сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-364

Л.А.Бордаг, А.В.Китаев

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

1986

Введение

Настоящая публикация является непосредственным продолжением работы/I/. В первой части была дана классификация алгебраических преобразований, действующих на решениях третьего уравнения Пенлеве:

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\frac{1}{z}\left(\alpha w^2+\beta\right)+\gamma w^3+\frac{\delta}{w}, \qquad (P_3)$$

на решениях пятого уравнения Пенлеве:

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\left(\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w+\frac{\beta}{w}\right)+\frac{\gamma w}{z}+\frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \qquad (P_5)$$

а также преобразований, переводящих решения одного из уравнений в решения другого. Там же были уточнены теоремы о рациональных и алгебраических решениях P_3. Из-за недостатка места теоремы об алгебраических решениях P_5 и об одном из классов рациональных решений P_5 помещены в этой работе*. В следующей публикации речь пойдет о рациональных решениях P_5, растущих или убывающих при $z\to\infty$. Во всех публикациях мы сохраняем единые обозначения.

I. Алгебраические решения уравнения

В работе/2/ уже изучались алгебраические решения P_5 и были получены необходимые и достаточные условия на параметры P_5, при которых оно имеет алгебраические решения. Приводимая здесь теорема уточняет имеющиеся результаты.

Теорема I. Уравнение P_5 имеет алгебраические решения только при $\delta=0$, а также если при $\gamma_5^2=1$ выполнено хотя бы одно из условий

$$\alpha_5=(2n+1)^2/8, \qquad \text{(Ia)}$$

$$\beta_5=-(2n-1)^2/8, \quad n\in\mathbb{Z}. \qquad \text{(Iб)}$$

* В первой публикации/I/ нами замечены 2 опечатки: на странице 7 в формулах (I6) нужно заменить $\sqrt{\delta}\to\sqrt{-\delta}$ и на странице I7 во второй формуле сверху ${}^5\gamma_i=0\to{}^5\gamma_i=c$.

Для фиксированного набора параметров у P_5 существует 2 решения с асимптотиками

$$w^{1,2}(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \pm\sqrt{\frac{\gamma z}{\alpha}} + \ldots$$

при выполнении первого условия (Iа) и 2 решения с асимптотиками $w^{3,4}(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \pm\sqrt{-\beta/\gamma z} + \ldots$, если выполнено второе условие (Iб). При выполнении обоих условий (I) одновременно уравнение имеет 4 алгебраических решения для данного набора параметров. Все алгебраические решения P_5 получаются из рациональных решений P_3 с помощью преобразования Бэклунда (35)(см. приложение 2).

Доказательство. В работе [2] уже показано, что рациональные решения P_3 и алгебраические решения P_5 взаимно однозначно связаны между собой с помощью преобразований Бэклунда (ПБ) вида (35) и обратного ему. Воспользуемся теперь теоремой о рациональных решениях P_3 [1] и сразу убедимся в справедливости теоремы I.

2. О рациональных решениях пятого уравнения Пенлеве

Рациональные решения P_5 изучались в работе [3], где было показано, что при $\delta \neq 0$ они имеют вид

$$w(z) = \lambda z + \mu + P_{n-1}(z)/Q_n(z)\,, \quad \lambda, \mu - const,$$

P_{n-1} и Q_n - полиномы ($n-1$)-и n- степеней. Эти решения естественно разделить на три типа. К первому типу отнесем решения, для которых $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, ко второму - решения с $\lambda = \mu = 0$ и к третьему- с $\lambda \neq 0$. Решения второго и третьего типа связаны между собой инверсией. Подробнее решения второго и третьего типов будут рассмотрены в следующей публикации. Остановимся на решениях типа I. В работах [4,5] содержится утверждение, что для существования рациональных решений типа I необходимо и достаточно, чтобы параметры удовлетворяли условию $\sqrt{-2\beta} - \sqrt{2\alpha} = n$, n- целое. Нетрудно убедиться, что это условие не является достаточным. В этом параграфе будет доказана теорема о рациональных решениях P_5 типа I и приведены необходимые и достаточные условия на параметры, при которых эти решения существуют.

Отметим прежде всего, что из рассмотрения возможных типов разложений решений P_5 в окрестности 0 , ∞ и некоторой конечной точки z_0 следует, что P_5 может иметь рациональные решения только при $\delta \neq 0$. Если $\delta \neq 0$, то с помощью масштабного преобразования [1] можно всегда добиться $\delta = -1/2$, этим мы будем пользоваться в примерах. Покажем единственность решения типа I.

Лемма I. Если решение $w(z)$ имеет лорановское разложение

$$w(z) \underset{z\to\infty}{=} \mu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{z^k}\,, \quad \mu_0 \neq 0\,, \tag{2}$$

то $\mu_0 = -1$ и решение единственно для фиксированного набора параметров.

