сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-86-371

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков*

КЛАССИФИКАЦИЯ НА ЭВМ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА ТИПА МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

* Саратовский государственный университет

1986

I. Введение

В настоящей работе доказывается, что интегрируемые уравнения седьмого порядка типа модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза (МКдВ) исчерпываются симметриями известных интегрируемых уравнений пятого порядка того же типа.

Уравнением типа МКдВ порядка $n=2k+1$ $(k=1,2,3,\dots)$ будем называть уравнение вида

$$u_t=D\,\frac{\delta P(u,u_1,\dots,u_k)}{\delta u}\ ,\quad u\equiv u(x,t)\ ,\quad u_i\equiv D^i(u)\ ,\quad D\equiv\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad (I)$$

где $\dfrac{\delta}{\delta u}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}(-1)^i D^i\,\dfrac{\partial}{\partial u_i}$, $P(u,u_1,\dots,u_k)=\dfrac{(-1)^k}{2}u_k^2+\widetilde{P}(u,u_1,\dots,u_{k-1})$

– однородный полином, такой, что при преобразованиях $u\to\lambda u$, $x\to\lambda^{-1}x$ ($\lambda=\mathrm{const}$) он преобразуется по правилу $P\to\lambda^{2(k+1)}P$.

При $k=1$ $(n=3)$ существует единственное интегрируемое нелинейное уравнение вида (I) – собственно уравнение МКдВ [I]:

$$u_t=u_3+3u^2u_1\ . \qquad (2)$$

При $k=2$ $(n=5)$ существует два интегрируемых нелинейных уравнения типа МКдВ [2]:

$$u_t=u_5+5u^2u_3+20uu_1u_2+5u_1^3+\frac{15}{2}u^4u_1\ , \qquad (3)$$

$$u_t=u_5+5u_1u_3-5u^2u_3+5u_2^2-20uu_1u_2-5u_1^3+5u^4u_1\ . \qquad (4)$$

Уравнение (3) является симметрией уравнения (2), а уравнение (4) получается в результате дифференциальной подстановки первого порядка из уравнения Савады-Котеры [3].

В настоящей работе рассматривается случай $k=3\,(n=7)$. В этом случае уравнение (I) можно без ограничения общности записать в следующем виде:

$$u_t=u_7+\lambda_1(u_1u_5+3u_2u_4+2u_3^2)\ + \qquad (5)$$

$$+\ \lambda_2(u^2u_5+6uu_1u_4+10uu_2u_3+6u_1^2u_3+7u_1u_2^2)\ +$$

$$+\lambda_3(2u_1u_2^2+u_1^2u_3)+$$

$$+\lambda_4(3u^2u_1u_3+12uu_1^2u_2+3u^2u_2^2+2u_1^4)+$$

$$+\lambda_5(u^4u_3+8u^3u_1u_2+6u^2u_1^3)+\lambda_6u^6u_1\quad,$$

$\lambda_i = \mathrm{const}$.

Задача состоит в классификации уравнений вида (5) (нахождении всех наборов λ_i), удовлетворяющих необходимым условиям интегрируемости.

2. Метод классификации

Для решения поставленной выше классификационной задачи мы существенно использовали программу FORMINT /4/ на языке аналитических вычислений PL/1-FORMAC /5/. В основе программы FORMINT лежит метод исследования и классификации интегрируемых эволюционных уравнений, предложенный Н.Х.Ибрагимовым и А.Б.Шабатом /6/. Ниже кратко излагаются ключевые моменты метода Ибрагимова-Шабата.

Согласно работе /6/, под интегрируемостью эволюционного уравнения

$$u_t = F(u,u_1,\dots,u_n) \tag{6}$$

понимается существование псевдодифференциального оператора $L=\sum_{i=-\infty}^{1} a_i(u,u_1,\dots,u_{k_i})D^i$, удовлетворяющего соотношению

$$\partial_F L = [F_*, L]\quad, \tag{7}$$

где $F_*=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_i}D^i$, $\partial_F=\sum_{i=0}^{\infty}(D^iF)\frac{\partial}{\partial u_i}$, $\partial_F L=\sum_{i=-\infty}^{1}(\partial_F a_i)D^i$.

Как показано в /6,1/, из разрешимости соотношения (7) следует, что уравнение (6) обладает бесконечным набором симметрий и бесконечной серией законов сохранения.

Напомним, что симметрией порядка k для уравнения (6) называется уравнение вида

$$u_t=H(u,u_1,\dots,u_k)\quad, \tag{8}$$

такое, что $H_*F=F_*H$. Если H отлично от u_1 и F , то симметрия называется нетривиальной.

