сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-740

Л.А.Бордаг, А.В.Китаев

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ПЯТОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ И ИХ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

1985

Введение

В этой работе мы будем рассматривать взаимосвязь решений третьего (P_3) и пятого (P_5) уравнений Пенлеве. В частности, нас будут интересовать преобразования, действующие в классах решения уравнений P_3 и P_5 и подстановки, переводящие решения P_3 в решения P_5 и наоборот. Кроме того, будут уточнены теоремы, касающиеся частных классов решений уравнения P_3 . Аналогичные результаты для уравнения P_5 будут опубликованы в следующей работе.

Следует отметить, что в настоящее время в теории уравнений Пенлеве появился новый мощный метод исследования общих решений этих уравнений - метод изомонодромных деформаций /I-6/. По сути этот метод является нелинейным аналогом метода Лапласа подобно тому, как метод обратной задачи является нелинейным аналогом метода Фурье. С помощью метода изомонодромных деформаций удалось получить ряд интересных результатов, относящихся к исследованию ассимптотических свойств общих решений уравнений Пенлеве /6,7/. Эти исследования дополняет тематика, связанная с нахождением преобразований, связывающих решения уравнений Пенлеве. Дело в том, что наличие связей между разными уравнениями Пенлеве позволяет избежать громоздких исследований линейных систем, которые предполагает метод изомонодромных деформаций. Везде в работе мы будем рассматривать только неинтегрируемые случаи уравнений P_3 и P_5 .

I. Алгебраические преобразования решений уравнений P_3 и P_5

В этом разделе мы будем рассматривать подстановки, действующие в классе решений уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w} \qquad (P_3)$$

и в классе решений уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1} \qquad (P_5)$$

и подстановки, переводящие решения уравнения P_5 в решения уравнения P_3, следующего вида

$$w_f(z|\chi_f) = \mathcal{F}(w_i(\varphi(z)|\chi_i), z), \tag{I}$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix}, \quad \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \\ \gamma_f \\ \delta_f \end{Bmatrix},$$

где w_f - решение уравнения P_f с параметрами χ_f ; w_i - решение P_i относительно $\varphi(z)$ при значениях параметров χ_i.

Остановимся сначала на подстановках, переводящих решения уравнения P_3 с набором параметров χ_i, в решения того же уравнения с параметрами χ_f. Назовем главной частью уравнения группу членов, не зависящих от параметров. Подставим выражение (I) в главную часть P_3 и потребуем, чтобы по $\varphi(z)$ функция w_i удовлетворяла также P_3 ; тогда сразу получаем, что функция $\mathcal{F}(w, z)$ может иметь только следующий вид:

$$\mathcal{F}(w, z) = C_2(z)\, w^{C_1(z)}, \quad w = w(\varphi(z)|\chi), \tag{2}$$

$$\varphi(z) = \exp\left(C_3 \int \frac{dz}{C_1(z)\, z}\right),$$

где $C_1(z)$, $C_2(z)$ - произвольные функции z ; C_3 - константа. Подставляя теперь выражение (2) в P_3 и разбирая все возможные варианты, мы приходим к теореме.

<u>Теорема I</u>. Все подстановки вида (I), действующие в классе решений P_3, сводятся к композиции следующих четырех подстановок и обратных к ним

$$Q: \ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = q\, w_i(z|\chi_i), \tag{3}$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = \alpha_i/q \\ \beta_f = \beta_i q \\ \gamma_f = \gamma_i/q^2 \\ \delta_f = \delta_i q^2 \end{Bmatrix}.$$

$$P: \ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = w_i(pz|\chi_i), \tag{4}$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = \alpha_i p \\ \beta_f = \beta_i p \\ \gamma_f = \gamma_i p^2 \\ \delta_f = \delta_i p^2 \end{Bmatrix}.$$

$$\mathcal{J}: \ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \frac{1}{w_i(z|\chi_i)}, \tag{5}$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = -\beta_i \\ \beta_f = -\alpha_i \\ \gamma_f = -\delta_i \\ \delta_f = -\gamma_i \end{Bmatrix}.$$

$$S: \ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = w_i^2(\sqrt{z}|\chi_i), \tag{6}$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = \gamma_i/2 \\ \beta_f = \delta_i/2 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = 0 \end{Bmatrix}.$$

Первые три подстановки применимы к любым решениям. Подстановка S может быть применена только к выделенному классу решений, отвечающих нулевым параметрам α_i, β_i ; соответственно, обратная к ней применима к решениям, отвечающим нулевым параметрам γ_i и δ_i. В приложении мы приведем примеры композиций этих подстановок.