Доказательство. Разложение (I) для рациональных решений будет лорановским; подставляя его в P_5 , с необходимостью получаем, что

$$\mu_0 = -1,\ \mu_1 = \frac{2\gamma}{\delta},\ \mu_2 = \frac{8(\alpha+\beta)}{\delta} - \frac{2\gamma^2}{\delta^2}, \ldots, \mu_{s+4} = \frac{2}{\delta} P(\mu_0, \ldots, \mu_{s+3}),\ s = -1, 0, 1, \ldots,$$

P - полином. Все коэффициенты этого разложения однозначно определяются по параметрам уравнения P_5 , следовательно, рациональное решение типа I единственно для фиксированного набора параметров.

Теорема 2. Уравнение P_5 ($\delta \neq 0$) имеет рациональные решения типа I тогда и только тогда, если его параметры удовлетворяют одному из условий*

$$\sqrt{2\alpha} + \sqrt{-2\beta} = m\,, \quad \frac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}} = 2n - m\,, \tag{3а}$$

$$\sqrt{2\alpha} = m + \frac{1}{2}\,, \quad \sqrt{-2\beta} = n + \frac{1}{2}\,, \quad \gamma \neq 0 \tag{3б}$$

и это решение единственно для каждого фиксированного набора параметров. Все решения типа I получаются путем итераций по формулам (36) из простейшего решения

$$w_0(z) = -1\,, \qquad \chi_0 = \begin{Bmatrix} \alpha = \alpha_0 \\ \beta = -\alpha_0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = \delta_0 \end{Bmatrix}\,, \quad \alpha_0, \delta_0 \in \mathbb{C}\,. \tag{4}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем лемму 2.

Лемма 2. Все рациональные решения, получаемые из $w_0(z)$, (4), при многократном применении ПБ(36) будут иметь следующую асимптотику: $w(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} -1 + O(1/z)$, и их параметры будут удовлетворять одному из условий (3).

Доказательство. Из выражения для ПБ(36) сразу следует, что если исходное решение имело поведение $w_i(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} -1 + O(1/z)$, то и новое решение будет иметь ту же асимптотику, т.е. будет решением типа I. Осталось только показать, что при последовательных итерациях

* В этих условиях мы предполагаем, что существует некоторый выбор ветвей корней, когда эти равенства выполнены.

мы от параметров χ_0 (4) можем придти только к параметрам, удовлетворяющим одному из условий (3). По существу, это уже было сделано в работе /2/, т.к. нетрудно показать, что условия (3) эквивалентны приведенным в работе /2/.

Доказательство теоремы 2. В леммах I и 2 мы уже доказали единственность решений типа I для фиксированного набора параметров и показали, что из $\mathcal{W}_0(z)$ (4) итерациями по формулам (3б) порождается семейство рациональных решений типа I и их параметры удовлетворяют одному из условий (3). Более того, т.к. условия (3) эквивалентны приведенным в работе /2/, можно утверждать, что как только для некоторого рационального решения параметры удовлетворяют условиям (3), то, многократно применяя к нему ПБ(3б), мы можем свести это решение к $\mathcal{W}_0(z)$, (4). Осталось показать, что параметры всех рациональных решений типа I будут удовлетворять одному из условий (3), и тогда, используя единственность, мы можем сразу утверждать, что все решения типа I порождаются из $\mathcal{W}_0(z)$, (4), итерациями с помощью ПБ(3б).

Предположим, что в уравнении P_5 параметр $\alpha \neq 0$. Изучим лорановское разложение искомого рационального решения в некоторой конечной точке z_0. Мы видим, что если $\alpha \neq 0$, то в точке z_0 решение либо может иметь полюс не выше первого порядка, причем разложение имеет вид

$$\mathcal{W}(z) \underset{z \to z_0}{=} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_{-1} = \frac{z_0}{\sqrt{2\alpha}}, \quad a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_1 = f(a_{-1}, a_0), \ldots,$$

либо голоморфно и отлично от нуля, либо имеет в точке z_0 нуль первого порядка при $\beta \neq 0$ и первый коэффициент разложения имеет вид $a_1 = \sqrt{-2\beta}/z_0$. Отсюда сразу же следует, что если $\beta = 0$, то у рационального решения P_5 нуль может быть только в точке $z = 0$. Таким образом, любое рациональное решение типа I может быть записано в виде

$$\mathcal{W}(z) = -1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{z_i}{z - z_i} - \sum_{i=p+1}^{n} \frac{z_i}{z - z_i} \right). \tag{5}$$

С другой стороны, лорановское разложение рационального решения в нуле, как легко показать, имеет следующий вид:

$$\mathcal{W}(z) \underset{z \to 0}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \text{где} \tag{6}$$

либо $a_0 = \sqrt{-\beta/\alpha}$,

либо $a_0 = 1$ $\quad (\gamma \neq 0)$,

либо $a_0 = 0$, $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_n \neq 0$,

при $\alpha = n^2/2$, $\beta = 0$.

Положим теперь в выражении (5) $z = 0$, тогда $\mathcal{W}(0) = -1 + \frac{n-2p}{\sqrt{2\alpha}}$ *.

