ЦБ

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-86-250

Р.М.Ямалеев

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

1986

ВВЕДЕНИЕ

Все общие подходы к решению нелинейных уравнений основаны на том или ином способе линеаризации исходных уравнений для построения итерационных процессов поиска решений. Если начальное приближение находится в окрестности искомого решения, то исходный нелинейный функционал разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора, и, сохраняя только первый член разложения, получается уравнение для определения добавки к начальному приближению. Такова суть метода касательных Ньютона и его многочисленных модификаций [/1/]. В работе [/2/] для решения системы полиномиально нелинейных алгебраических уравнений был использован метод матричной линеаризации. Процедура матричной линеаризации обладает рядом замечательных особенностей. Во-первых, она позволяет найти аналитическое представление общего решения нелинейного уравнения в виде матрицы определенной размерности. Для определения такой матрицы достаточно решить линейную задачу. Как только матричные решения системы найдены, сами решения находятся как собственные значения соответствующих матриц. Как известно [/3/], в квантовой механике, в квантовой теории поля и в калибровочных теориях поля динамические переменные представляются в виде операторов или в виде матриц. При этом собственные значения этих операторов /или матриц/ соответствуют физически наблюдаемым величинам. Таким образом, представление неизвестных в виде матриц органично вписывается в рамки современного аппарата теоретической физики.

Второе преимущество матричного представления решений нелинейных уравнений состоит в том, что построение матричного представления равносильно разделению неизвестных в нелинейной системе, а следовательно редукции многомерной структуры к одномерной. Поскольку корни одномерного полинома/или одномерного нелинейного уравнения в заданной области/могут быть найдены исчерпывающим образом [/4/], то исходная многомерная задача будет решена на том же уровне полноты. Как известно, поиск корней в многомерном пространстве, если неизвестна априорная информация об области локализации корней, является процессом весьма трудоемким, полностью осуществимым только в избранных случаях.

1. СОПРОВОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПОЛИНОМА

Если $f(x)$ – приведенный многочлен, заданный в кольце K,

$$f(x) := x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_N , \qquad /1.1/$$

Объединенный институт ядерных исследований

то сопровождающая матрица СМ для $f(x)$ определяется равенством [5]

$$CM := \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \quad 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_1 \end{Vmatrix} \qquad /1.2/$$

и обладает следующими свойствами:

а/ характеристический многочлен СМ равен f;

б/ минимальный многочлен для СМ равен f;

в/ инвариантные многочлены для $E\lambda - CM$ равны $1, \dots, 1, f$.

Если СМ для уравнения

$$f(x) = 0 \qquad /1.3/$$

найдена, то решение /1.3/ совпадает со спектром собственных значений матрицы СМ;

$$E_N x \Psi = CM\Psi, \ \Psi^2 = 1. \qquad /1.4/$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ СМ ДЛЯ ПРИВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМИАЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ /СПНАУ/ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ

Рассмотрим систему из M неизвестных и, простоты ради, ограничимся случаем, когда все полиномы имеют одинаковую наивысшую степень N:

$$f m(x_1, x_2, \dots, x_M) = 0, \quad (m = \overline{1,M}). \qquad /2.1/$$

Приведем все полиномы системы к следующей форме:

$$x_m^N + a_{1m} x_m^{N-1} + \dots + a_{N-1m}\, x_m + a_{Nm} = 0, \ (m = \overline{1,M}), \qquad /2.2/$$

где коэффициенты a_{km} $(k = \overline{1,N}, \ m = \overline{1,M})$ являются функциями от $M-1$ неизвестных:

$$a_{km} = a_{km}(x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+2}, \dots, x_M). \qquad /2.3/$$

Тогда для M-го уравнения системы /2.2/ можно определить $CM := \hat{X}_m$ - матрицу $N \times N$, не зависящую от неизвестной x_m.

