном (асимптотический анализ^{5/}) и непараллельном (численный анализ) – уравнения (10), (20) и (20) с $\frac{dw}{dx} = 0$. Вдоль всех кривых приняты постоянными начальная амплитуда ($\ln \hat{h}^{-1} = 10,72$) и отношение $we/Fr = 0,533$. Прямые, соответствующие разным приближениям, получают друг от друга параллельным переносом: ниже всех расположено классическое приближение (линия 3), выше – непараллельное асимптоти-

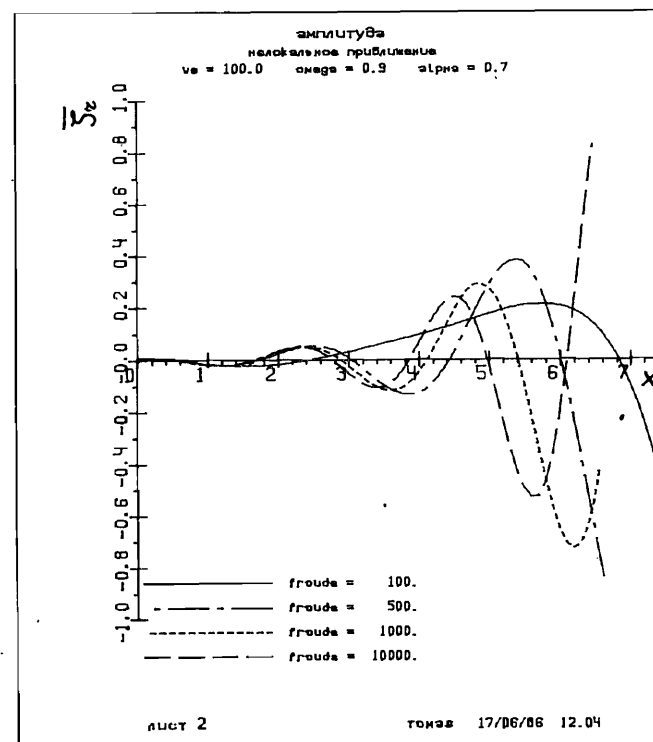


Рис.5. Эффект отношения $\omega/\alpha - \omega = 0,9$, $\alpha = 0,7$, остальные параметры и обозначения, как на рис.1.

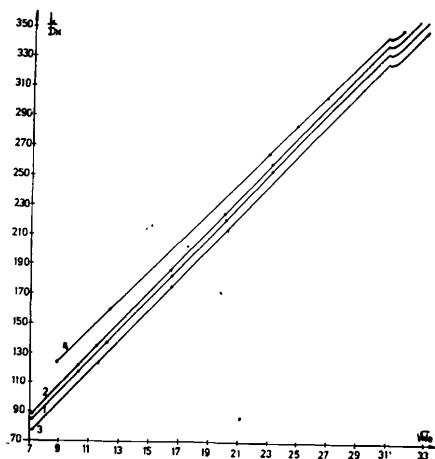


Рис. 6. Зависимость длины струи от скорости истечения: $We/Fr = 0,533$, $h\hat{h}^{-1} = 10,72$; 1 - численное решение без учета кривизны, 2 - численное решение (уравнение (20)), 3 - цилиндрическое приближение (Рэлей), 4 - непараллельный асимптотический анализ^{5/}.

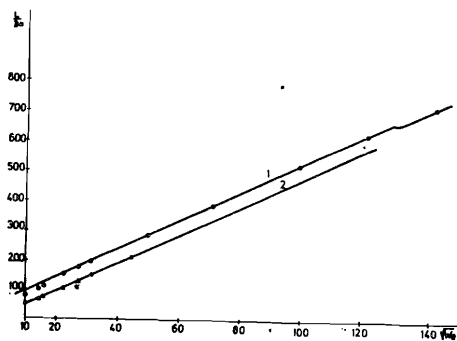


Рис. 7. Эффект отношения $We/(Fr-\hat{h}) = 0,01$; $We/Fr = 10$, 2 - $We/Fr = 0,533$.