Рассмотрим уравнение P_5. Подставим выражение (I) в главную часть уравнения P_5 и потребуем, чтобы w_i по $\varphi(z)$ удовлетворяла уравнению P_5, тогда сразу получаем, что функция $\mathcal{F}$ в выражении (I) должна иметь вид

$$\mathcal{F}(w, z) = \left(\frac{1 + C_2(z)\left(\frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1}\right)^{C_1(z)}}{1 + C_2(z)\left(\frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1}\right)^{C_1(z)}} \right)^2, \quad w = w(\varphi(z)|\chi);$$

$$\varphi(z) = C_5 z^{C_4}, \quad C_5, C_4 - const,$$

$C_1(z)$, $C_2(z)$ - произвольные функции. Подставив теперь это выражение в P_5 и изучив поведение остальных членов уравнения, содержащих параметры, приходим к следующему утверждению.

<u>Теорема 2</u>. Все подстановки вида (I), переводящие решения P_5 друг в друга, получаются композицией следующих четырех подстановок (вместе с обратными к ним):

$$P:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = w_i(pz|\chi_i), \qquad (7)$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = \alpha_i \\ \beta_f = \beta_i \\ \gamma_f = \gamma_i p \\ \delta_f = \delta_i p^2 \end{Bmatrix}.$$

$$J:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \frac{1}{w_i(z|\chi_i)}, \qquad (8)$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = -\beta_i \\ \beta_f = -\alpha_i \\ \gamma_f = -\gamma_i \\ \delta_f = \delta_i \end{Bmatrix}.$$

$$S:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \frac{(w_i(\sqrt{z}|\chi_i)+1)^2}{4\,w_i(\sqrt{z}|\chi_i)}, \qquad (9)$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = -\alpha_i \\ \gamma_i = 0 \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 4\alpha_i \\ \beta_f = 0 \\ \gamma_f = \delta_i/4 \\ \delta_f = 0 \end{Bmatrix}.$$

$$D:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = -\left(\frac{1+i\sqrt{w_i(z|\chi_i)}}{1-i\sqrt{w_i(z|\chi_i)}}\right)^2, \qquad (10)$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i = 0 \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 0 \\ \beta_f = 0 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = -\delta_i \end{Bmatrix}.$$

В подстановке D ветвь корня можно фиксировать произвольно; выбрав другую ветвь, мы приходим к подстановке, обратной D. Первые две подстановки P, J не требуют ограничений на параметры исходного решения. Последние две подстановки (и обратные к ним) применимы лишь для выделенных классов решений. В приложении мы приведем обратные к подстановкам S и D и возможные композиции их и других подстановок (7-10). Подстановки P и J давно используются в литературе, подстановка S для частного выбора параметров была приведена в работе [8], там же была сделана попытка распространить эту подстановку на более широкий класс параметров с помощью преобразования Бэклунда. Автору удалось распространить ее на параметры, отвечающие подстановке (9), но при этом получилось весьма громоздкое выражение для S. Подстановка D приводится впервые.

Установим связь между решениями уравнений P_3 и P_5. В выражении (1) будем считать w_f решением P_3 по z, а w_i решением P_5 по $\varphi(z)$. Подобно предыдущему, мы на первом шаге получаем, что функция $\mathcal{F}$ в этом случае может быть только следующего вида:

$$\mathcal{F}(w,z) = C_2(z)\left(\frac{\sqrt{w(\varphi(z)|\chi)}-1}{\sqrt{w(\varphi(z)|\chi)}+1}\right)^{C_1(z)};$$

$$\varphi(z) = \exp\left(C_3\int\frac{dz}{C_1^2(z)\,z}\right), \quad C_3 - const,$$

$C_1(z), C_2(z)$ - произвольные функции. Подставив теперь это выражение в уравнение P_3 и рассмотрев члены, содержащие параметры, мы приходим к утверждению.

