объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-356

В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов*

НОВЫЙ КЛАСС СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ U(n) НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Направлено в журнал "Physics Letters"

* Институт физики высоких энергий
АН КазССР, Алма-Ата

1986

1. $U(m)$ – уравнение Шредингера с кубической нелинейностью (S3)

$$i\varphi_{n,t} + \varphi_{nxx} + (\bar{\varphi}_n \varphi_n)\varphi_n = 0 , \qquad (1)$$

где $\varphi_n(x,t) = (\varphi_{n,1},\dots,\varphi_{n,m})^t$, $\bar{\varphi}_n\varphi_n = \sum_{j=1}^{m}|\varphi_{n,j}|^2$, $m \geqslant n$, встречается в различных физических приложениях, а его изучение имеет уже 15-летнюю историю после установления интегрируемости сначала скалярной $U(1)$ /1/, а затем и векторных версий $U(n)$, $U(p,q)$ S3 /2,3/. Обычно для отыскания, в частности солитонных решений S3 (1), используют операторы, входящие в его лаксово представление /4/. Другой подход, предложенный Кричевером И.М. /5/ и Чередником И.В. /5/, основан на использовании для построения решений S3 (1) нестационарного линейного уравнения Шредингера (ЛУШ):

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - u\Psi = 0 , \qquad (2)$$

где $\Psi(x,t,k)$ – скалярная комплексная функция, потенциал $u(x,t)$ – действительная функция, k – комплексный параметр. На основе ЛУШ (2) для S3 (1) были получены рациональные /5/ и так называемые конечно-зонные решения /6/. Для построения солитонных решений метод Кричевера-Чередника требует переформулировки и детализации. Ниже предлагается способ использования ЛУШ (2) для нахождения частного класса многосолитонных решений S3(1) в случае, когда солитоны движутся с одинаковой скоростью (раздел 3). Получен новый класс многосолитонных решений S3(1), который, видимо, недоступен для традиционного метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Солитонные решения S3(1) отвечают безотражательным (баргмановским) потенциалам ЛУШ (2). В частном случае для потенциалов вида $u = -n(n+1)b^2\mathrm{sech}^2 bx$ для построения новых солитонных решений S3(1) применен метод факторизации.

2. Решения $U(n)$ S3 ищем в виде

$$\varphi_n(x,t) = Ce^{iW}\Phi_n(y) , \qquad (3)$$

где $\Phi_n(y) = (\Phi_{n,1},\dots,\Phi_{n,m})^t$, $C = \mathrm{diag}(C_1,\dots,C_m)$,

$$W = \mathrm{diag}(\Theta_1,\ldots,\Theta_m)\ ,\quad \Theta_j = \frac{v}{2}\left(x - \frac{v}{2}\,t\right) - \lambda_j t\ ,\quad y = x - vt.$$

Подставляя (3) в (I), получим

$$\Phi''_{n,j} - u_n \Phi_{n,j} = -\lambda_j \Phi_{n,j} \tag{4}$$

$$u_n = -\sum_{j=1}^{m} |C_j|^2 \Phi^2_{n,j}\ ,$$

где штрих означает производную по y.

Пусть потенциал u_n имеет вид

$$u_n = -\,n(n+1)b^2 \mathrm{sech}^2 by \tag{5}$$

Тогда (4) примет вид

$$\Phi''_{n,j} + n(n+1)b^2 \mathrm{sech}^2 by\, \Phi_{n,j} = -\lambda_j \Phi_{n,j} \tag{6}$$

Известно/7/, что (6) при каждом n имеет n дискретных собственных значений (с.з.) $\lambda_j = -j^2b^2$, $j=1,2,\ldots,n$. Чтобы найти соответствующие собственные функции (с.ф) $\Phi_{n,j}$, используем метод факторизации/8/. Введем операторы "рождения" и "уничтожения" следующим образом:

$$a^+_{\ell+1}\, \Phi_{\ell,j} = \Phi_{\ell+1,j}\ ,\qquad a_\ell\, \Phi_{\ell,j} = \Phi_{\ell-1,j}\ , \tag{7}$$

