8547

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P5 - 8547

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

1975

P5 - 8547

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Направлено в ЖВМ и МФ

Сердюкова С.И. P5 - 8547

Об устойчивости краевых задач для систем разностных уравнений различной структуры

С помощью полученного ранее критерия устойчивости краевых задач для систем разностных уравнений однородной структуры получен критерий устойчивости для класса систем разностных уравнений различной структуры.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Serdyukova S.I. P5 - 8547

On Stability of Initial Boundary Value Problems for Systems of Nonuniform Difference Equations

Using the previous criterion of stability of initial boundary value problems for systems of uniform difference equations there has been obtained a criterion of stability for systems of nonuniform difference equations.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

В работах /1-4/ получены необходимые и достаточные условия устойчивости разностных краевых задач на полубесконечной прямой для систем разностных уравнений вида:

$$u_{\nu}^{n+1} = \sum_{j=-r1}^{r2} \Lambda_j u_{\nu+j}^{n} \quad , \quad n \geq 0 \, , \nu \geq 1 \, .$$

При этом предполагается, что $r1 \geq 1$ и Λ_{-r1} , Λ_{r2} - невырожденные матрицы. В частности, требуется, чтобы все уравнения были написаны по одному и тому же набору точек. Между тем широко используемые на практике разностные схемы для решения задач газовой динамики , акустики, "мелкой воды" и т.д., представляют собой системы разностных уравнений, написанных по различным для разных уравнений наборам точек. В этой работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости краевых задач для систем разностных уравнений различной структуры. В перечисленных выше задачах для каждого переменного разностная схема составляется по своему набору точек, переменные связаны только через краевые условия. Обобщением является класс разностных краевых задач вида:

$$u_{i\nu}^{n+1} = \sum_{j=-r1i}^{r2i} A_j^i u_{i\,\nu+j}^{n} \, , \quad n \geq 0 \, , \ \nu \geq 1 \, , \ i = 1, \dots, I \, ,$$

$$u_{i\nu}^{0} = f_{i\,\nu} \, , \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{i\nu}|^2 < \infty \, , \qquad /1/$$

$$u_{im}^{n} = \sum_{\xi=1}^{I} \sum_{j=1}^{s} C_{jm}^{i\xi} u_{\xi j}^{n} \, , \quad m = 0, -1, \dots, -r1i + 1 .$$

Если какое-то $r1i = 0$, то соответствующая краевая задача вырождается в задачу Коши и краевые условия для счета просто не нужны. $u^n_{i\nu}$ - векторы размерности ki, A^i_j; $C^{i\xi}_{jm}$ - постоянные матрицы. Если $r1i \geq 1$, то $\mathrm{Det}\, A_{-r1i} \neq 0$. Соответственно, если $r2i \geq 1$, то $\mathrm{Det}\, A_{r2i} \neq 0$. Хотя не исключается, что $r1i = 0$ или $r2i = 0$ и даже $r1i = r2i = 0$.

Приходится отдельно рассматривать такие случаи:

I. $r1i \geq 1$, $r2i \geq 1$, $i = 1,\dots,I$; II. $r1i \geq 1$, $r2i = 0$;

III. $r1i = 0$, $r2i \geq 1$; IV. $r1i = r2i = 0$.

Случай I. $r1i \geq 1$, $r2i \geq 1$, $i = 1,\dots,I$.