Сравнивая полученное значение $\mathcal{W}(0)$ и выражение (6), мы видим, что должно быть выполнено одно из следующих условий на параметры рационального решения типа I:

$$\sqrt{2\alpha} + \sqrt{-2\beta} = n - 2p, \tag{7а}$$

$$\sqrt{2\alpha} = \frac{n-2p}{2}, \quad \gamma \neq 0, \tag{7б}$$

$$\alpha = \frac{n^2}{2}, \quad \beta = 0 \quad \text{(здесь либо } p = 0 \text{, либо } 2p = n\text{)}. \tag{7в}$$

Рассмотрим последовательно эти случаи. Заметим, что в последнем случае $\beta = 0$ и, следовательно, решение может обратиться в нуль только в нуле, т.е. (5) можно переписать так:

$$\mathcal{W}(z) = -\frac{z^n}{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)}, \quad \alpha = \frac{n^2}{2}, \quad \beta = 0. \tag{8}$$

С другой стороны, из $p = 0$ или $p = n/2$ следует, что все вычеты в полюсах этого решения имеют одинаковый знак и решение можно записать в виде

$$\mathcal{W}(z) = -1 - \frac{1}{|\sqrt{2\alpha}|} \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{z - z_i} = -1 - \frac{1}{|\sqrt{2\alpha}|} \frac{\sum_{\ell=1}^{n} z^{n-\ell} (-1)^\ell \ell S_n^\ell}{\prod_{\ell=1}^{n} (z - z_\ell)}, \tag{9}$$

где S_n^ℓ - симметрическая функция ℓ-порядка из n величин $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Сравнивая выражения (8) и (9), мы получаем, что все $S_n^\ell = 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, n-1$, т.е. все такие решения, можно записать в виде

$$\mathcal{W}(z) = -\frac{z^n}{z^n - c}, \quad \alpha = \frac{n^2}{2}, \quad \beta = 0. \tag{10}$$

Непосредственная подстановка (I0) в P_5 дает, что n может быть равно I или 2, т.е. существует только два решения такого вида, это

$$\mathcal{W}^1(z) = -\frac{z}{z - a}, \quad a = \frac{4}{\sqrt{-2\delta}}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \sqrt{-2\delta}$$

---

* Знак корня здесь неким произвольным образом фиксирован.

и $$w^2(z) = -\frac{z^2}{z^2+a}, \quad a = \frac{16}{\delta}, \quad \alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 0. \qquad (\mathrm{II})$$

Параметры этих решений удовлетворяют условиям (7) при $\beta = 0$, $p = 0$ и условиям (3). Поскольку $\tilde{w}(z) = w^{-1}(z)$ также является решением P_5 с параметрами $\tilde{\alpha} = -\beta$, $\tilde{\beta} = -\alpha$, $\tilde{\gamma} = -\gamma$, $\tilde{\delta} = \delta$, то отдельно рассматривать случай $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ нет необходимости. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ мы получим инверсией из (II) также только 2 решения и параметры этих решений удовлетворят условиям (7) и (3). Значит, последнее условие (7в) можно считать частным случаем первого. Покажем, что и второе условие (7б) сводится к первому. Пусть выполнено условие (7б), тогда $\beta \neq 0$, т.к. если бы $\beta = 0$, то у решения единственный нуль мог бы быть только в нуле, но это условие выводилось в предположение, что в нуле решение равно 1., значит, должно существовать рациональное решение, нигде не обращающееся в нуль, при $z \to 0$ равное I и при $z \to \infty$ стремящееся к –I, что невозможно. Построим по решению $w(z)$, для которого выполнено условие (7б), новое решение $\tilde{w}(z) = w^{-1}(z)$. Изучим его поведение в нуле. Так как $w(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 1$, то и $\tilde{w}(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 1$, а значит, и параметры решения $\tilde{w}(z)$ также будут удовлетворять условию (7б), т.е. $\sqrt{2\tilde{\alpha}} = \frac{n - 2\tilde{p}}{2}$. Следовательно, параметры исходного решения удовлетворяют условиям $\sqrt{2\alpha} = \frac{n-2p}{2}$, $\sqrt{-2\beta} = \frac{n - 2\tilde{p}}{2}$ ($\gamma \neq 0$) и тем самым (7а).

Таким образом, параметры всех рациональных решений типа I с необходимостью удовлетворяют условию (7а) (если $\alpha = \beta = 0$, то условие (7а) также выполнено и $n = 2p$, подробно эти решения будут рассмотрены в конце параграфа).

Применим теперь к рациональному решению типа I m раз ПБ(36), каждый раз выбирая знаки перед корнями так, чтобы $\sqrt{2\alpha} + \sqrt{-2\beta}$ уменьшалось на единицу. Так как условие (7а) выполнено, то в результате мы получим решение с параметрами $\beta = -\alpha$. Будем теперь рассматривать только такие решения. Для них справедливо тождество

$$w(z) = \left(w(-z)\right)^{-1}. \qquad (\mathrm{I2})$$

Отсюда сразу следует, что нули a_i и полюса b_i решения $w(z)$ связаны соотношением $a_i = \pm b_i$, $i = 1, \ldots, n$. При $a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $w(z) = -1$; если $a_i = -b_i$, $i = 1, \ldots, n$, то решение можно записать в виде

$$w(z) = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(z + b_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - b_i)}, \quad b_i \neq b_k, \ i \neq k. \qquad (\mathrm{I3})$$