где $a^+_\ell = \ell\, b\,\mathrm{th}by + \frac{d}{dy}$, $a_\ell = \ell\, b\,\mathrm{th}by - \frac{d}{dy}$. Система (7) в сочетании с условием

$$\Phi_{\ell,j} \equiv 0\ ,\quad \text{если}\quad \ell > n \tag{8}$$

полностью определяет все решения ЛУШ (6). Найдем некоторые из них. Пусть $\ell = j = n$. Тогда из (7) с учетом (8) имеем $a^+_n \Phi_{n,n} = 0$, откуда следует, что *

$$\Phi_{n,n} = \mathrm{sech}^n by\ . \tag{9}$$

Рекуррентная формула для $\Phi_{\ell,j}$ имеет вид

$$\Phi_{\ell,j} = a^+_\ell a^+_{\ell-1} \ldots\, a^+_{j+1} \Phi_{j,j}\ . \tag{10}$$

Пусть $n=1$, т.е. $\ell = j = 1$. Тогда из (9) получим ($m = n$)

$$\Phi_{1,1} = \mathrm{sech}by\ . \tag{11}$$

При $n = 2$ имеем два решения ЛУШ (6), отвечающие двум с.з. $\lambda_1 = -b^2$, $\lambda_2 = -4b^2$. Из (9) следует

$$\Phi_{2,2} = \mathrm{sech}^2 by\ , \tag{12а}$$

а из (10) и (11) получим

$$\Phi_{2,1} = a^+_2 \Phi_{1,1} = \mathrm{th}by\ \mathrm{sech}\ by. \tag{12б}$$

* Здесь и в дальнейшем, мы определяем с.ф. с точностью до постоянного множителя.

Из (3) и (II) находим известное односолитонное решение U(1) S3

$$\varphi_1(x,t) = C\, e^{i\Theta_1}\, \mathrm{sech}by\ , \tag{13}$$

где $|C|^2 = 2b^2$. В случае $n=m=2$ из (I2) получим солитонное решение U(2) S3

$$\varphi_2(x,t) = \begin{pmatrix} C_1\, e^{i\Theta_1}\ \mathrm{sh}by \\ C_2\, e^{i\Theta_2} \end{pmatrix} \mathrm{sech}^2 by\ , \tag{14}$$

где $|C_1|^2 = |C_2|^2 = 6b^2$. Аналогично, рассматривая случаи $m=n=3$, найдем следующее решение U(3) S3 (1):

$$\varphi_3(x,t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{i\Theta_1}(4-5\,\mathrm{sech}^2 by) \\ C_2 e^{i\Theta_2}\,\mathrm{th}by\ \mathrm{sech}by \\ C_3 e^{i\Theta_3}\ \mathrm{sech}^2 by \end{pmatrix} \mathrm{sech}\ by\ , \tag{15}$$

где $|C_1|^2 = |C_2|^2/40 = |C_3|^2/15 = 3b^2/4$

Размножение решений (I3)-(I5) для $m > n$ производится тривиально с помощью переопределения констант C_j.

3. Возможность использования ЛУШ(2) для построения решений S3 (1) следует из следующего утверждения: на k -плоскости существуют такие n точек k_j, $j=1,2,\ldots,n$, что выполняется соотношение

$$U(x,t) = -\sum_{j=1}^{n} |C_j|^2\, |\Psi(x,t,k_j)|^2\ , \tag{17}$$

где $C_j = \mathrm{const}$. Это означает, что функции $\varphi_{n,j} = C_j \Psi(x,t,k_j)$ являются решениями U(m) S3 (1).