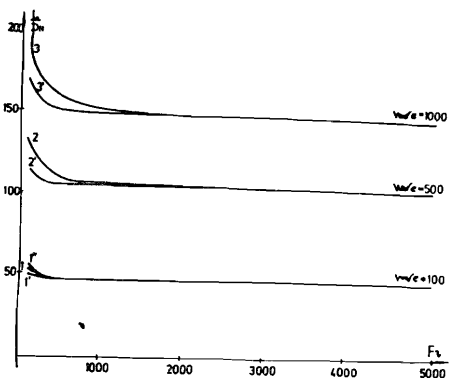


Рис. 8. Эффекты сужения/ускорения при разных We : $h\hat{h} = 0,01$; 1, 2, 3 - численный анализ (уравн. (20)); 1', 2', 3' - численный анализ без учета кривизны; 1'' - численный анализ (уравн. (10)).

ческое (линия 4), которое, кроме того, имеет слабый наклон по отношению к численному (линия 2). На линии 2 практически лежат результаты численных расчетов как по уравнениям (20), так и по (10). Сравнивая линии 2 и 1, можно сделать вывод, что вклад кривизны профиля скорости $w(x)$ (или, что то же самое - кривизны профиля струи $x(x)$) сравнительно слабый. Параллельность линии разных приближений, в частности, означает, что чем больше скорость истечения, тем меньше удлинение струи относительно классической длины. Подобный вывод можно было ожидать, так как с возрастанием скорости истечения (при фиксированных остальных параметрах) форма струи приближается к цилиндрической.

Интересно отметить, что чем ниже при расчете находится точка разрыва x_L , тем шире становится неустойчивый волновой диапазон для α , а волновое число, соответствующее минимальному x_L , сдвигается в сторону коротких волн. В частности, существуют возмущения, которые возникают как устойчивые ($\alpha > 1$) вблизи насадка и, распространяясь вниз по течению, начинают возрастать. Аналогичные выводы были получены и в^{5/}.

В экспериментальных условиях кривую $L-u_N$ снимают для жидкости с выбранными физическими свойствами и для насадка с заданными геометрическими характеристиками, варьируя скорость истечения (расход) жидкости. Как результат, отношение We/Fr , не зависящее от скорости истечения, сохраняется постоянным. На рис. 7 иллюстрируется влияние этого отношения на длину струи для трех его значений: 0,533 и 1,0 (линия 2), 10,0 (линия 1); начальная амплитуда $h\hat{h} = 0,01$. С ростом отношения We/Fr растет и длина струи, при $We/Fr = 10$ ее удлинение становится существенным ($\sim 50\%$); для значений $We/Fr < 1$ удлинение струи относительно слабое. С линией 2 совпадает и расчет по полной системе (10).

На рис. 8 при трех фиксированных значениях числа Вебера демонстрируется роль числа Фруда при определении длины нераспавшегося участка в условиях сужающегося течения: кривые 1, 2, 3 - численные расчеты по уравнениям (20), 1', 2', 3' - по тем же уравнениям без учета кривизны, 1'' - численный расчет по полной системе (10). Асимптотически при $Fr \rightarrow \infty$ все кривые стремятся к классическому пределу. Как и следовало ожидать, влияние эффектов сужения/ускорения наиболее существенно в области малых чисел Fr . По порядку величины вклад этих эффектов определяется отношением характерной длины струи ($\sim \sqrt{We}$) к характерному размеру невозмущенного течения ($\sim Fr$). Этим обосновывается отклонение кривых $L-Fr$ от их асимптотических значений. На этом же рисунке, однако, можно заметить и собственно эффект числа We , который заключается в том, что чем длиннее струя, тем воз-

действие эффектов сужения/ускорения является более "продолжительным" вдоль струи. В связи с этим область отклонений кривых $L-Fr$ смещается в сторону больших чисел Fr . Заметим, что эффекты непараллельности становятся существеннее с уменьшением начальной амплитуды \hat{h} (на рис.9 $\hat{h} = 0,01$), так как при этом струя удлиняется. Имея в виду рис.8 и рис.2, можно условно принять, что классическое приближение Рэлея применимо в области $\frac{We}{Fr} \ll 1$. Вне этой области нужно принимать во внимание эффекты непараллельности.