Допустим, СМ-матрица для неизвестной x_m из m-го уравнения системы /2.2/ определена и равна $\hat{X}_m \in G_{N\times N}$. Подставим $\hat{X}_m$ во все остальные уравнения системы /2.1/, сопоставляя каждому многочлену $f_i(x_1, \dots, x_m, \dots, x_M)$ матрицу $\hat{f}_i(x_1, \dots, \hat{X}_m, \dots, x_M), (i \neq m)$. При этом [5]

$$\hat{f}_i \Psi = f_i \Psi = 0, \qquad /2.4/$$

следовательно,

$$\det(\hat{f}_i) = 0, \ (i \neq m). \qquad /2.5/$$

Поскольку уравнения /2.5/ не содержат неизвестной x_m, то, продолжая этот процесс $M-1$ раз, в результате получим систему, приведенную к треугольному виду относительно неизвестных. Степень последнего одномерного уравнения треугольной системы будет равна $N^{2^{M-1}}$.

3. МЕТОД МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ СПНАУ

Метод матричной линеаризации СПНАУ описан в [2]. Он состоит в определении системы переобозначений, с помощью которой исходное полиномиально нелинейное уравнение превращается в билинейную систему уравнений. Далее, строится K-базис в циклическом $K[x]$-модуле /6/, посредством которого m-уравнение системы /2.1/ с присоединенными к нему $L-1$ уравнениями записывается как одно матричное уравнение, линейное по неизвестным x_i $(i = \overline{1,M})$:

$$\left[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{om}\right]\Psi_m = 0, \qquad /3.1/$$

причем

$$\det\left[\sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{om}\right] = f_m. \qquad /3.2/$$

По построению /3.1/ Ψ_m содержит произвольный множитель, поэтому должен быть нормирован. Положим, $\Psi_m^2 = 1$. Тогда из /3.1/ следует, что

$$f_m = 0. \qquad /3.3/$$

Поэтому если x_i $(i = \overline{1,M})$ удовлетворяет /3.1/, то заведомо удовлетворяет и /3.3/, т.е. является решением СПНАУ. Вторым важным шагом в методе матричной линеаризации является процедура приведения системы /3.1/ к совместному виду. Суть этой процедуры заключается в приведении матриц

$$\mathcal{A}_m := \sum_{k=1}^{M} x_k A_{km} + A_{om} \qquad /3.4/$$

к взаимокоммутирующему виду. С этой целью умножим матрицу $\overline{\mathcal{A}}_1$ по правилу тензорного произведения слева, а остальные $M-1$ матриц справа на единичную матрицу E_L порядка L. Получим

$\overline{\mathcal{A}}_1 = E_L \otimes \mathcal{A}_1, \quad \overline{\mathcal{A}}_i = \mathcal{A}_i \otimes E_L, (i = \overline{2,M})$.

При этом

$$\det(\overline{\mathfrak{A}}_m) = \{\det(\mathfrak{A}_m)\}^L = f_m^L = 0. \qquad /3.5/$$

Следовательно, решения /3.5/ есть решения /3.3/ и наоборот. Далее, умножим $\overline{\mathfrak{A}}_1$ и $\overline{\mathfrak{A}}_2$ по тому же правилу тензорного произведения на E_L слева, а остальные M-2 матриц - справа. Продолжая этот процесс до M-1 матрицы, можно показать, что получим систему взаимокоммутирующих матриц. Обозначим их через $\{AE_i\}, (i = \overline{1,M})$. Порядок матриц AE_i равен L^M. Приводя систему /3.1/ к совместному виду, мы переходим из /3.1/ к системе

$$\left[\sum_{k=1}^{M} x_k AE_{km} + AE_{om}\right]\Phi = 0, \ (m = \overline{1,M}), \qquad /3.6/$$

где вектор Φ одинаков для всех уравнений системы.

Третий шаг матричной линеаризации состоит в сопоставлении исходной нелинейной задаче линейной блочно-матричной системы. Действительно, предположим, что существуют матрицы $\hat{X}_k$ порядка L^M, коммутирующие друг с другом, такие, что

$$x_k \Phi = \hat{X}_k \Phi. \qquad /3.7/$$

Как показано в [2], матрицы $\hat{X}_k$ могут быть определены непосредственно из /3.6/, если матрицы AE_{km} - неособые. Заменяя x_k на соответствующие матрицы согласно /3.7/, получим систему

$$\sum_{k=1}^{M} AE_{km} \cdot \hat{X}_k = -AE_{om}, \qquad /3.8/$$

определяющую $\hat{X}_k$ как решения /3.8/. В общем случае матрицы AE_{km} - особые. Однако в силу коммутативности строк матрицы

$$AEX := \left\|\begin{matrix} AE_{11} \dots AE_{1M} \\ \dots\dots\dots\dots \\ AE_{M1} \dots AE_{MM} \end{matrix}\right\|, \qquad /3.9/$$