Решения ЛУШ (2) ищем в виде

$$\Psi(x,t,k) = e^{iky - ik^2t + i\alpha}\left(1 + \frac{i\xi_1}{2k} + \frac{\xi_2}{4k^2} + \frac{\xi_3}{k^3} + \ldots + \frac{\xi_n}{k^n}\right), \tag{16}$$

где $\alpha = \frac{v}{2}\left(x - \frac{v}{2}t\right)$, $\xi_j = \xi_j(y)$, $y = x - vt$. Такая запись соответствует галилеевскому преобразованию в систему, движущемуся вместе с солитоном. При этом волновое число k становится чисто мнимым. Рассмотрим эти решения при $m=1,2$. Если $n=1$, а $m > 1$ мы получим известное векторное обобщение односолитонного решения (I3). Пусть теперь $n=2$. Подставляя (I6) в (2), получим следующую систему уравнений:

$$u + \xi_1' = \xi_1'' + \xi_2' - u\xi_1 = \xi_2'' - u\xi_2 = 0 . \qquad (18)$$

Обычно в методе прямой линеаризации эту систему не решают, а используют некоторые дополнительные условия (симметрии) для выделения n -солитонных решений. Но в нашем случае ($n=2$) оказывается более наглядным решить эту систему, определяя конкретные значения k_j из граничных условий (в этом пункте мы отходим от обычной схемы Кричевера).

Из системы (18) следует

$$\xi_2 + \xi_1' + \frac{1}{2}\xi_1^2 - 2a = \frac{1}{2}\xi_2^2 + \xi_1'\xi_2 - \xi_1\xi_2' - 2b = 0 , \qquad (19)$$

где $a,b = \mathrm{const}$. Исключая из (19) ξ_2 и полагая

$$\xi_1 = 2z'/z , \qquad (20)$$

получим следующее уравнение для функции z :

$$z^{(IV)} - 2az'' + (a^2 - b)z = 0 .$$

Одно из решений этого уравнения имеет вид *

$$z(y) = 2\varkappa\,\mathrm{ch}\,\nu y + 2\nu\,\mathrm{ch}\,\varkappa y ,$$

причем $a = (\nu^2+\varkappa^2)/2$, $b = (\nu^2 - \varkappa^2)^2/4$. Определяя ξ_1 из (20), ξ_2 из (19) и подставляя полученные выражения в (16) (при $n = 2$) и (18), найдем

$$\Psi(x,t,k) = e^{iky - ik^2t + i\alpha}\,\Phi(y,k) , \qquad (21)$$

$$\Phi(y,k) = 1 + \frac{i\varkappa\nu}{k}\left[\frac{\mathrm{sh}\,\varkappa y + \mathrm{sh}\,\nu y}{\varkappa\,\mathrm{ch}\,\nu y + \nu\,\mathrm{ch}\,\varkappa y}\right] + \frac{\varkappa^2 - \nu^2}{4k^2}\left[\frac{\varkappa\,\mathrm{ch}\,\nu y - \nu\,\mathrm{ch}\,\varkappa y}{\varkappa\,\mathrm{ch}\,\nu y + \nu\,\mathrm{ch}\,\varkappa y}\right], \qquad (22)$$

$$u(x,t) = -2\varkappa\nu\,\frac{2\varkappa\nu + (\varkappa^2+\nu^2)\,\mathrm{ch}\,\nu y\,\mathrm{ch}\,\varkappa y - 2\varkappa\nu\,\mathrm{sh}\,\nu y\,\mathrm{sh}\,\varkappa y}{(\varkappa\,\mathrm{ch}\,\nu y + \nu\,\mathrm{ch}\,\varkappa y)^2} .$$

Тривиальность граничных условий теперь означает, что ($\varkappa < \nu$)

$$\Phi(x,t,k)\Big|_{x=+\infty} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\xi_1^+}{k} + \frac{\xi_2^+}{4k^2} = 0 , \qquad (23)$$

где $\xi_j^+ = \xi_j\big|_{x=+\infty}$. Решая (23) относительно k , получим

* Этот выбор диктуется регулярностью и действительностью потенциала u .