В этом случае, в отличие от рассмотренного ранее, резольвентная матрица имеет блочно-диагональную структуру. Блоками служат резольвентные матрицы для отдельных выделенных в /1/ систем уравнений:

$$M_i(z) = \left\| \begin{matrix} -A^{-1}_{r2i} A^i_{r2i-1} & \dots & -A^{-1}_{r2i}(A^i_0 - zE) & \dots & -A^{-1}_{r2i} A^i_{-r1i} \\ E & 0\dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E\dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0\dots & 0 & E & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$M(z) = \left\| \begin{matrix} M_1(z) & 0\dots & 0 \\ 0 & M_2(z)\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\cdot \\ 0 & 0 & \dots M_I(z) \end{matrix} \right\|$$

Каждый блок $M_i(z)$ аналитическим преобразованием подобия $T_i(z)$ приводится к нормальному виду /4/. Тогда блочно-диагональное преобразование подобия

$$T(z) = \left\| \begin{matrix} T_1(z) & 0\dots & 0 \\ 0 & T_2(z). & 0 \\ 0 & 0\dots & T_I(z) \end{matrix} \right\|$$

приводит каждый блок $M(z)$ к нормальному виду. Чтобы привести к нормальному виду саму $M(z)$, достаточно соответствующим образом переставить столбцы $T^{-1}(z)$. Пусть нормальная форма построена, блоки M_{11}, M_{22} найдены. Размерности этих блоков равны $\sum_i r1i\cdot ki$ и $\sum_i r2i\cdot ki$. Соответственно разбиваем на блоки матрицу T^{-1} /3/. Положим далее $r1 = \max_i r1i$ и обозначим через u^n_ν вектор, составленный из векторов $u^n_{i\nu}$ $i = 1,\dots,I$. Тогда краевые условия /1/ могут быть записаны в таком виде:

$$u^n_m = \sum_{j=1}^{s} C_{jm} u^n_j, \quad m = 0, -1, \dots, -r1+1.$$

u^n_j, u^n_m - векторы размерности $k = \sum ki$, C_{jm} - постоянные матрицы размерности (k,k). В C_{jm} в нужных местах стоят $C^{\xi i}_{jm}$, остальные места заполнены нулевыми блоками. Далее стандартным образом строим аналитические краевые матрицы /4/, которые должны удовлетворять ограничениям на порядки особенностей /4/.

Случай II. $r1i \geq 1$, $r2i = 0$, $\mathrm{Det}\, A_{-r1i} \neq 0$.

Соответствующая резольвентная матрица устроена так:

$$M_i(z) = \left\| \begin{matrix} -(A^i_0 - zE)^{-1} A^i_{-1} & \dots & -(A^i_0 - zE)^{-1} A^i_{-r1i} & \\ E & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & E \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & E & 0 \end{matrix} \right\|$$

Не исключено, что $A^i_0 = 0$. Здесь неособенной должна быть матрица $(A^i_0 - z)$, $|z| \geq 1$. Покажем, что это следует из устойчивости задачи Коши: если задача Коши устойчива, то спектр A^i_0 расположен строго внутри единичного круга. Пусть $\operatorname{spr} A^i_0 = \rho$, тогда $M_i(z)$ определена вне $|z| \leq \rho$. По предположению, $\operatorname{Det} A_{-r1i} \neq 0$. Пусть σ - максимальное по модулю собственное значение A^i_0, $|\sigma| = \rho$. Тогда

$$-\operatorname{Det} M_i(z) = \operatorname{Det}(A^i_0 - zE)^{-1} A^i_{-r1i} \to \infty \qquad \text{при } z \to \sigma .$$

Если $|\sigma| \geq 1$, то при достаточно малом δ

$$|\operatorname{Det} M_i(z)| > 2^{ki - r1i}, \quad z \subset \Omega = \{ |z - \sigma| < \delta \cap |z| > 1 \}.$$

Фиксируем в Ω какую-нибудь точку z_0, $|z_0| > 1$. Тогда хотя бы одно из собственных значений $M_i(z_0)$ по модулю больше 2. Заметим далее, что при $|z| \to \infty$ все собственные значения $M_i(z)$ стремятся к нулю. В самом деле, собственные значения $M_i(z)$ удовлетворяют уравнению:

$$\operatorname{Det}\Big(\sum_{j=-r1i}^{-1} A^i_j \kappa^j + A^i_0 - zE \Big) = 0 .$$

При $|z| \to \infty$ решения этого уравнения имеют такую асимптотику:

$$\kappa_{\xi\ell} = \Big(\frac{a_\xi}{z}\Big)^{\frac{1}{r1i}}_{\ell} \Big(1 + O\big(z^{-\frac{1}{r1i}}\big)\Big), \quad \ell = 1, \dots, r1i .$$

Здесь a_ξ - собственные значения A_{-r1i}, $\xi = 1, \dots, ki$. По предположению, $\operatorname{Det} A_{-r1i} \neq 0$, следовательно, и $a_\xi \neq 0$.