Теорема 3. Все подстановки вида (1), переводящие решения P_5 в решения P_3 сводятся, с учетом преобразований описанных в теоремах 1 и 2, к подстановке

$$T:\ w_5(z|\chi_5) \longrightarrow w_3(z|\chi_3) = \frac{\sqrt{w_5(z|\chi_5)}-1}{\sqrt{w_5(z|\chi_5)}+1}, \qquad (11)$$

$$\chi_5 = \begin{Bmatrix} \alpha_5 = 0 \\ \beta_5 = 0 \\ \gamma_5 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_3 = \begin{Bmatrix} \alpha_3 = -\gamma_5/4 \\ \beta_3 = \gamma_5/4 \\ \gamma_3 = -\delta_5/8 \\ \delta_3 = \delta_5/8 \end{Bmatrix}.$$

В приложении мы приведем подстановки, получаемые из T с помощью подстановок (3-6) и (7-10). Подстановка, переводящая решения P_3 в решения P_5 (обратная к подстановке T) имеет вид

$$T^{-1}:\ w_3(z|\chi_3) \longrightarrow w_5(z|\chi_5) = \left(\frac{w_3(z|\chi_3)+1}{w_3(z|\chi_3)-1}\right)^2,$$

$$\chi_3 = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 = -\alpha_3 \\ \gamma_3 \\ \delta_3 = -\gamma_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_5 = \begin{Bmatrix} \alpha_5 = 0 \\ \beta_5 = 0 \\ \gamma_5 = -4\alpha_3 \\ \delta_5 = -8\gamma_3 \end{Bmatrix};$$

она приводилась в работе [6].

В работе Абловица и Фокаса [10], в частности, была проведена классификация всех взаимно однозначных точечных преобразований, связывающих различные решения уравнений типа Пенлеве. Алгебраические преобразования, приведенные в этом разделе, естественным образом обобщают эти результаты.

2. Рациональные решения для третьего уравнения Пенлеве

В этом разделе мы воспользуемся преобразованиями, описанными в первом разделе, и преобразованием Беклунда (ПБ) с тем, чтобы доказать уточненную теорему о рациональных решениях P_3. ПБ уже приводилось в литературе [8-10]. Но в работе [8] используется громоздкая неприведенная формула, что существенно затрудняет ее использование. В работе [10] указан метод получения ПБ для уравнений типа Пенлеве, приводится и выражение для ПБ для уравнения P_3. Поскольку в этой работе содержится весьма большое количество описок и опечаток, мы приводим точную формулу для ПБ.

Теорема 4. Пусть $w_i(z|\chi_i)$ – решение уравнения P_3 при $\gamma_i\delta_i \neq 0$, тогда

$$w_f(z|\chi_f)=\sqrt{\frac{\gamma_i}{\gamma_f}}\,w_i\left(1+\frac{2+\frac{\beta_i}{\sqrt{-\delta_i}}+\frac{\alpha_i}{\sqrt{\gamma_i}}}{z\left(w_i'/w_i+\sqrt{\gamma_i}\,w_i+\sqrt{-\delta_i}/w_i\right)-1-\frac{\beta_i}{\sqrt{-\delta_i}}}\right), \tag{12}$$

где $w_i = w_i(z|\chi_i)$

будет также решением уравнения P_3 с параметрами χ_f,

$$\alpha_f = -\left(2+\frac{\beta_i}{\sqrt{-\delta_i}}\right)\sqrt{\gamma_f}\,, \quad \gamma_f \neq 0,$$
$$\beta_f = -\left(2+\frac{\alpha_i}{\sqrt{\gamma_i}}\right)\frac{\sqrt{-\delta_i\gamma_i}}{\sqrt{\gamma_f}}\,, \quad \delta_f = \frac{\delta_i\gamma_i}{\gamma_f}\,; \tag{13}$$

если $\gamma_i = 0$, то новое решение строится по следующей формуле:

$$w_f(z|\chi_f)=\left(z\,w_i'-\left(1+\frac{\beta_i}{\sqrt{-\delta_i}}\right)w_i+z\sqrt{-\delta_i}\right)/w_i^2\,. \tag{14}$$

при этом параметры имеют вид

$$\alpha_f = \sqrt{-\delta_i}\,, \quad \beta_f = \alpha_i\left(2+\frac{\beta_i}{\sqrt{-\delta_i}}\right),$$
$$\gamma_f = 0\,, \quad \delta_f = -\alpha_i^2\,. \tag{15}$$

Если параметры $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ таковы, что выбором знаков перед корнями $\sqrt{\gamma_i}$, $\sqrt{-\delta_i}$ можно добиться выполнения равенства $2+\beta_i/\sqrt{-\delta_i}+\alpha_i/\sqrt{\gamma_i}=0$, то P_3 имеет однопараметрическое семейство решений, обращающее в ноль знаменатель в формуле (12). Для его построения может быть по-прежнему использована формула (12), но с другим выбором знаков перед корнями $\sqrt{\gamma_i}$ и $\sqrt{-\delta_i}$.