$$k_{1,2} = \pm\frac{i}{2}(\nu \mp \varkappa) . \qquad (24)$$

Функцию $\Psi(x,t,k)$ в точках k_1 и k_2 найдем из (21):

$$\Psi(x,t,k_1) = e^{ik_1y - ik_1^2 + i\alpha}\,(\varkappa - \nu)\,\frac{\mathrm{ch}\,\nu y - \mathrm{ch}\,\varkappa y - \mathrm{sh}\,\nu y - \mathrm{sh}\,\varkappa y}{\varkappa\,\mathrm{ch}\,\nu y + \nu\,\mathrm{ch}\,\varkappa y} , \qquad (25)$$

$$\Psi(x,t,k_2) = e^{ik_2y - ik_2^2t + i\alpha}\,(\varkappa + \nu)\,\frac{\mathrm{sh}\,\nu y + \mathrm{sh}\,\varkappa y - \mathrm{ch}\,\nu y - \mathrm{ch}\,\varkappa y}{\varkappa\,\mathrm{ch}\,\nu y + \nu\,\mathrm{ch}\,\varkappa y} . \qquad (26)$$

Легко проверить, что функции $\Psi(x,t,k_1)$ и $\Psi(x,t,k_2)$ вида (25)-(26) и потенциал u (22) удовлетворяют условию согласования (17), т.е. $u = -|C_1|^2|\Psi(x,t,k_1)|^2 - |C_2|^2|\Psi(x,t,k_2)|^2$, где $|C_1|^2 = |C_2|^2 = (8\varkappa\nu)^{-1}$. Отсюда следует, что $U(2)$ S3 (1) имеет следующее солитонное решение:

$$\varphi(x,t) = \begin{pmatrix} C_1\Psi(x,t,k_1) \\ C_2\Psi(x,t,k_2) \end{pmatrix} , \qquad (27)$$

в котором $\Psi(x,t,k_j)$ заданы формулами (25)-(26). Если $\varkappa = b$, $\nu = 3b$, имеем $k_1 = -ib$, $k_2 = -2ib$, и решение (27) переходит в (14), а потенциал u в (5) ($n=2$); $u = -6b^2\,\mathrm{sech}^2\,by$.

Вкратце резюмируем полученные результаты. Найденные нами решения являются решениями S3 типа бионов и соответствуют безотражательным потенциалам (баргмановским) ЛУШ(2).* Решения (14) в потенциале $u = -6b^2\,\mathrm{sech}^2\,by$ являются частным подклассом более общего солитонного решения (27), в случае эквидистантного спектра $k_{j+1} - k_j = ib$.

Новые солитонные решения векторного S3(1) можно получить, используя ее инвариантность относительно преобразования $\varphi \to \varphi' = R\varphi$, где $R \in SU(n)$. Рассмотрим $U(2)$ S3 . В этом случае имеем

$$R = \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar d & \bar c \end{pmatrix} \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1 .$$

Тогда из (27) с помощью изовращения получаем новые солитонные решения типа бризера:

$$\varphi(x,t) = \begin{pmatrix} A_1(c_1\,c\,\Psi(x,t,k_1) + d\,c_2\,\Psi(x,t,k_2)) \\ A_2(-c_1\bar d\,\Psi(x,t,k_1) + \bar c\,c_2\,\Psi(x,t,k_2)) \end{pmatrix} ,$$

где $|A_1|^2 = |A_2|^2 = 1$.

В частности, из (14) имеем следующее бризерное решение $U(2)$ S3 :

* Солитонными решениями вида (14)-(27) обладают и другие нелинейные уравнения, в том числе неинтегрируемые /11/.

$$\varphi = \begin{pmatrix} A_1(c\, c_1 e^{i\theta_1}\, \mathrm{sh}\, by + d c_2 e^{i\theta_2}) \\ A_2(-\bar{d} c_1 e^{i\theta_1}\, \mathrm{sh}\, by + \bar{c}\, c_2 e^{i\theta_2}) \end{pmatrix} \mathrm{sech}^2 by \ .$$