Собственные значения $M_i(z)$ - непрерывные функции z. Следовательно, на любом пути из z_0 в ∞, в частности, на любом пути из z_0 в ∞, расположенном в $|z| \geq |z_0| > 1$, найдется точка z^*_0, в которой хотя бы одно собственное значение $M_i(z)$ по модулю равно 1. Обозначим его через κ_0. Тогда κ_0 является точкой единичной окружности, в которой характеристическая матрица задачи Коши имеет собственное значение z^*_0, большее по модулю 1, что противоречит устойчивости задачи Коши. Таким образом, из устойчивости задачи Коши следует, что спектр A^i_0 лежит строго внутри единичного круга. Отсюда, в свою очередь, следует, что $M_i(z)$ определена везде в $|z| \geq 1$. Кроме того, из доказанного выше следует, что при $|z| \geq 1$ все собственные значения $M_i(z)$ по модулю не превосходят 1. Таким образом, в рассматриваемом случае $M_i(z) \equiv M^i_{11}(z)$. В остальном случай II ничем не отличается от случая I. Если для всех $i = 1, \dots, l$ $r2i = 0$, то $T_{11} = 0$, $T_{12} = 0$, $T_{21} = T^{-1}$, $T_{22} = 0$. Тогда $K_2(z) = 0$ и условия устойчивости сводятся к ограничениям на порядок особенностей матрицы

$$K_1^{-1}(z) = \Big(E - \sum_{\xi = r1}^{s} C_\xi M(z)^{\xi}\Big)^{-1} \cdot T(z) .$$

Случай III. $r1i = 0$, $r2i \geq 1$, $\operatorname{Det} A_{r2i} \neq 0$.

Это случай вырождения соответствующей краевой задачи в задачу Коши. Резольвентная матрица имеет такой вид:

$$M_i(z) = \left\| \begin{matrix} -A^{-1}_{r2i} A^i_{r2i-1} & \dots & -A^{-1}_{r2i} (A^i_0 - zE) & \\ E & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & E \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & E & 0 \end{matrix} \right\|$$

Аналогично тому, как это было сделано в случае II, можно доказать, что спектр A_0^i лежит строго внутри единичного круга /следствие устойчивости задачи Коши/, а собственные значения $M_i(z)$ по модулю не меньше единицы при $|z| \ge 1$. Таким образом, здесь $M_i(z) \equiv M_{22}^i(z)$. Матрица $M_i^{-1}(z)$ определена при всех $|z| \ge 1$: $-\mathrm{Det}\, M_i(z) = \mathrm{Det}\, A_{r2i}^{-1}(A_0^i - zE)$. Здесь необходимо, чтобы $\sum_r r1i \cdot ki \ge 1$, иначе нет никакой краевой задачи. $\sum_i r2i \cdot ki \ge 1$, по предположению. Далее все как в случае I.

Случай IV. $r1i = r2i = 0$.