Сформулируем теперь уточненную теорему о рациональных решениях P_3. В работе [8] было указано, при каких значениях параметров

уравнение P_3 имеет рациональные решения, здесь мы укажем как путь их построения, так и их количество для фиксированного набора параметров.

Теорема 5. Третье уравнение Пенлеве (P_3) имеет рациональные решения только при $\gamma\delta \neq 0$ и выполнении хотя бы одного из условий

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}+\frac{\beta}{\sqrt{\delta}} = 4n\,, \tag{16^1}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}-\frac{\beta}{\sqrt{\delta}} = 4m\,. \tag{16^2}$$

Все рациональные решения P_3 получаются итерациями с помощью ПБ из постоянных

$$w_0(z|\chi)=\sqrt[4]{-\frac{\delta}{\gamma}}\,\exp\left(\frac{i\pi k}{2}\right), \quad k=0,1,2,3, \tag{17}$$

являющихся решениями P_3 при $\alpha\sqrt{-\delta}+\beta\sqrt{\gamma}=0$. (18)

Для фиксированного набора параметров P_3 имеет четыре рациональных решения, если одновременно оба условия (16) выполнены, и два рациональных решения, если выполнено только одно из условий (16^1, 16^2).

Доказательство. Подставим ряд $w(z|\chi)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ в P_3 и получим, что все его коэффициенты определяются однозначно по параметрам уравнения χ и коэффициенту a_0. На a_0 мы получаем уравнение

$$\gamma a_0^4+\delta=0,$$

которое имеет четыре корня. Мы ищем рациональные решения, а для них этот ряд будет одновременно лорановским разложением. Следовательно, при фиксированных параметрах P_3 не может иметь более четырех рациональных решений. С другой стороны, если уравнение имеет рациональное решение $w_i(z|\chi_i)$, то и функция $w_f(z|\chi_i)=-w_i(-z|\chi_i)$ будет рациональным решением P_3 при тех же значениях параметров χ_i (при $\gamma\delta \neq 0$ это разные решения). Таким образом, если P_3 при каких-то значениях параметров имеет рациональные решения, то их не менее двух и не более четырех. В работе [6] было показано, что для существования рациональных решений в уравнении P_3 необходимо и достаточно выполнение $\gamma\delta \neq 0$ и одного из условий (16). Если выполнено первое условие, то это значит, что P_3 имеет при данных значениях параметров два рациональных решения с асимптотиками $w^{1,2}(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \pm\sqrt[4]{-\delta/\gamma}$ (корень здесь арифметический). Если выполнено второе условие, то асимптотики рациональных решений, отвечающих этим параметрам, имеют вид $w^{3,4}(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \pm i\sqrt[4]{-\delta/\gamma}$.

Оба условия (16) могут быть выполнены лишь, если $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ - четные

($\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}$, $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{-\delta}} \exp(i\pi k), k=0,1$); если $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ - нецелые, нечетные или комплексные, то они заведомо могут удовлетворять только одному из условий (I6), и мы получим только два рациональных решения. В том случае, если $|\tilde{\alpha}| = |\tilde{\beta}|$, то два решения выписываются сразу; это будут две константы, равные либо $\pm\sqrt[4]{-\delta/\gamma}$ при $\tilde{\alpha} = -\tilde{\beta}$, либо $\pm i\sqrt[4]{-\frac{\delta}{\gamma}}$ при $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$; если $\alpha = \beta = 0$, то все четыре решения - постоянные (I7). Для получения рациональных решений при каких-либо значениях параметров, удовлетворяющих условию (I6[1]) и (или)(I6[2]), мы последовательно применим Ш к $\pm\sqrt[4]{-\frac{\delta}{\gamma}}$ и (или) к $\pm i\sqrt[4]{-\frac{\delta}{\gamma}}$. При этом асимптотика нового решения будет каждый раз отличаться от прежней на множитель $\sqrt{\frac{\gamma_i}{\gamma_f}}$, т.е. $w_i(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \sqrt[4]{-\frac{\delta_i}{\gamma_i}}$, $w_f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \sqrt[4]{-\frac{\delta_i \gamma_i}{\gamma_f}} = \sqrt[4]{-\frac{\delta_f}{\gamma_f}}$. Каждый раз при применении Ш знаки перед корнями в выражениях (I2,I3) мы можем выбирать произвольно, но согласованно между собой.