Условия самосогласования (4) в действительности выражает более фундаментальный факт: система квадратов с.ф. ЛУШ (4) полна, и произвольный потенциал u может быть разложен по ней (см., например, [10]). В частности, потенциал u разлагается по квадратам с.ф. следующим образом:

$$u(x,t) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k\, \frac{\bar{b}(k)}{a(k)}\, \varphi^2(k)dk - 4 \sum_{j=1}^{N} \frac{\bar{b}(k_j)}{a'(k_j)}\, k_j\, \varphi^2(k_j) \ . \qquad (28)$$

Здесь $a(k)$, $b(k)$ – коэффициенты прохождения и отражения. Разложение типа (28) иногда интегрируют как обобщенное преобразование Фурье [10]. Отметим, что чисто солитонным решениям отвечают безотражательные потенциалы, так что коэффициент отражения $b(k)=0$. В этом случае в (28) интегральный член исчезает, и мы получаем условие (4), где $|c_j|^2 = 4k_j\, \bar{b}(k_j)/a'(k_j)$. Легко также посчитать, что для данного n количество коэффициентов $|c_j|^2$ совпадает с числом биномиальных коэффициентов в "разложении единицы":

$$1 \equiv (1 + \mathrm{sh}^2 by)^{n-1}/\mathrm{ch}^{2(n-1)}\, by \ .$$

Поэтому приравнивая коэффициенты при равных степенях $(\mathrm{sh}^2 by)^k$ в условии согласования (4), мы приходим к системе линейных уравнений для определения $|c_j|^2$.

Авторы приносят глубокую благодарность И.М.Кричеверу за разъяснение деталей его метода и обсуждение результатов.

Литература

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. ЖЭТФ, 1971, т.61, с.118.
2. Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, 65, с.505.
3. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. ТМФ, 1982, 53, с.55.
4. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. Наука, М., 1980.
5. Кричевер И.М. Функц.анализ, 1978, № 1, с.76. Записки научн.семинаров ЛОМИ,"Наука", Л., 1979, 84, с.117.
6. Чередник И.В. Функц.анализ, 1978, т.12, № 3, с.45.

7. Кричевер И.М. Функц.анализ, 1986, том 20, вып.3.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. "Квантовая механика", ГИФМЛ, М.,1963, с.97.
9. Dodd R.K , Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C Solitons and Nonlinear Wave Equations . Academic Press, New York , 1982.
10. Solitons Edited by Bullough R.K. and Caudrey P.J. Springer - Verlag, New York 1980. the papev by A.Newell.
11. Makhankov V.G.,Katyshev Yu.V.,Myrzakulov R. Preprint JINR, P17-86-94 , Dubna,1986 .

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Маханьков В.Г., Мырзакулов Р. P5-86-356

Новый класс солитонных решений U(n) нелинейного уравнения Шредингера

Найдены два новых класса солитонных решений U(n) нелинейного уравнения Шредингера. Первый класс решений построен из решений линейного уравнения Шредингера с потенциалом $u = -n(n+1)b^2 \operatorname{sech}^2 bx$. Предложена схема построения солитонных решений U(n) нелинейного уравнения Шредингера и с его помощью получен второй класс солитонных решений. Из этих решений построены новые бризерные решений U(n) нелинейного уравнения Шредингера с использованием его инвариантности относительно компактной изотопической группы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Makhankov V.G., Myrzakulov R. P5-86-356

A New Class of Soliton Solutions to the U(n) Nonlinear Schrodinger Equation

Two new classes of soliton solutions to the U(n) nonlinear Schrodinger equation (S3) are founded. The first class of solutions is constructed from the solution of the linear Schrodinger equation with the potential $u = -n(n+1)b^2 \operatorname{sech}^2 bx$. A new scheme for constructing soliton solutions U(n)S3 is suggested and via in the second class of soliton solutions is obtained. From the solutions a new breather solution U(2)S3 is constructed using invariance under isorotations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986