задачу /3.6/ удается свести к задаче на собственные значения вида

$$\omega x_k U = U R_k, \qquad /3.10/$$

U - ортогональная матрица собственных векторов. Продемонстрируем эту возможность на примере системы из двух неизвестных:

$$[AE_{11}x_1 + AE_{12}x_2]\Phi = -AE_{01}\Phi,$$

$$[AE_{21}x_1 + AE_{22}x_2]\Phi = -AE_{02}\Phi. \qquad /3.11/$$

Умножим первое уравнение на AE_{21} второе - на AE_{11}. Вычитая одно уравнение из другого и используя

$$AE_{21}AE_{11} - AE_{11}AE_{21} = 0,$$

получим

$$\omega x_2 \Phi = (AE_{01}AE_{21} - AE_{02}AE_{11})\Phi,$$

$$\omega = AE_{22}AE_{11} - AE_{12}AE_{21}. \qquad /3.12/$$

Аналогично для x_1 имеем

$$\omega x_1 \Phi = (AE_{02}AE_{12} - AE_{01}AE_{22})\Phi. \qquad /3.13/$$

Согласно /7/, для матрицы с блочными элементами и с коммутирующими строками можно определить функцию детерминанта Det(A), имеющую ту же структуру, что и обычный детерминант, где элементы матрицы заменены на блоки, а обычное умножение - на умножение между матрицами. Таким образом, Det(A) является матрицей того же порядка, что и матрицы в блоках. Рассмотрим линейную неоднородную блочно-матричную систему вида

$$\sum_{k=1}^{M} AE_{km} Z_k = F_m, \qquad /3.14/$$

где

$$Z_k = x_k \Phi, \quad F_m = -AE_{om}\Phi. \qquad /3.15/$$

Будем искать решение /3.14/ по правилу Крамера. Находим

$$\mathrm{Det}(AEX) \cdot Z_m = \sum_{k=1}^{M} F_k \cdot AEX_{km}, \qquad /3.16/$$

где AEX_{km} - алгебраические дополнения, миноры которых определены через матричный детерминант Det. Возвращаясь к прежним обозначениям и приняв

$$\omega = \mathrm{Det}(AEX), \quad R_m = -\sum_{k=1}^{M} AE_{om} AEX_{km},$$

получим

$$x_m \omega \Phi = R_m \Phi. \qquad /3.17/$$

Таким образом, вместо того, чтобы решать многомерную систему /2.1/, достаточно решить обобщенную задачу на собственные значения /3.17/. Собственные линейно-независимые векторы /3.17/ удовлетворяют условию "ω-ортонормированности":

$$(\Phi_n, \omega \Phi_k) = \delta_{nk}.$$

После того как будет решена задача /3.17/, т.е. будут найдены собственные значения x_{kon} и собственные векторы Φ_n, остальные неизвестные можно найти по формуле

$$x_{kn} = (\Phi_n, R_k \Phi_n). \qquad /3.18/$$

Совокупность $(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Mn})$, соответствующая координатам точки M-мерного аффинного пространства есть n-е решение СПНАУ /2.1/. Число решений NR, $1 \le n \le NR$ СПНАУ совпадает с числом собственных значений задачи /3.17/, которое, в свою очередь, определяется рангом матрицы ω. В случае системы из двух уравнений имеем

$$r(\omega) \le r(A_{22})\, r(A_{11}) + r(A_{12})\, r(A_{21}), \qquad /3.17/$$

где $r(A)$ - ранг матрицы A. В общем случае неравенство, подобное /3.17/, определяет максимальное число решений СПНАУ.

4. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА СПИНОРНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

В работе [8] был предложен метод спинорной линеаризации системы квадратично нелинейных алгебраических уравнений. Суть метода спинорной линеаризации состоит в применении алгебры Клиффорда для линеаризации суммы квадратов. Поскольку образующие алгебры Клиффорда определяются квадратичными соотношениями [8,9]

$$\begin{aligned} &\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \ \beta_i \beta_j + \beta_j \beta_i = -2\delta_{ij}, \\ &\omega_i^p \omega_j^r + \omega_j^r \omega_i^p = \epsilon_i \delta^{pr} (1 - \delta_{ij}), \ (\epsilon_i = \pm 1), \end{aligned} \qquad /4.1/$$

попытки обобщить данный метод на полиномы более высокой степени нелинейности встречаются с большими трудностями. Метод спинорной линеаризации можно применить без изменения, если предварительно исходный полином превратить в билинейную систему. Как мы знаем, для этого достаточно применить первый шаг метода матричной линеаризации.

Чтобы не загромождать текст индексами общих обозначений, продемонстрируем метод на примере системы из двух неизвестных:

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 + a_{x^2y}\, x^2 y + a_y y + a_{y^2} y^2 + a_0 = 0, \\ &x^3 - y^3 + b_{y^2x}\, y^2 x + b_{x^2} x^2 + b_x x + b_0 = 0. \end{aligned} \qquad /4.2/$$

Присоединяя к первому из уравнений /4.2/ систему переобозначений, получим

$$\begin{aligned} &x\alpha 2 + y\beta 2 + a_{x^2y}\, \alpha 2 y + a_y y + a_{y^2} y^2 + a_0 = 0, \\ &\alpha 2 - x^2 = 0, \\ &\beta 2 - y^2 = 0. \end{aligned} \qquad /4.3/$$

Линеаризуем систему /4.3/, применяя образующие /4.1/. Получим

$$\begin{aligned} &[x\omega_1^1 + y(\omega_1^2 + \omega_2^3 + a_{y^2}^{1/2} \alpha_1) + \beta 2\omega_1^2 + \alpha 2 \omega_2^1 + \\ &+ a_y \omega_1^3 + a_0^{1/2}]\Psi_1 = 0, \\ &[x\beta_1 + \alpha 2\omega_1^1 + \omega_2^1]\Psi_2 = 0, \\ &[y\beta_1 + \beta 2\omega_1^1 + \omega_2^1]\Psi_3 = 0. \end{aligned} \qquad /4.4/$$

Приведем систему /4.4/ к совместному виду и введем дополнительный индекс, указывающий на номер строки: $\alpha \to \alpha(i)$, $\beta \to \beta(i)$, $\omega \to \omega(i)$ - номер уравнения в /4.4/. Теперь исключим из первого уравнения /4.4/ вспомогательные переменные $\alpha 2$ и $\beta 2$. На первый взгляд это невозможно из-за нильпотентности образующих при $\alpha 2$ и $\beta 2$. Эта трудность незначительна, поскольку матрицы, принадлежащие к разным строкам, коммутируют, и поэтому нет необходимости находить обратные матрицы. Умножая первое уравнение на $\omega_1^1(2)$, второе - на $\omega_2^1(1)$ и вычитая второе из первого уравнения, получим

$$\begin{aligned} &[x(\omega_1^1(1)\omega_1^1(2) - \beta_1(2)\omega_2^1(1)) + \\ &+ y(\omega_1^2(1)\omega_1^1(2) + \omega_2^3(1)\omega_1^1(2) + a_{y^2}^{1/2}\alpha_1(1)\omega_1^1(2)) + \\ &+ a_0^{1/2}\omega_1^1(2)]\Phi = 0, \\ &[\beta 2\omega_1^1(3) + \omega_2^1(3) + y\beta_1(3)]\Phi = 0. \end{aligned} \qquad /4.5/$$

