сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-341

П.Е.Жидков, В.Г.Маханьков

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЫРОЧНОГО ТИПА В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ БОЗЕ-ГАЗА

1986

§ 1. Введение

Модель бозе-газа с нелинейностью $\Phi^4 - \Phi^6$ в квазиклассическом пределе описывается нестационарным НУШ

$$i\Psi_t + \Delta\Psi + \alpha\Psi + \Psi(|\Psi|^2 - |\Psi|^4) = 0. \qquad (1)$$

Это же уравнение моделирует описание широкого круга физических явлений, в частности феноменологию Ландау фазовых переходов первого рода /1/ и ядерную гидродинамику с силами Скирма /2/.

Некоторые классы решений (1), в том числе солитоно-подобные – СПР, в одномерном $D=1$ случае были получены и исследованы в работах /3/. Там же было выявлено, что в зависимости от величины параметра α существуют следующие типы локализованных решений:

1) $\alpha \le -\frac{1}{4}$ локализованных решений нет;

2) $-\frac{1}{4} < \alpha < -\frac{3}{16}$ пузыри в конденсате;

3) $\alpha = -\frac{3}{16}$ ступенька;

4) $-\frac{3}{16} < \alpha < 0$ капли и кинки в конденсате;

5) $\alpha > 0$ кинки в конденсате.

В областях 2)-5), кроме тривиального вакуумного состояния $\Psi = 0$, существует еще нетривиальное состояние: $|\Psi_c|^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4\alpha})$ -конденсат. Малоамплитудные возбуждения конденсата в виде плоских волн имеют боголюбовскую дисперсию

$$\omega^2 = k^2\left[k^2 + 3\left(4 - \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{|\alpha|}\sqrt{1-4\alpha}\right)\right],$$

т.е. конденсат Ψ_c инфинитезимально устойчив.

Найденные в /3/ решения конструктивно доказывают теорему существования СПР типа пузырей в случае $D=1$. Представляет интерес поиск аналогичных решений при $D=2,3$ с помощью ЭВМ. При этом весьма существенной становится уверенность в их существовании.

§ 2. Теорема существования. Общий случай

Вопросам существования СПР посвящено большое число работ /4-7/. Однако ранее изучались лишь решения типа капель, обращающиеся в нуль при $x \to \infty$. В настоящей работе получены условия существования СПР типа пузырей, т.е. стремящихся к положительной постоянной при $x \to \infty$. Уравнение (I) для статических решений сводится к

$$\Delta\Psi + \alpha\Psi + (\Psi^2 - \Psi^4)\Psi = 0, \qquad (2)$$

или в более общем случае

$$\Delta\Psi - f(\Psi) = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y'' + \frac{2}{x}y' = f(y), \quad 0 < x < +\infty \qquad (4)$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0, \qquad (5)$$

где y_0 - вещественный параметр, к которой сводится поиск сферически симметричных решений (3). В дальнейшем функцию f считаем локально липшецевой.

Введем потенциал $U(y) = -2\int_0^y f(t)\,dt$. Для любого решения $y(x)$ уравнения (4) справедливо тождество

$$\{y'^2(x) + U(y(x))\}' = -4\frac{y'^2(x)}{x}. \qquad (6)$$

Для задачи (4)-(5) справедливы теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начального условия y_0 (см. /5а/).

Основной результат работы составляет

Теорема. Пусть $0, \beta_1, \beta_2$ - корни функции f, причем $0 < \beta_1 < \beta_2$, и пусть $f(y) > 0$ при $y \in (0, \beta_1)$, $f(y) < 0$ при $y \in (\beta_1, \beta_2)$. Пусть еще $U(\beta_2) < 0$. Тогда задача (4)-(5) имеет монотонно возрастающее решение $y(x)$, такое, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \beta_2$.

Доказательство.