Законом сохранения для уравнения (6) называется соотношение вида

$$\partial_F p(u,u_1,\dots,u_\ell)\in \mathrm{I_m}D\quad, \tag{9}$$

т.е. выражение $\partial_F p$ является полной производной по x . Заметим, что соотношение (9) не меняется при заменах $p\to p+Dq(u,u_1,\dots)$, где q – произвольная функция. В частности, если $p\in \mathrm{I_m}D$, то можно считать $p=0$. В этом случае закон сохранения (9) называется тривиальным.

Требование разрешимости операторного соотношения (7) накладывает жесткие ограничения на вид правой части эволюционного уравнения (6) и лежит в основе метода классификации. Как показано в /6/, оператор L (если он существует) порождает для уравнения (6) бесконечную серию законов сохранения вполне определенного вида:

$$\partial_F R_m\in \mathrm{I_m}D\ ,\quad R_m=\mathrm{Res}(L^m)\ ,\quad m=1,2,3,\dots, \tag{10}$$

где $\mathrm{Res}(\sum_i a_iD^i)\equiv a_{-1}$.

Соотношения (10) представляют собой необходимые условия интегрируемости уравнения (6). Выражая рекуррентным образом несколько первых плотностей R_m $(m=1,2,3,\dots,M)$ в терминах F и накладывая условия (10), можно получить переопределенную систему дифференциальных уравнений на F . Ее решение приводит к конечному (с точностью до преобразований $u\to\varphi(u)$) списку конкретных эволюционных уравнений (6), удовлетворяющих нескольким необходимым условиям интегрируемости. Дальнейшее исследование полученных списков включает проверку условий (10) при $m=M+1,\ M+2,\dots$ и исключение неинтегрируемых случаев, а также нахождение нетривиальных симметрий эволюционных уравнений, для которых все рассмотренные условия интегрируемости оказались выполненными.

Изложенная выше схема классификации и исследования интегрируемых уравнений полностью реализована в программе FORMINT . Программа FORMINT позволяет для любого уравнения вида (6) (с явно или неявно заданной функцией F) вычислять плотности R_m законов сохранения (10) в терминах F , проверять соответствующие условия интегрируемости и получать эквивалентные им соотношения на F , а также вычислять симметрии любого заданного порядка. Единственный пункт изложенной схемы – решение переопределенных систем уравнений на F – пока не поддается алгоритмизации (по крайней мере, в общем случае) и должен выполняться вручную.

3. Классификация уравнений седьмого порядка типа MKdV

С помощью программы FORMINT мы вычислили для уравнения (5) плотности R_m законов сохранения (10) при $m=1,3,5$ (можно показать, что при четных m условия (10) выполняются без ограничений на параметры λ_i):

$$R_1 = \frac{2}{7}\lambda_2 u^2$$

$$R_3 = a_1 u_1^2 + a_2 u^4 \quad ,$$

$$a_1 = -\frac{12}{7}\lambda_2 + \frac{3}{7}\lambda_3 - \frac{6}{49}\lambda_1^2 \quad ,$$

$$a_2 = \frac{3}{7}\lambda_5 - \frac{6}{49}\lambda_2^2 \quad ,$$

$$R_5 = b_1 u_2^2 + b_2 u_1^3 + b_3 u^2 u_1^2 + b_4 u^6 \quad ,$$

$$b_1 = \frac{5}{7}\lambda_2 \ ,$$

$$b_2 = \frac{30}{49}\lambda_1\lambda_2 - \frac{10}{49}\lambda_1\lambda_3 - \frac{5}{7}\lambda_4 + \frac{15}{343}\lambda_1^3 \quad ,$$

$$b_3 = -\frac{30}{7}\lambda_5 - \frac{30}{49}\lambda_1\lambda_4 - \frac{10}{49}\lambda_2\lambda_3 + \frac{45}{343}\lambda_1^2\lambda_2 + \frac{80}{49}\lambda_2^2 \quad ,$$

$$b_4 = -\frac{10}{49}\lambda_2\lambda_5 + \frac{5}{7}\lambda_6 + \frac{15}{343}\lambda_2^3 \quad .$$

Затем, проверяя на ЭВМ условия (10), мы получили, что при $m=1$ условие (10) выполняется автоматически, а при $m=3,5$ приводит к следующей системе алгебраических уравнений на параметры λ_i :

$$a_1\lambda_1 = 0 \qquad (12.1)$$

$$a_1\lambda_2 + 14a_2 = 0 \qquad (12.2)$$

$$a_1\lambda_4 = 0 \qquad (12.3)$$

$$a_1(6\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4) + 168a_2 = 0 \qquad (12.4)$$

$$a_1\lambda_5 + 5a_2\lambda_2 = 0 \qquad (12.5)$$

$$5b_1\lambda_1 + 21b_2 = 0 \qquad (12.6)$$

$$10b_1\lambda_2 + 14b_3 = 0 \qquad (12.7)$$

$$105b_4 - 5b_1\lambda_5 - b_3\lambda_2 = 0. \qquad (12.8)$$

Если подставить в (12) значения a_i , b_i согласно (11), то получится система из 8 алгебраических уравнений третьей степени относительно 6 неизвестных λ_i . Решение такой системы стандартными методами является весьма трудоемкой задачей. Ниже описывается метод

решения, эффективно использующий специальную структуру системы (12) и позволяющий легко найти все ее решения.