Это самый интересный случай вырождения, который приводит к нестандартным результатам и одновременно дает ключ к решению проблемы устойчивости для краевых задач с неоднородными краевыми условиями. Рассматриваемая задача Коши:

$$\begin{cases} u_\nu^{n+1} = A_0 u_\nu^n, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad n \ge 0, \\ u_\nu^0 = f_\nu, \quad \sum_1^\infty |f_\nu|^2 < \infty, \quad A_0 = A_0^i. \end{cases} \qquad /2/$$

имеет такое простое решение $u_\nu^n = A_0^n f_\nu$. Для того чтобы /2/ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы спектр A_0 лежал в единичном круге и чтобы собственные значения A_0, равные по модулю 1, не имели жордановых ящиков. Легко видеть, что резольвента рассматриваемой задачи Коши имеет следующий простой вид:

$$v_\nu = (A_0 - zE)^{-1} \cdot \xi\nu .$$

Далее поступаем следующим образом. В исходной краевой задаче /1/ выделяем вектор $u_{i\nu}^n$ с $r1i = r2i = 0$. Обозначим его через v. Остальные переменные обозначим через y. Тогда краевые условия /1/ могут быть записаны в таком виде: $-r1 + 1 = -r$

$$\begin{Vmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{-r} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_{0,1} & \dots & C_{0,s} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{-r,1} & \dots & C_{-r,s} & y_s \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} D_{0,1} & \dots & D_{0,s} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{-r,1} & \dots & D_{-r,s} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_1 \end{Vmatrix}$$

В нужных местах стоят исходные краевые матрицы $C_{jm}^{\xi i}$, остальные места заполнены нулями. Для y строим резольвентную матрицу, как это делалось выше, далее строим резольвенту, как это делалось, например, в работе /4/. При этом краевые условия приводятся к такому виду:

$$K_1 w_1^{I} = K_2 w_1^{II} + \sum_{\nu=1}^{s} B_\nu^{I} (T g_\nu)^{I} + B_\nu^{II} (T g_\nu)^{II} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} D_{0,1}(A_0 - zE)^{-1} & \dots & D_{0,s}(A_0 - zE)^{-1} \\ \vdots & & \\ D_{-r,1}(A_0 - zE)^{-1} & \dots & D_{-r,s}(A_0 - zE)^{-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_s \end{Vmatrix} =$$

$$= K_2 w_1^{II} + \sum_{\nu=1}^{s} B_\nu^{I} (T g_\nu)^{I} + B_\nu^{II} (T g_\nu)^{II} + K_3 \cdot \xi .$$

Таким образом, появилась новая аналитическая краевая матрица $K_3(z)$ и для устойчивости /1/ наряду с условиями, сформулированными в /4/, необходимо и достаточно, чтобы $K_1^{-1} K_3$ удовлетворяла тем же ограничениям на порядки особенностей элементов, что и K_1^{-1}.

Таким образом, даже когда K_1 не вырождается, элементы $K_1^{-1} K_3$ могут иметь при $z = 1$ особенности, вызывающие неустойчивость. Правда, в таком случае $\|G^n\|$ растет не быстрее, чем $\sqrt{n}$. G - оператор перехода от слоя к слою. Рассмотрим пример, демонстрирующий такую неустойчивость.

Пример. Рассматривается разностная краевая задача:

$$\begin{cases} u_\nu^{n+1} = 0{,}75\, u_{\nu-1}^n + 0{,}25\, u_{\nu+1}^n, \quad \nu \geq 1, \quad n \geq 0, \\ v_\nu^{n+1} = v_\nu^n, \\ u_0^n = v_1^n, \quad u_\nu^0 = f_\nu, \quad v_\nu^0 = g_\nu. \end{cases} \qquad /3/$$

Первое уравнение - схема Лакса для уравнения $u_t = -u_x$ с $\tau/h = 0{,}5$, τ - шаг по t, h - шаг по x. Если $g_\nu = 0$, то /3/ вырождается в краевую задачу для u с нулевыми краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_\nu^{n+1} = 0{,}75\, u_{\nu-1}^n + 0{,}25\, u_{\nu+1}^n, \quad \nu \geq 1, \quad n \geq 0, \\ u_0^n = 0, \quad u_\nu^0 = f_\nu. \end{cases} \qquad /4/$$