Рассмотрим поведение $w(z)$ в нуле: если n четное, то $w(0) = -1$, если n нечетное, то $w(0) = 1$. Из предыдущих рассмотрений мы знаем, что при $w(0) = 1$ параметры α и β должны быть полуцелыми и $\gamma \neq 0$ и, следовательно, условие (3) выполнено. Остановимся подробнее на первом случае: n четное, $w(0) = -1$. Введем для этих решений новые обозначения:

$$w(z) = P(z)\,Q^{-1}(z), \qquad (\mathrm{I4})$$

где $$P(z) = -\prod_{i=1}^{2p}(z + b_i), \quad Q(z) = \prod_{i=1}^{2p}(z - b_i), \quad b_i \neq 0, \qquad (\mathrm{I5})$$

и заметим, что полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ взаимно просты.

Подставим выражение (I4) в P_5, тогда после преобразований

$$\left(z(P'Q - PQ')\right)' - \frac{z}{2}\frac{(PQ)'(P'Q - PQ')}{PQ} - \frac{\alpha(P-Q)^3(P+Q)}{zPQ} - \gamma PQ = \frac{\delta z PQ(P+Q)}{P-Q} + \frac{z(P'Q - Q'P)(P' - Q')}{P-Q}. \qquad (\mathrm{I6})$$

Отсюда сразу следует, что $$\delta\Big(\sum_{i=1}^{2p} b_i\Big) + \gamma = 0. \qquad (\mathrm{I7})$$

Вычислим теперь $\sum_{i=1}^{2p} b_i$ другим способом с тем, чтобы получить соотношения на параметры δ и γ. Заметим, что в обеих частях равенства (I6) стоят полиномы. Действительно, если мы домножим обе части на zPQ и $(P - Q)$, то это станет очевидным, но т.к. zPQ и $(P - Q)$ не имеют общих корней, то и до домножения это были полиномы. Обозначим правую часть $G_{2n}(z)$, тогда (I6) можно переписать в виде

$$2\delta P^2 + (P' - Q')^2 = \frac{\delta}{2}PQ(3P + Q_1), \qquad (\mathrm{I8})$$

где полином $Q_1(z)$ имеет вид

$$Q_1(z) = -\frac{(P - Q - P'(P' - Q'))z - 2G_{2n}/\delta}{zP}.$$

Сделаем в выражении (I8) замену $z \to -z$, учитывая $P(-z) = -Q(z)$, $Q(-z) = -P(z)$; тогда

$$2\delta Q^2(z) - (P_z(z) - Q_z(z))^2 = \frac{\delta}{2}\big(P(z) - Q(z)\big)\big(-3Q(z) + Q_1(-z)\big). \qquad (\mathrm{I9})$$

Вычитая из (I8) выражение (I9), получаем

$$Q_1(-z) = Q_1(z) - (P(z) + Q(z)). \qquad (20)$$

Складывая теперь эти выражения и учитывая (20), получаем, что

$$\frac{\delta}{2}(P+Q)^2-(P_z-Q_z)^2=\frac{\delta}{2}(P-Q)\big(Q_1(z)-Q(z)\big).$$

Нетрудно убедиться, что $Q_1(z)-Q(z)=r_{n-2}(z)$ - полином степени не выше $n-2$, поэтому мы можем воспользоваться леммой 3 (см. приложение I). Следовательно, либо

$$\frac{\delta}{2}(P+Q)^2-(P_z-Q_z)^2=0, \qquad (21)$$

либо

$$2(P-Q)\Big(\sum_{i=1}^{K}(x-\alpha_i)^{-1}\Big)=(P-Q)'\pm(P+Q)\sqrt{-\delta/2}. \qquad (22)$$

Рассмотрим сначала первый случай (21). Приравнивая к нулю коэффициенты при старшей степени z, получаем

$$2\delta\Big(\sum_{i=1}^{2p}b_i\Big)^2+(4p)^2=0.$$

Подставляя выражение для $\sum_{i=1}^{2p}b_i$ в равенство (17), получаем условие на параметры γ и δ:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}}=2p.$$

Следовательно, для таких рациональных решений условия (3а) выполнены.
Во втором случае мы аналогично получаем

$$\sqrt{-\frac{\delta}{2}}\sum_{i=1}^{2p}b_i=2(p-K+1),$$

и подставляя в (17) убеждаемся, что

$$\frac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}}=2(p-K+1)\equiv 2n.$$

Следовательно, условия (3а) выполнены при $m=0$ и $n=p-K+1$, ч.т.д.