Предлагаемый метод состоит в переборе всех возможных случаев, когда некоторые из плотностей R_m $(m=1,3,5)$ равны нулю (соответствующие законы сохранения тривиальны), а остальные отличны от нуля (всего 8 случаев). В каждом таком случае система (12) резко упрощается. В самом деле, если для некоторого $m, R_m = 0$, то приравнивая нулю коэффициенты a_i или b_i в (11), получаем простую связь между параметрами λ_i . Например, из условия $R_3=0$ сразу получаем $\lambda_3 = 4\lambda_2 + \frac{2}{7}\lambda_1^2$, $\lambda_5 = \frac{2}{7}\lambda_2^2$. Если же $R_m \neq 0$, то некоторые из соответствующих коэффициентов a_i или b_i должны быть отличны от нуля. В этом случае (12) рассматривается как линейная система относительно неизвестных a_i или b_i и приравниваются нулю детерминанты ее различных подсистем. Например, из условия $R_3 \neq 0$ и равенства нулю детерминанта подсистемы (12.2), (12.5) получаем $\lambda_5 = \frac{5}{14}\lambda_2^2$. Действуя таким способом в каждом из восьми случаев, мы либо найдем решение, последовательно исключая неизвестные, либо придем к противоречию, означающему отсутствие решений. Покажем, например, что при $R_1=0$, $R_3 \neq 0$ и любом R_5 система (12) не имеет решений. В самом деле, из равенства $R_1=0$ получаем $\lambda_2=0$. Тогда из неравенства $R_3 \neq 0$ и уравнения (12.2) следует, что $a_1 \neq 0$, $a_2=0$. С учетом этого из уравнений (12.1), (12.3) и (12.4) получаем: $\lambda_1=\lambda_4=\lambda_3=0$. Но тогда согласно (11), $a_1=0$, то есть приходим к противоречию.

Применяя описанный выше метод, мы получили, что (12) имеет решение только в трех из восьми случаев:

а) $R_1=0$, $R_3=0$, $R_5 = 0$

$$\lambda_i = 0, \quad i=1,\dots 6 \ . \qquad (13)$$

б) $R_1 \neq 0$, $R_3 \neq 0$, $R_5 \neq 0$

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=7, \quad \lambda_3=21, \quad \lambda_4=0, \quad \lambda_5=\frac{35}{2}, \quad \lambda_6=\frac{35}{2} \qquad (14)$$

в) $R_1 \neq 0$, $R_3 = 0$, $R_5 \neq 0$

$$\lambda_1=7, \quad \lambda_2=-7, \quad \lambda_3=-14, \quad \lambda_4=-\frac{14}{3}, \quad \lambda_5=14, \quad \lambda_6=-\frac{28}{3} \ . \qquad (15)$$

В случае (13) уравнение (5) превращается в линейное $u_t=u_7$, у которого все законы сохранения (10) тривиальны, а в случаях (14), (15) представляет собой симметрию седьмого порядка уравнений (3) и (4) соответственно. Таким образом, мы получили, что список интегрируемых уравнений седьмого порядка типа MKdV исчерпывается симметриями известных уравнений.

В заключение отметим, что описанный выше метод решения алгебраических систем является весьма общим и применим в задачах классификации интегрируемых однородно-полиномиальных эволюционных уравнений и систем (о реализации на ЭВМ техники Ибрагимова-Шабата в случае систем уравнения см.[7]). В таких задачах решение переопределенных систем на правые части эволюционных уравнений сводится к решению алгебраических систем типа (I2) и может быть выполнено на компьютере. Общий алгоритмический подход к решению систем алгебраических уравнений основан на использовании канонических полиномиальных базисов (базисов Гребнера), введенных Б.Бухбергером[8]. Алгоритм Бухбергера позволяет преобразовать исходную систему в эквивалентную ей систему уравнений, удобную для решения на ЭВМ как численными, так и аналитическими методами. Последние базируются на разнообразных алгоритмах разложения полиномов на множители[9], встроенных в наиболее развитые системы аналитических вычислений, например, REDUCE-3[10]. Полностью же алгоритм решения систем алгебраических уравнений, основанный на технике базисов Гребнера, реализован в системе SAC-2 и новой версии системы REDUCE [11]. Этот алгоритм весьма эффективен для небольших систем. Однако требуемый объем вычислений резко нарастает с ростом числа и порядка алгебраических уравнений, что может привести к нехватке ресурсов ЭВМ при решении конкретных классификационных задач. Так, например, для проверки решения переопределенных алгебраических систем, возникающих при классификации уравнений 7-го и 9-го порядков типа обыкновенного КдВ[12], была использована реализация алгоритма Бухбергера, описанная в работе[11]. Ранее решения были получены нами вручную с помощью описанного выше метода. Оказалось, что в случае уравнений типа КдВ 7-го порядка, соответствующая алгебраическая система из I3 уравнений на 7 неизвестных была решена на IBM 3081D за I,5 минуты, причем результаты полностью совпали с результатами ручных вычислений. Что касается уравнений типа КдВ 9-го порядка, порождающих систему 32 алгебраических уравнений на I3 неизвестных, то в этом случае ресурсов IBM 3081D оказалось недостаточно для построения базиса Гребнера за разумное время.