Эта задача устойчива. В самом деле, соответствующая задача Коши устойчива:

$$|\lambda(\psi)| = |\cos\psi - i\,0{,}5 \sin\psi| \leq 1, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Резольвентная матрица имеет такой вид:

$$M(z) = \begin{Vmatrix} 4z & -3 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

На единичной окружности есть две определяющие точки $z = \pm 1$, в которых собственные значения $M(z)$ принимают следующие значения:

$$\kappa_1(1) = 1, \ \kappa_2(1) = 3, \ \kappa_1(-1) = -1, \ \kappa_2(-1) = -3.$$

Краевые матрицы здесь такие:

$$K_1(z) = \bar{T}_{21} \equiv 1, \quad K_2(z) = -\bar{T}_{22} \equiv -1.$$

Следовательно /4/, краевая задача /4/ устойчива. У краевой задачи /3/ те же самые краевые матрицы K_1 и

K_2, а $K_3 = (z-1)^{-1}$, $M_{11} = \kappa_1$. Тогда, согласно основной теореме устойчивости /4/, $\|G^n\| \asymp \sqrt{n}$. Проведенный численный эксперимент подтверждает это. Положим $f_\nu = 0$ при $\nu \geq 1$, $g_1 = 1$, $g_\nu = 0$ при $\nu \geq 2$, получаем такие результаты:

$$\sum_{\nu=1}^{n} |u_\nu^n|^2 = \begin{cases} 240{,}61, & n = 500, \\ 486{,}07, & n = 1000, \\ 732{,}60, & n = 1500, \\ 979{,}67, & n = 2000, \end{cases}$$

Предварительно ошибочно была сосчитана задача для уравнения $u_t = u_x$. В этом случае $M_{11} = \kappa_1$, $|\kappa_1(\pm 1)| < 1$. Тогда, согласно основной теореме устойчивости $K_3 = (z-1)^{-1}$ не должно вызывать неустойчивость. Здесь счёт дает такие результаты:

$$\sum_{\nu=1}^{n} |u_\nu^n|^2 = \begin{cases} 1{,}0664, & n = 2, \\ 1{,}1089, & n = 6, \\ 1{,}1240, & n = 18, \\ 1{,}1250, & n = 54,\ 100,\ 200,\ \ldots\ 10000. \end{cases}$$

Замечание. Рассмотренный пример есть не что иное как краевая задача с неоднородными краевыми условиями. Обозначим через g вектор, составленный из правых частей неоднородных краевых условий. Задача с неоднородными краевыми условиями устойчива, если существует постоянная c, не зависящая от τ, n, такая, что

$$\|u(t)\| < c(\|u(0)\| + \|g\|)$$

для $t = n \cdot \tau \geq 0$. Условия устойчивости здесь те же самые, что и в /4/. Только при $z = 1$ порядки особенностей элементов матрицы $K_1^{-1}(z)$ должны быть на 1 ниже. Чаще используется другое определение устойчивости. Задача с неоднородными краевыми условиями устойчива, если существует постоянная c, не зависящая от τ, n, такая, что

$$\|u(t)\| < c(\|u(0)\| + \tau^{-1}\|g\|)$$

при $0 \le t = n \cdot \tau \le T$. Устойчивость в смысле такого определения эквивалентна устойчивости по начальным данным.

Литература

1. H.O.Kreiss. "Stability Theory for Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems. I". Math. of Com., v. 22, No. 104, pp. 703-714, 1968.
2. B.Gustafsson, H.O.Kreiss, A.Sundstrom. "Stability Theory of Difference Apprpximations for Mixed Initial Boundary Value Problems. II", Math. of Com., v. 26, No. 119, pp. 649-686, 1972.
3. *С.И.Сердюкова. Об устойчивости первой краевой задачи при наличии точек спектра на единичной окружности. ДАН СССР, т. 200, № 1, 39-42, 1971.*
4. *С.И.Сердюкова. Необходимое и достаточное условие устойчивости одного класса разностных краевых задач. ДАН СССР, т. 208, № 1, 52-55, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 21 января 1975 года.