Образующие $\omega_1^2(1)\omega_1^1(2)$ и $\omega_1^1(3)$ коммутируют между собой, поэтому, умножая первое уравнение /4.5/ на $\omega_1^1(3)$, второе - на $\omega_1^2(1)\omega_1^1(2)$ и вычитая одно уравнение из другого, получим линейное по x и y матричное уравнение вида:

$$[A_{xx}x + A_{xy}y + A_{x0}]\Phi = 0, \qquad /4.6/$$

где

$$A_{xx} := \omega_1^1(3)(\omega_1^1(1)\omega_1^1(2) - \beta_1(2)\omega_2^1(1)),$$

$$A_{xy} := \omega_1^1(3)(\omega_1^2(1) + \omega_2^3(1) + a_{y^2}^{1/2}\alpha_1)\omega_1^1(2) - \omega_1^2(1)\omega_1^1(2)\beta_1(3),$$

$$A_{x0} := [a_y\omega_1^3(1)\omega_1^1(2) + a_0^{1/2}\omega_1^1(2)]\omega_1^1(3) - \omega_1^2(1)\omega_1^1(2)\omega_2^1(3).$$

Аналогичным способом можно линеаризовать второе уравнение /4.2/

Как видно из /4.6/, матрицы A_{xx} и A_{xy} в общем случае могут оказаться особыми, однако, согласно результатам предыдущих параграфов, это не является препятствием для исключения неизвестных в системе, приведенной к совместному виду.

В общем случае системы из M уравнений с произвольной степенью нелинейности /2.1/ применение данного метода состоит из следующих этапов: 1/ путем присоединения к системе /2.1/ системы переобозначений исходная задача превращается в систему с квадратичной нелинейностью; 2/ применением метода спинорной линеаризации система приводится к линейному относительно неизвестных виду; 3/ матричная система приводится к совместному виду, и вспомогательные переменные, определенные в системе переобозначений, исключаются из системы.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ К РЕШЕНИЮ ПОЛИНОМИАЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ /ИДО/

Рассмотрим сначала одномерное уравнение, где член, содержащий ИДО, входит как линейный оператор. Поскольку для нашего рассмотрения тип граничных условий не имеет значения, здесь и далее мы не будем эти условия выделять, полагая, что они включены в определение ИДО. Определим СМ для алгебраических одномерных уравнений с линейным ИДО:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + (a_n + D)y + f = 0, \qquad /5.1/$$

D - символизирует интегральный или дифференциальный оператор.

Определим СМ для /5.1/ следующим образом:

$$CM(y) := \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f & -(D + a_n) & \dots & & -a_1 \end{Vmatrix}. \qquad /5.2/$$

Это определение удовлетворяет всем требованиям для сопровождающей матрицы. Действительно, подстановка /5.2/ в /5.1/ дает нулевую матрицу, т.е. $CM(y)$ удовлетворяет характеристическому уравнению /5.1/. Решение /5.1/ можно определить как собственные значения /5.2/:

$$y\Psi = CM(y)\Psi. \qquad /5.3/$$

Например, в случае квадратного уравнения

$$y^2 + Dy + f = 0 \qquad /5.4/$$

имеем

$$CM := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & -D \end{pmatrix},$$

$$y\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & -D \end{pmatrix}\Psi. \qquad /5.5/$$

Пусть y_1, y_2 есть собственные значения /5.5/. Тогда

$$\Psi_{1,2} = \begin{pmatrix} a \\ a y_{1,2} \end{pmatrix} \qquad /5.6/$$

- собственные функции. Подставляя /5.6/ и /5.5/, получим /5.4/. Несмотря на некоммутативность D с другими элементами СМ, можно ввести понятие функции определителя матрицы

$$L := \begin{pmatrix} y & -1 \\ f & D + y \end{pmatrix}, \qquad /5.7/$$

$$\mathrm{Det}\, L := f \cdot 1 + (D + y)y.$$

Важно, что правильное определение функции Det позволяет определить минимальный многочлен /5.4/. Обощение определения Det из /5.7/ для $CM(y)$ /5.2/ является очевидным. Однако основным объектом нашего исследования является система уравнений. Для системы СМ имеет более сложную структуру, поэтому необходимо обобщить определение Det на случай произвольной матрицы. Заметим, что основная особенность определения Det(CM) состоит в том, что Det не является оператором. Следовательно, необходимо, чтобы первая или последняя строка не содержала оператора D. Матрицы СМ удовлетворяют этому требованию. Введем следующее определение функции определителя от A;

$$\mathrm{Det}\, A := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}, \qquad /5.8/$$

где a_{1i} - элементы первой строки A, если D содержится на первой строке и a_{1i} являются элементами последней строки, если D входит в последнюю строку. Миноры, соответствующие алгебраическим дополнениям A_{ij}, определяются по той же формуле /5.8/. Выбор строки для определения миноров строго соответствует первоначальному выбору: если выбрана первая строка, то для всех миноров разложение должно вестись именно по первой строке, если последняя - то по последней строке.