Докажем сначала, что для y_0, достаточно близких к 0 и положительных, интегральная кривая задачи (4)-(5) пересечет прямую $y = \beta_2$. Из тождества (6) вытекает, что для всех $y_0 \in [0, \beta_2]$ производная $|y'(x)|$ равномерно ограничена в области $0 \le y \le \beta_2$:

$$|y'(x)| \le M. \qquad (7)$$

Положим $\bar{x} = -U(\beta_2)/16M\beta_2$. Из уравнения (I) вытекает, что любое решение $y(x)$ с начальным условием $y_0 \in (0, \beta_1)$ возрастает, пока не пересечет прямую $y = \beta_1$. По теореме о непрерывной зависимости решения $y = 0$ от начального условия y_0 найдется $\beta \in (0, \beta_1)$, такое, что при $y_0 \in (0, \beta)$ решение $y(x)$ уравнения (I) на отрезке $[0, \bar{x}]$ лежит в области $0 < y < \beta_1$ и возрастает, причем

$$y'^2(\bar{x}) + U(y(\bar{x})) \ge U(\beta_2)/2. \qquad (8)$$

Докажем, что любое такое решение достигает значения β_2. Предположим противное. Обозначим через $x = c$ точку первого максимума функции $y(x)$ либо $x = +\infty$, если функция $y(x)$ не имеет максимума, тогда $y(c) \in [\beta_1, \beta_2]$.

Оценим $4\int_{\bar{x}}^{c} \frac{y'^2}{x}dx \le \frac{4M}{\bar{x}}\int_{\bar{x}}^{c} y'(x)dx \le \frac{4\beta_2 M}{\bar{x}} < -\frac{U(\beta_2)}{2}$ в силу выбора $\bar{x}$. Имея эту оценку в виду и в силу соотношений (6) и (7),

$$U(y(c)) \ge U(\beta_2)/2 - 4\int_{\bar{x}}^{c} \frac{y'^2(x)}{x}dx > U(\beta_2),$$

что противоречиво, так как $U(y) \le U(\beta_2)$ при $y \in [\beta_1, \beta_2]$. Итак, доказано, что любая интегральная кривая задачи (4)-(5) с $y_0 \in (0, \beta)$ пересекает прямую $y = \beta_2$.

Докажем, что для всех y_0 из некоторой левой полуокрестности точки β_1 интегральная кривая остается в области $y \in (y_0, \beta_2)$ при всех x. Выберем $\gamma \in (0, \beta_1)$ так, чтобы $U(\gamma) < U(\beta_2)$. Для любого $y_0 \in (\gamma, \beta_1)$ имеем: $\{y'^2(x) + U(y(x))\}|_{x=0} < U(\gamma) < U(\beta_2)$, поэтому в силу тождества (6) $\{y'^2(x) + U(y(x))\} < U(\gamma) < U(\beta_2)$ для всех $x > 0$, поэтому $U(y(x)) < U(\gamma) < U(\beta_2)$ для всех x и по непрерывности $U(y(x))$ как функции аргумента x получаем $\gamma < y(x) < \beta_2$ для всех x.

Обозначим через $\bar{y}_0$ точную верхнюю грань множества точек y_0 из $(0, \beta_1)$, для которых интегральная кривая пересекает прямую $y = \beta_2$. Тогда $\bar{y}_0 < \beta_1$. Докажем, что соответствующее решение $\bar{y}(x)$ задачи (4)-(5) монотонно возрастает на всей полупрямой $x \ge 0$ и удовлетворяет условию $\bar{y}(+\infty) = \beta_2$.

Сначала докажем, что для всех x $\bar{y}(x) < \beta_2$. Предположим противное. Тогда $\bar{y}(x_1) = \beta_2$ для некоторого x_1. Заметим, что $\bar{y}'(x_1) \ne 0$ в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (4) с начальными условиями $y(x_1) = \beta_2$, $y'(x_1) = 0$ (это решение $y(x) \equiv \beta_2$). Поэтому по теореме о непрерывной зависимости решения задачи (4)-(5) от начального условия y_0 для всех y_0, достаточно близких к $\bar{y}_0$, соответствующие решения задачи (4)-(5) достигают прямой $y = \beta_2$, что противоречит определению $\bar{y}_0$. Итак, $\bar{y}(x) < \beta_2$ для всех x.

Докажем, что решение $\bar{y}(x)$ не может иметь максимума. В самом деле, пусть $\bar{y}(x)$ достигает максимума в точке a. В силу уравнения (4) $\bar{y}(a) \in (\beta_1, \beta_2)$. Для близких к $\bar{y}_0$ значений y_0, очевидно, решения задачи (4)-(5) также достигают максимума в области $\beta_1 < y < \beta_2$, в точке b, не достигнув значения $y = \beta_2$ на промежутке $[0, b)$. Но тогда $\{y'^2(b) + U(y(b))\} = U(y(b)) < U(\beta_2)$, поэтому при x, больших b, интегральные кривые не могут достигать значения $y = \beta_2$ в силу тождества (6), что противоречит определению $\bar{y}_0$.