Осталось рассмотреть случай $\alpha=\beta=0$. Нетрудно показать, что для рациональных решений типа I при $\alpha=\beta=0$ будет справедливо представление

$$w(z)=-\prod_{i=1}^{K}\Big(\frac{x+b_i}{x-b_i}\Big)^2. \qquad (23)$$

Применив к любому такому решению подстановку T (37), мы получим два рациональных решения P_3 с параметрами $\alpha_3=-\gamma_5/4$, $\beta_3=-\alpha_3$, $\gamma_3=-\delta_5/8$, $\delta_3=-\gamma_3$. С другой стороны, из теоремы о рациональных решениях P_3 /1/ нам известно, что при

$$\alpha_3=-\beta_3,\ \gamma_3=-\delta_3 \qquad (24)$$

уравнение P_3 имеет только два тривиальных решения, равных ±1, если только $\alpha_3/\sqrt{\gamma_3}$ не равно четному числу. Если же $\alpha_3/\sqrt{\gamma_3}=2n$, уравнение P_3 имеет, кроме того, еще 2 рациональных решения с асимптотиками $\pm i$ при $z\to\infty$. Оба они порождаются одним и тем же решением $w_5(z)$ и связаны между собой инверсией. Взяв теперь какое-либо рациональное

решение P_3 с параметрами (24) и применив к нему T^{-1} (37), получим рациональное решение P_5 с параметрами $\alpha_5=\beta_5=0$, $\gamma_5=4\alpha_3$, $\delta_5=-8\gamma_3$, при этом решения, различающиеся только инверсией, будут давать одно и то же решение P_5. Решения $w_3(z)=\pm1$ перейдут в $w_5(z)=0,\infty$; нетривиальные решения мы получим только, если $\alpha_3/\sqrt{\gamma_3}=2n$ и тем самым $\gamma_5/\sqrt{-2\delta_5}=2n$. Следовательно, и для этих рациональных решений будет выполнено условие (3а) и все они могут быть получены из $w_0(z)=-1$ многократным применением ПБ(36). Теорема 2 полностью доказана.

Мы только что показали, что часть рациональных решений типа I для P_5 получается непосредственно из рациональных решений уравнения P_3 с помощью алгебраической подстановки T^{-1}(37). Это не единственный случай, когда рациональные решения типа I для P_5 могут быть получены непосредственно из рациональных решений P_3. Пусть в уравнении P_3 параметры $\alpha_3/\sqrt{\gamma_3}$ и $\beta_3/\sqrt{-\delta_3}$ нечетные, тогда у P_3 существует два рациональных решения. Применим к ним ПБ(35), которое связывает P_3 и P_5 ($\delta=0$). Получим алгебраическое решение P_5 $w(\tau)=\mathcal{F}(\sqrt{\tau})$ с параметрами

$$\chi_5=\left\{\begin{matrix}\alpha_5=\dfrac{(2n+1)^2}{8}, & \gamma_5=1\\ \beta_5=-\dfrac{m^2}{2}, & \delta_5=0\end{matrix}\right\} \text{ либо } \chi_5=\left\{\begin{matrix}\alpha_5=\dfrac{m^2}{2}, & \gamma_5=1\\ \beta_5=-\dfrac{(2n+1)^2}{8}, & \delta_5=0\end{matrix}\right\}.$$

Если у P_3 $\dfrac{\alpha_3}{\sqrt{\gamma_3}}=2n-1$ и $\dfrac{\beta_3}{\sqrt{-\delta_3}}=2n+1$, то $\beta_5=0$ и можно воспользоваться подстановкой S (38) и получить рациональное решение P_5 при

$$\alpha_5=\frac{(2n+1)^2}{32},\ \beta_5=-\frac{(2n+1)^2}{32},\ \gamma_5=0,\ \delta_5=4.$$

В работе /2/ утверждается, что если параметры P_5 удовлетворяют условиям (3), то решение сводится к решению P_3, если $\sqrt{2\alpha_0}\neq n$, n - целое. Процедура сведения предлагалась следующая. Будем применять к исходному решению многократно ПБ(36), каждый раз так выбирая знаки перед корнями, пока у полученного решения параметры не примут вид $\beta=-\alpha$, $\gamma=0$. Затем применяется подстановка S * и ПБ, осуществляющее переход к решению P_3. Такая процедура сведения нам

---

* В этой работе был получен и использован частный случай подстановки S, а именно /1/: $\tilde{S}:\left\{\begin{matrix}\alpha=0, & \gamma=\gamma_0\\ \beta=0, & \delta=0\end{matrix}\right\}\to\left\{\begin{matrix}\alpha=0, & \gamma=0\\ \beta=0, & \delta=2\gamma_0\end{matrix}\right\}.$

кажется малоинформативной. Действительно, как мы в этом параграфе показали, все рациональные решения типа I получаются из $W_0(Z)$ (4) последовательными итерациями по формулам ПБ(36). Таким образом, процедура сведения, предложенная Громаком, фактически означает, что мы рациональное решение типа I должны снова вернуть к $W_0(Z)$ и уже потом переходить от него к решениям P_3, при этом, конечно, вся информация о решении теряется. Те рациональные решения типа I, которые непосредственно связаны с рациональными решениями P_3, уже были описаны нами в этом параграфе.

Авторы благодарят А.Р.Итса за то, что он обратил их внимание на эту тему, В.Б.Матвеева за постоянное внимание и интерес к работе и В.Г.Маханькова за поддержку.

Приложение I

Сформулируем и докажем здесь лемму 3, использованную в доказательстве теоремы 2.