Введенные определения позволяют найти СМ для системы полиномиально нелинейных уравнений, линейно содержащих ИДО. Проиллюстрируем метод на примере двух уравнений третьей степени:

$$\begin{aligned} F_1 &:= y^2 x + x^3 + D(yx) + Dx^2 + f_1 x = 0, \\ F_2 &:= y^3 - x^2 y + Dy^2 - D(xy) + f_2 y = 0; \end{aligned} \qquad /5.9/$$

f_1, f_2 - постоянные.

После матричной линеаризации получим

$$A_1 \Psi_1 := [x E_3 + y A_{xy} + A_{ox}]\Psi_1 = 0,$$

/5.10/

$$A_2 \Psi_2 := [x A_{yx} + y E_3 + A_{oy}]\Psi_2 = 0,$$

$$A_{xy} := \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_{yx} := \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

/5.11/

$$A_{ox} := \begin{Vmatrix} D & D & f_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_{oy} := \begin{Vmatrix} D & -D & f_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь важно, что операторы D входят только в матрицы, свободные от неизвестных. Согласно определению Det, имеем

$$\operatorname{Det} A_1 = F_1 = 0,$$

/5.12/

$$\operatorname{Det} A_2 = F_2 = 0.$$

Пользуясь методом, описанным в [2], получим СМ для x и y:

$$CM(x) := R^{-1}(A_{xy} \otimes A_{oy} - A_{ox} \otimes E_3),$$

/5.13/

$$CM(y) := R^{-1}(A_{ox} \otimes A_{yx} + E_3 \otimes A_{oy}).$$

Матрица $R = E_3 - A_{xy} \otimes A_{yx}$ не содержит D.

Пример для иллюстрации действия метода был выбран специального вида: уравнения /5.9/ однородны, и поэтому применим метод из [2], где R - неособая матрица. В этом случае СМ может быть найдена в явном виде. В случае системы произвольного вида необходимо пользоваться методом, изложенным в разд.3. В результате получим

$$\omega x \Psi = \hat{X}(D)\Psi,$$

/5.14/

$$\omega y \Psi = \hat{Y}(D)\Psi,$$

где ω - особая матрица, не содержащая D. D не содержится также на последней строке матриц $\hat{X}(D)$ и $\hat{Y}(D)$.

Теперь рассмотрим случай, когда члены вида Dy_i входят в систему полиномиально нелинейным образом: $F_k(Dy_i)$. Метод оказывается и в этом случае применимым, если систему предварительно преобразуем к линейному по D виду. Пусть имеем уравнение

$$y^2 + (Dy)^2 + ay + f = 0. \qquad /5.15/$$

Перепишем его в виде системы из двух уравнений:

$$y^2 + z^2 + ay + f = 0,$$

/5.16/

$$z - Dy = 0.$$

Применяя к каждому из уравнений метод матричной линеаризации, получим

$$[y A_{1y} + z A_{1z} + A_{1o}]\Psi_1 = 0,$$

/5.17/

$$[y A_{2y} + z A_{2z} + A_{2o}]\Psi_2 = 0,$$

$$A_{1y} := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_{1z} := \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_{1o} := \begin{Vmatrix} 0 & D & f \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_{2y} := \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad /5.18/$$

$$A_{1y} := \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_{2o} := \begin{Vmatrix} -D & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Исключая вспомогательную переменную z, находим

$$\omega y \Phi = Y(D)\Phi,$$

$$\omega := (A_{1y} \otimes A_{2z} - A_{2y} \otimes A_{1z}), \qquad /5.19/$$

$$Y := (A_{2o} \otimes A_{1z} - A_{1o} \otimes A_{2z}).$$

Изложенная схема применима для произвольного СПНАУ с полиномиально нелинейным ИДО.