Итак, доказано, что $\bar{y}(x)$ - монотонно возрастающая функция, ограниченная сверху значением β_2. Поэтому существует $c = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) \leq \beta_2$. В силу уравнения (4) c равно β_1 либо β_2. Теми же рассуждениями, что и раньше, можно доказать, что если $c = \beta_1$, то для близких к $\bar{y}_0$ значений y_0 соответствующие решения задачи (4)-(5) не могут достигать значения β_2, что противоречит определению $\bar{y}_0$. Поэтому $c = \beta_2$ и теорема доказана.

Отметим, что доказательство не меняется при любом $D > 1$.

§ 3. Модель $\Phi^4 - \Phi^6$

Рассмотрим

$$y'' + \frac{2}{x} y' = -\alpha y - y^3 + y^5, \quad x > 0, \tag{9}$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0. \tag{10}$$

Здесь $f(y) = -\alpha y - y^3 + y^5$, $U(y) = \alpha y^2 + \frac{1}{2} y^4 - \frac{1}{3} y^6$. Функция f имеет два положительных корня при $-\frac{1}{4} < \alpha < 0$, которые равны $\alpha_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}}$, причем $f(y) > 0$ при $y \in (0, \alpha_1)$, $f(y) < 0$ при $y \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Остается проверить условие $U(\alpha_2) < 0$.

Функция $U(y)$ монотонно возрастает по α при любом $y \neq 0$. Поэтому $U(\alpha_2)$ также монотонно возрастает по α на интервале $(-\frac{1}{4}, 0)$. Кроме того, при $\alpha = 0$ $U(\alpha_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} > 0$, а при $\alpha = -\frac{1}{4}$ $U(\alpha_1) = U(\alpha_2) = -\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} < 0$. Таким образом, найдется $\alpha_0 \in (-\frac{1}{4}, 0)$, такое, что $U(\alpha_2) = 0$ и $U(\alpha_2) < 0$ при $\alpha \in (-\frac{1}{4}, \alpha_0)$. При этом α_0 определяется как корень уравнения

$$\alpha \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)^3 = 0,$$

лежащий в интервале $(-\frac{1}{4}, 0)$. Нетрудно проверить, что $\alpha_0 = -\frac{3}{16}$. Из приведенных рассуждений следует существование и единственность α_0.

Итак, для всех $\alpha \in (-\frac{1}{4}, \alpha_0)$ задача (9)-(10) имеет решение $y(x)$, монотонно возрастающее, положительное и такое, что существует $\lim_{x \to +\infty} y(x) = C(\alpha)$.

Заключение

Основным результатом настоящей работы является формулировка достаточных условий существования статических СПР-пузырей в рамках $D = 3$ НУШ с досточно общим видом нелинейности. В частном случае $\Phi^4 - \Phi^6$ модели эти условия совпадают с найденными при $D = 1$ в /3/ конструктивным путем:

$$\alpha \in \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{16}\right).$$

В заключение отметим, что настоящее исследование было инициировано результатами И.В.Барашенкова, ранее получившего двух- и трехмерные пузыри численно.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, М., Наука, 1964.
2. Картавенко В.Г. ЯФ, 1984, 40, стр. 377.
3. а) Barashenkov I.V., Makhankov V.G. JINR, E2-84-173, Dubna, 1984.
   б) Barashenkov I.V. et al. JINR, E17-85-967, Dubna, 1985.
4. Nehari Z., Proc. Royal Irish.Acad., 1963, v.A62, No9, 118-135.
5. а) Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, P-1319, Дубна, 1963; ЖВМ, 1964, т.4, № 5, 804-816.
   б) Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965.
6. Ryder G.H. Pacif.J.Math., 1967, vol.22, 477.
7. а) Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, P5-12609, Дубна, 1979.
   б) Жидков Е.П., Жидков П.Е. ОИЯИ, P5-12610, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 мая 1986 года.

Жидков П.Е., Маханьков В.Г. P5-86-341

О существовании статических решений дырочного типа в нелинейной модели бозе-газа

Получены достаточные условия существования солитоноподобных решений. Результаты применены для исследования модели $\varphi^4 - \varphi^6$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Zhidkov P.E., Makhankov V.G. P5-86-341

On Existence of Hole-Type Static Solutions in the Nonlinear Bose-Gas Model

Sufficient conditions for static soliton-like solutions to exist for a class of models in the condensate state are obtained. As an example the $\varphi^4 - \varphi^6$ NLS model is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986