Лемма 3. Пусть многочлены q_n, p_{n-1}, r_{n-2} степеней $\deg q_n = n$, $\deg p_{n-1} = n-1$ и $\deg r_{n-2} \le n-2$ таковы, что имеет место равенство

$$p_{n-1}^2 + q_n'^2 = q_n r_{n-2}. \tag{25}$$

Тогда, если p_{n-1} и q_n взаимно просты, то либо r_{n-2} тождественно равно нулю, либо полином q_n допускает представление

$$q_n(x) = \frac{q_n'(x) \pm i p_{n-1}(x)}{2\left(\sum_{i=1}^{K}(x-d_i)^{-1}\right)}, \tag{26}$$

где d_i - некоторые константы.

Доказательство. Из равенства (25) и взаимной простоты p_{n-1} и q_n сразу следует, что $q_n(x)$ не имеет кратных корней. Корни полинома q_n обозначим $\{c_k\}$, $k=1,\dots,n$. Положим в равенстве (25) $x=c_k$, тогда будет либо

$$p_{n-1}(c_k) = -i q_n'(c_k), \tag{27}$$

либо

$$p_{n-1}(c_k) = i q_n'(c_k). \tag{28}$$

Переберем все n корней c_k, если каждый раз будет выполняться (27), то, значит, полином $(n-1)$ степени вида $p_{n-1}(x)+iq_n'(x)$ в n точках обратится в нуль, а значит, он равен нулю для любого x, т.е.

$$p_{n-1}(x) + i q_n'(x) = 0.$$

Следовательно, в исходном равенстве (25) полином $r_{n-2}(x)\equiv 0$ и утверждение леммы доказано для таких полиномов. Если же для некоторого $c_k = c_0$ мы получим, что выполнено равенство (28), а не (27), то введем новые полиномы $q_{n-1}(x)$ и $p_{n-2}(x)$ по формулам

$$q_n(x) = (x-c_0)q_{n-1}(x), \tag{29}$$

$$p_{n-2}(x) = \left(p_{n-1}(x) - i q_{n-1}(x)\right)(x-c_0)^{-1}. \tag{30}$$

Из взаимной простоты полиномов $q_n(x)$ и $p_{n-1}(x)$ следует взаимная простота $q_{n-1}(x)$ и $p_{n-2}(x)$. Покажем теперь, что для $q_{n-1}(x)$ и $p_{n-2}(x)$ будет также выполнено равенство типа (25). Действительно, подставим в (25) выражение q_n и p_{n-1} через q_{n-1} и p_{n-2}, тогда

$$p_{n-2}^2(x) + q_{n-1}'^2(x) = q_{n-1}(x) r_{n-3}(x), \tag{31}$$

где

$$r_{n-3}(x) = \frac{r_{n-2}(x) - 2q_{n-1}'(x) - 2i p_{n-2}(x)}{(x-c_0)}. \tag{32}$$

Покажем, что $r_{n-3}(x)$ действительно полином. Домножим обе части (31) на $(x-c_0)$ и положим $x=c_0$, слева получится нуль, а справа - $q_{n-1}(c_0)\ne 0$, следовательно, выражение $r_{n-2}(c_0) - 2(q_{n-1}'(c_0) + i p_{n-2}(c_0))$ равно нулю, что и требовалось показать. Таким образом, полиномы p_{n-2} и q_{n-1} удовлетворяют всем условиям леммы. Будем теперь считать, что лемма доказана для всех полиномов степени $\tilde n = n-1$, тогда либо $r_{n-3}(x)\equiv 0$, либо

$$q_{n-1}(x) = \frac{q_{n-1}'(x) - i p_{n-1}(x)}{2\left(\sum_{i=1}^{K}(x-d_i)^{-1}\right)}. \tag{33}$$

В первом случае из определения $r_{n-3}(x)$ сразу следует, что $r_{n-2} = 2i\left(p_{n-2} - i q_{n-1}'\right)$; из (31) получаем, что либо $p_{n-2}(x) = i q_{n-1}'(x)$, либо $p_{n-2}(x) = -i q_{n-1}'(x)$. Первый вариант ведет к $r_{n-2}(x)=0$, и лемма доказана; если же $p_{n-2}(x) = -i q_{n-1}'(x)$, то преобразуем $r_{n-2}(x)$, подставив выражение для $p_{n-2}(x)$, к виду

$$r_{n-2}(x) = \frac{2(q_n'(x) + i p_{n-1}(x))}{(x-c_0)}.$$

Подставляя это выражение в (25), убеждаемся, что

$$q_n(x) = \frac{p_{n-1}(x) - i q_n'(x)}{2(x-c_0)^{-1}},$$ ч.т.д.