Таким образом, для эффективного решения классификационных задач на ЭВМ необходима комбинация нашего метода и алгоритма Бухбергера. При таком подходе мы фактически имеем дело не с одной алгебраической системой типа (I2), а с большим числом различных подсистем, соответствующих фиксированным наборам условий тривиальности (нетривиальности) различных законов сохранения (I0). Как мы видели на примере системы (I2), в каждом таком случае проблема резко упрощается. В настоящее время ведется работа по формализации изложенного подхода. Это позволит полностью автоматизировать процедуру классификации однородно-полиномиальных эволюционных систем.

Авторы выражают благодарность А.Б.Шабату, В.В.Соколову и С.И.Свинолупову за полезные обсуждения, а также Б.Бухбергеру и Р.Гебауэру за проверку на ЭВМ найденных нами в работе[12] решений переопределенных алгебраических систем.

Литература

I. Свинолупов С.И., Соколов В.В. Функциональный анализ, I982, I6, с.86.
2. Жарков А.Ю., Свинолупов С.И., Соколов В.В. Деп. ВИНИТИ, № 4384-84, 9 с.
3. Sawada K., Kotera T. Progr. Theor. Phys., 1974, 51, p.1355.
4. Gerdt V.P., Shvachka A.B., Zharkov A.Yu. Comp. Phys. Comm., 1985, 34, p.303.
Gerdt V.P., Shvachka A.B., Zharkov A.Yu. J.Symb. Comp., 1985, 1, p.101.
5. Bahr K.A. FORMAC 73 User's Manual, GMD/IFV, Darmstadt, 1973.
6. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Функциональный анализ, I980, I4, с.79.
7. Гердт В.П., Жарков А.Ю. В кн.: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. ОИЯИ, ДII-85-79I, Дубна, I986.
8. Buchberger B. In: Progress, Directions and Open Problems in Multidimensional System Theory (ed. Bose N.K.) Dordrecht, Reidel, 1985, p.184.
9. Kaltofen E.L. In: Computer Algebra. Symbolic and Algebraic Computation (eds. Buchberger B., Collins G.E., Loos R.), 2nd ed. Springer-Verlag, Vienna, 1983, p.95.
I0. REDUCE User's Manual. Version 3.0. (ed. Hearn A.C.) Rand Publication CP78 (4/83), Santa Monica, 1983.
II. Boege W., Gebauer R., Kredel H. J. Symb. Comp., 1986, 2, 83.
I2. Гердт В.П., Жарков А.Ю., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р5-84-489, Дубна, I984.

Рукопись поступила в издательский отдел
II июня I986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XП Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Гердт В.П., Жарков А.Ю. Р5-86-371

Классификация на ЭВМ интегрируемых уравнений седьмого порядка типа модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза

Рассмотрены нелинейные эволюционные уравнения седьмого порядка типа модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза. С помощью программы FORMINT на языке аналитических вычислений PL/1-FORMAC получены необходимые условия интегрируемости таких уравнений, сводящихся к системе нелинейных алгебраических уравнений. Путем решения последних показано, что все интегрируемые случаи соответствуют симметриям известных интегрируемых уравнений пятого порядка того же типа.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод В.П.Гердта

Gerdt V.P., Zharkov A.Yu. P5-86-371

Computer Classification of Integrable Seventh Order MKdV-Like Equations

Nonlinear evolution 7-th order modified Korteveg-de Vries (MKdV)-like equations are considered. Necessary conditions of integrability in the form of nonlinear algebraic equations are obtained with the help of FORMINT code written in the computer algebra system PL/1-FORMAC language. It is shown that all integrable cases correspond to symmetries of the known integrable 5-th order MKdV-like equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986