В определении СМ /5.2/ оператор D входит в матрицу и действует на Ψ. Теперь попытаемся применить метод спинорной линеаризации для определения СМ для /5.4/. Получим

$$y\Psi = -(\alpha + \omega_2^1)(\omega_1^1 D + f\beta)\Psi. \qquad /5.20/$$

Таким образом, в рамках метода спинорной линеаризации, для определения СМ необходимо расщепить $Dy \to \omega_1^1 D + \omega_2^1 y$. При квадрировании имеем

$$(\omega_1^1 D + \omega_2^1 y)^2 = \omega_2^1 \omega_1^1 Dy + \omega_1^1 \omega_2^1 yD =$$

$$= Dy + \omega_1^1 \omega_2^1 (yD - Dy) \neq Dy .$$

Этот пример демонстрирует непригодность метода спинорной линеаризации для определения СМ у СПНАУ, содержащей ИДО. Аналогично можно показать неприменимость метода сведения к однородному полиному /2/ и метода разд.2. В теоретической физике /8/ эти методы линеаризации соответствуют теориям ненулевого спина, и некоммутативность $D:=\partial - eA$ в этом случае приводит к полезному эффекту: появлению члена взаимодействия магнитного диполя с внешним полем. В нашем случае это обстоятельство ограничивает применимость метода.

Итак, метод, описанный в разд.3 настоящей работы,позволяет:
1/ разделить неизвестные СПНАУ с ИДО;
2/ найти матрично-операторное представление решения СПНАУ с ИДО;
3/ данное представление является оптимальным по рангу найденной матрицы и согласовано с истинным числом решений СПНАУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. "Наука", М., 1978.
   Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. "Наука", М., 1969.
   Жидков Е.П. и др. ЭЧАЯ, 1973, 4, 1, с.127.
2. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р11-85-815, Дубна, 1985.
3. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. Физматгиз, М.,1960.
   Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
4. Уилкинсон Д.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. "Наука", М., 1970.
5. Ланкастер П. Теория матриц. "Наука", М., 1978.
6. Ван-дер-Варден Б.Л. Алгебра. "Наука", М., 1979.
7. Vitoria J. Bull.Math. de la Soc.Sci. Math. de la R.S. de Roumanie. 1982, tome 26(74), nr.1.
8. Кузнецов П.Г., Пшеничников С.Б. ДАН СССР, 1985, т.283, № 5, с.1075.
9. Зайцев Г.А. ДАН СССР, 1964, т.156, № 2, с.294.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 апреля 1986 года.

Ямалеев Р.М. Р5-86-250
Матричные представления общего решения полиномиально нелинейных уравнений и их применение

Понятие сопровождающей матрицы обобщается для системы полиномиально нелинейных алгебраических уравнений. Для каждой неизвестной ставится в соответствие матрица, зависящая только от коэффициентов системы. Эти матрицы находятся из решения линейной системы алгебраических уравнений. Таким образом, исходной нелинейной задаче сопоставляется линейная система для определения матриц. Найденные матрицы имеют те же свойства, что сопровождающие матрицы для одномерных полиномов:

1/ удовлетворяют заданной системе нелинейных уравнений, т.е. являются матричным представлением общего решения;

2/ спектр матриц совпадает со спектром неизвестных.

Метод позволяет найти решения многомерной системы исчерпывающим образом. Показана применимость метода к полиномиально нелинейным задачам, содержащим интегродифференциальный оператор.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод автора

Yamaleev R.M. P5-86-250
Matrice Representations of General Solution of Polynomial Nonlinear Equations and Their Applications

Notion of an accompanying matrix is generalized for the system of polynomial nonlinear algebraic equations. For each unknown a corresponding matrice is constructed, depending only on coefficients of the system. Elements of the matrix are difined from the linear system of algebraic equations. Thus, to original nonlinear system a corresponding linear system for defining the matrices is compared. The found matrices have the same properties as accompanying matrices for one-dimensional polynom: 1) they satisfy the set system of nonlinear equations, i.e. are matrix representation of the general solutions; 2) matrix spectrum coincides with the spectrum of unknowns. The method allows one to find solutions of multidimensional system in an exhastive way. The employability of the method for solving the polynomial nonlinear system, containing integrodifferential operator is shown.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986