Осталось рассмотреть случай, когда $r_{n-3}(x) \neq 0$ и $q_{n-1}(x)$ имеет представление (33.) Подставим в равенство (31) выражение для q_n (29), тогда $r_{n-3} = 2(q_{n-1}' + ip_{n-2})(\sum_{i=1}^{k}(x-d_i)^{-1})$. Сравним его с определением $r_{n-3}(x)$, (32), и воспользуемся выражением для $p_{n-2}(x)$(30); тогда получим, что

$$r_{n-2}(x) = 2\left(\sum_{i=1}^{k}(x-d_i)^{-1} + (x-c_0)^{-1}\right)\left(q_n'(x) + ip_{n-1}(x)\right).$$

Подставляя это выражение в (25), приходим к равенству

$$q_n'(x) - ip_{n-1}(x) = q_n(x)\left(\sum_{i=1}^{n}(x-d_i)^{-1} + (x-c_0)^{-1}\right), \text{ ч.т.д.}$$

Таким образом, мы показали, что если лемма верна для всех полиномов степени ($n-1$), то она будет справедлива и для полиномов степени n. Осталось проверить лемму при $n=2$. Пусть $p_1(x)$ и $q_2(x)$ взаимно просты и для любого x

$$p_1^2(x) + q_2'^2(x) = q_2(x) r_0 \quad , \quad r_0 - const. \tag{34}$$

Подставим $q_2(x) = q_0(x-c_1)(x-c_2)$ в (34), тогда при $r_0 \neq 0$ будут выполнены равенства

$$p_1(x) + iq_2'(x) = a_1(x-c_1),$$

$$p_1(x) - iq_2'(x) = a_2(x-c_2), \quad a_1 a_2 = q_0 r_0.$$

Следовательно, $p_1 = \frac{x(a_1+a_2)-(a_1c_1+a_2c_2)}{2}$, $q_2' = \frac{x(a_1-a_2)+a_2c_2-a_1c_1}{2i}$.

С другой стороны, $q_2'(x) = 2q_0 x - q_0(c_1+c_2)$, $a_1 = 2iq_0$, $a_2 = -2iq_0$ и $p_1(x) = iq_0(c_2-c_1)$. Следовательно, $q_2(x)$ можно переписать в виде

$$q_2(x) = \left(2q_0\left(x - \frac{c_1+c_2}{2}\right) + q_0(c_2-c_1)\right)/2(x-d_1)^{-1}, \quad d_1 = c_1.$$

Таким образом, мы показали, что либо $r_0 = 0$, либо $q_2(x)$ имеет представление (26), ч.т.д. Из доказательства видно, что если мы будем исходить из равенства (28), а не (27), то придем к представлению (26) со знаком плюс. Лемма полностью доказана.

Приложение 2

В этом приложении будет дана сводка используемых в работе формул.

I. ПБ, связывающее решения $v(z|\chi_3)$ уравнения P_3 и решения $w(\tau|\chi_5)$ уравнения P_5 с параметрами χ_5 /6/, имеет вид

$$w_5(\tau|\chi_5) = \frac{v' - \sqrt{\gamma_3}\,v^2 + \frac{\mu}{z}v + \sqrt{-\delta_3}}{v' + \sqrt{\gamma_3}\,v^2 + \frac{\mu}{z}v + \sqrt{-\delta_3}}, \quad v = v(z|\chi_3), \tag{35}$$

где $2\tau = z^2$, $\mu = -(1 + \beta_3/\sqrt{-\delta_3})$,

$$\chi_5 = \left\{\begin{matrix} \alpha_5 = (1 + \alpha_3/\sqrt{\gamma_3} - \mu)^2/32, & \beta_5 = -(1 - \alpha_3/\sqrt{\gamma_3} - \mu)^2/32, \\ \gamma_5 = \sqrt{-\delta_3\gamma_3}, & \delta_5 = 0. \end{matrix}\right\}$$

2. ПБ, действующее на решениях P_5 при $\delta_5 \neq 0$. Пусть $w(z|\chi_i)$ — некоторое решение P_5 при параметрах $\chi_i = \left\{\begin{matrix}\alpha_i, & \gamma_i \\ \beta_i, & \delta_i\end{matrix}\right\}$, тогда выражение /7/

$$w_4(z|\chi_4) = \frac{z w_i' - \sqrt{2\alpha_i}\,w_i^2 + (\sqrt{2\alpha_i} - \sqrt{-2\beta_i})w_i + \sqrt{-2\beta_i} - \sqrt{-2\delta_i}\,z w_i}{z w_i' - \sqrt{2\alpha_i}\,w_i^2 + (\sqrt{2\alpha_i} - \sqrt{-2\beta_i})w_i + \sqrt{-2\beta_i} + \sqrt{-2\delta_i}\,z w_i} \tag{36}$$

также будет решением P_5, если знаменатель в (36) не обращается в нуль и

$$\chi_4 = \left\{\begin{matrix} \alpha_4 = -\frac{(\gamma_i + \sqrt{-2\delta_i}\,\mu)^2}{16\delta}, & \gamma_4 = \sqrt{-2\delta_i}(\sqrt{-2\beta_i} - \sqrt{2\alpha_i}) \\ \beta_4 = \frac{(\gamma_i - \sqrt{-2\delta_i}\,\mu)^2}{16\delta}, & \delta_4 = \delta_i \end{matrix}\right\},$$

где $\mu = 1 - \sqrt{-2\beta_i} - \sqrt{2\alpha_i}$.