На рис.9 изображены кривые $L-Fr$, полученные для различных приближений при начальной амплитуде $\ln \hat{h}^{-1} = 10,72$ и числе $We = 100$. Подтверждается вывод о слабом влиянии кривизны профиля струи (кривая 2). Интересно, что (как и на рис.6) кривая 3 - асимптотическое не-

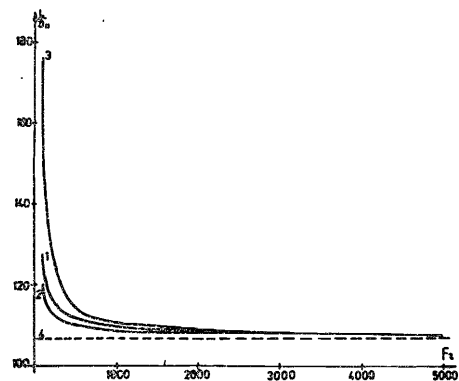


Рис.9. Эффект числа Fr : $We = 100$, $\ln \hat{h}^{-1} = 10,72$; 1 - численный анализ (уравн.(20)), 2 - численный анализ без учета кривизны, 3 - непараллельный асимптотический анализ^{/5/}, 4 - цилиндрическое приближение (Рэлей).

параллельное приближение^{/5/} - расположена выше кривой 1 - численного решения. Вероятнее всего, это вызвано тем, что в области допустимо малых Fr , асимптотический анализ переоценивает роль кривизны профиля струи. В качестве верхней оценки применимости асимптотического непараллельного анализа можно принять $\frac{We}{Fr} < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Radev S., Chavdarov B., Penchev I. Theor. Appl. Mech., Bulg. Acad. Sci, 1983, 1, p. 70-78.
2. Маркова Н.М., Шкадов В.Я. Изв. АН СССР - МЖГ, 1972, №3, стр.32.
3. Gospodinov P.N., Penchev I.P., Radev S.P. Int. J. Mult. Flow, 1979, 5, p. 87.

4. Radev S., Asanuma T., Iijima T., Ennoji H. Proc. Fac. Engrng. Tokai Univ., 1984, 10, p. 69-82.
5. Radev S. Theor. Appl. Mech., Bulg. Acad. Sci., 1985, 1.
6. Pimbley W.I. IBM J. Res. Develop., 1976, 20, p. 148.
7. Rayleigh J.S. Proc. Lond. Math. Soc., 1978, 10, p. 4.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июня 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Радев С.П., Бояджиев Т.Л.

P5-86-402

Численный анализ неустойчивости сужающихся длинных капиллярных струй

Численно исследуется устойчивость одномерной струи невязкой жидкости. Показано, что длина нераспавшейся части струи является линейной функцией скорости истечения. При достаточно длинных струях поправки из-за непараллельности невозмущенного течения становятся существенными и их следует учитывать при расчете диаметра основных капель.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Radev S.P., Boyadjiev T.L.

P5-86-402

Numerical Analysis of the Instability of Long Convergent Capillary Jets

The stability of one-dimensional jet of inviscid fluid is investigated numerically. It is shown that the length of the undecayed part of the jet is a linear function of the speed of outflow. When the jets are sufficiently long the corrections due to the nonparallelism of the unperturbed flow become essential and they have to be taken into account in computing the diameter of the base drops.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986.