3. Подстановки T и T^{-1} имеют вид /2, I/

$$T: w_5(z|\chi_5) \longrightarrow w_3(z|\chi_3) = \frac{\sqrt{w_5(z|\chi_5)} - 1}{\sqrt{w_5(z|\chi_5)} + 1}, \tag{37}$$

$$\chi_5 = \left\{\begin{matrix} \alpha_5 = 0 \\ \beta_5 = 0 \\ \gamma_5 \\ \delta_5 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \chi_3 = \left\{\begin{matrix} \alpha_3 = -\delta_5/4 \\ \beta_3 = -\alpha_3 \\ \gamma_3 = -\delta_5/8 \\ \delta_3 = -\gamma_3 \end{matrix}\right\},$$

$$T^{-1}: w_3(z|\chi_3) \longrightarrow w_5(z|\chi_5) = \left(\frac{w_3(z|\chi_3) + 1}{w_3(z|\chi_3) - 1}\right)^2,$$

$$\chi_3 = \left\{\begin{matrix} \alpha_3 \\ \beta_3 = -\alpha_3 \\ \gamma_3 \\ \delta_3 = -\gamma_3 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \chi_5 = \left\{\begin{matrix} \alpha_5 = 0 \\ \beta_5 = 0 \\ \gamma_5 = -4\alpha_3 \\ \delta_5 = -8\gamma_3 \end{matrix}\right\}.$$

4. Подстановка S, действующая на решения P_5, имеет вид /1/

$$S:\quad w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \frac{(w_i(\sqrt{z}|\chi_i)+1)^2}{4\,w_i(\sqrt{z}|\chi_i)}, \tag{38}$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = -\alpha_i \\ \gamma_i = 0 \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 4\alpha_i \\ \beta_f = 0 \\ \gamma_f = \delta_i/4 \\ \delta_f = 0 \end{Bmatrix}.$$

5. Используя результаты работ /8,9/, нетрудно выписать простое ПБ, действующее на решения P_5 при $\delta = 0$. Пусть $w_i(z|\chi_i)$ – решение P_5 при параметрах $\chi_i = \{\alpha_i = 0,\ \gamma_i,\ \beta_i,\ \delta_i = 0\}$, тогда

$$w_f(z|\chi_f) = 1 + \frac{2\gamma_i\, z\, w_i^2(w_i - 1)}{(z\, w_i' - \sqrt{-2\beta_i}\,(w_i - 1))^2} \tag{39}$$

будет решением P_5 при $\chi_f = \{\alpha_f = 0,\ \beta_f = -(\sqrt{-2\beta_i}-1)^2/2,\ \gamma_f = \gamma_i,\ \delta_f = 0\}$. Заметим, что приведённое в работе /2/ ПБ представляет собой композицию приведённого здесь ПБ и подстановки S^{-1}(38). ПБ (39) приводится впервые.

Литература

1. Бордаг Л.А., Китаев А.В. ОИЯИ, Р5-85-740, Дубна, 1985.
2. Громак В.И. Дифф.уравнения, 1984, 20, 10, с.1674.
3. Лукашевич М.А. Дифф.уравнения, 1965, 1, 6, с.731.
4. Громак В.И., Цегельник В.В. Изв. АН БССР, 1978, сер. физ.-мат., 1978, 6, с.114.
5. Громак В.И., Лукашевич М.А. Дифф.уравнения, 1982, 18, 3, с.419.
6. Громак В.И. Дифф.уравнения, 1975, 11, 2, с.373.
7. Громак В.И. Дифф.уравнения, 1976, 12, 4, с.720.
8. Marek J.J.J. Proc. Camb. Phil. Soc., 1968, 64, p.167.
9. Misra R.M., Pandey D. J.Phys. A:Math., Nucl., Gen., 1973, 6, p.924.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Бордаг Л.А., Китаев А.В. Р5-86-364

Об алгебраических и рациональных решениях пятого уравнения Пенлеве

Рассматриваются рациональные и алгебраические решения пятого уравнения Пенлеве. Приводится уточненная теорема об алгебраических решениях. Найдены необходимые и достаточные условия для существования у P_5 рациональных решений типа I, то есть решений, имеющих следующее разложение:

$$w(z) \underset{z\to\infty}{=} \mu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{z^k}, \quad \mu_0 \neq 0.$$

Доказана их единственность для фиксированного набора параметров, доказано также, что все решения типа I порождаются преобразованиями Бэклунда из тривиального решения $w_0(z) = -1$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Bordag L.A., Kitaev A.V. P5-86-364

On Algebraic and Rational Solutions on the Fifth Painleve' Equation

The rational and algebraic solutions of the fifth Painleve` equation (P_5) are investigated. A stronger theorem about algebraic solutions is formulated. Necessary and sufficient conditions for the existence of rational solutions of type I, i.e. solutions having the expansion

$$w(z) \underset{z\to\infty}{=} \mu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{z^k}, \quad \mu_0 \neq 0$$

are found. The uniqueness of this solution is shown for a fixed set of parameters. All type I solutions are generated by the Bäcklung transformation from the trivial one ($w_0(z) = -1$).

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986