Заметим, что условие (I8) не фиксирует абсолютного значения параметров α_i и β_i, поэтому при использовании Ш в качестве исходных параметров практически удобнее брать параметры α_i и β_i, близкие к нужным нам. Например, если нужно получить рациональное решение при параметрах $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, то лучше взять $\tilde{\alpha}_i = \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{2}$ (либо, соответственно, $\tilde{\alpha}_i = \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{2}$), тогда за n (или соответственно, m) итераций мы из постоянных (I7) получим рациональные решения, удовлетворяющие условию (I6[1]) (либо (I6[2])).

Отметим, что общая формула для рациональных решений вида $w(z) = \frac{z+a}{bz+c}$ получена в работе [12] (условия (I6) при этом выполнены с $m, n = 0, \pm 1$).

Приведем примеры использования этой теоремы.

Пусть $\alpha_f = 4, \beta_f = 0, \gamma_f = 1, \delta_f = -1$, тогда у P_3 должно существовать 4 рациональных решения. Построим их. Возьмем решения $w_i(z) = \pm 1$ при $\alpha_i = -2, \beta_i = 2, \gamma_i = -\delta_i = 1$ и с помощью однократного применения Ш получим, что $w_f^{1,2}(z|\chi_f) = \frac{2z \pm 1}{\pm 2z + 3}$ (это же решение можно получить и за две итерации, если взять $\alpha_i = 4$, $\beta_i = -4$, $\gamma_i = -\delta_i = 1$). Затем возьмем $w_i^{3,4}(z) = \pm i$ при $\alpha_i = \beta_i = -2$, $\gamma_i = -\delta_i = 1$ и после применения Ш приходим к $w_f^{3,4}(z|\chi_f) = i\frac{2iz \pm 1}{\pm 2iz + 3}$ при тех же параметрах $\chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 4 \\ \beta_f = 0 \\ \gamma_f = -\delta_f = 1 \end{Bmatrix}$. Если $\alpha_f = 2$, $\beta_f = -6$, $\gamma_f = -\delta_f = 1$, то после однократного применения Ш к $w_i(z) = \pm 1$ с $\alpha_i = -\beta_i = 4, \gamma_i = -\delta_i = 1$ получаем два решения $w_f^{1,2}(z|\chi_f) = \frac{2z \pm 5}{\pm 2z + 3}$, взяв $w_i(z) = \pm i$, $\alpha_i = \beta_i = -2$, $\gamma_i = -\delta_i = 1$, и, дважды применив Ш, получаем еще два решения

$$w_f^{3,4}(z|\chi_f) = \frac{(2z \mp i)((\pm 2z - 3i)^3 - 12i)}{(\pm 2iz + 3)((\pm 2z - i)^3 - 4i)}, \quad \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 2 \\ \beta_f = -6 \\ \gamma_f = 1 \\ \delta_f = -1 \end{Bmatrix}.$$

3. Об алгебраических решениях третьего уравнения Пенлеве

В работе [11] было показано, что уравнение P_3 может иметь алгебраические решения вида $w(z) = R(\sqrt[3]{z})$ только, если выполнено одно из условий на параметры уравнения

$$\gamma = 0, \quad \alpha\delta \neq 0, \quad \frac{\beta}{\sqrt{-\delta}} = 2n, \tag{19}$$

$$\delta = 0, \quad \beta\gamma \neq 0, \quad \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} = 2m. \tag{20}$$

Кроме того, приводилось неверное доказательство того, что все алгебраические решения P_3 имеют вид $w(z) = R(\sqrt[3]{z})$, где R - некая рациональная функция своего аргумента, и могут быть построены из простейшего решения

$$w_0(z) = \sqrt[3]{-\frac{\delta z}{\alpha}}, \quad \beta = \gamma = 0, \ \alpha\delta \neq 0. \tag{21}$$

В этом разделе мы приведем точную теорему об алгебраических решениях P_3.

Теорема 6. Все алгебраические решения P_3 получаются с помощью преобразования Бэклунда (I4,I5) и подстановок $\mathcal{J}$ и Q, (3,4), из решения (21). Для каждого фиксированного набора параметров, удовлетворяющих условиям (19) или (20), существует ровно три алгебраических решения, причем все они имеют вид*) $w(z) = \tau^2 y R(\tau y^2)$, где $y = \sqrt[3]{z}$ (ветвь корня фиксированная произвольно), $\tau = \exp(2\pi i k/3)$; $k = 0, 1, 2$; R - некая рациональная функция своего аргумента.

Доказательство. Изучив лорановское разложение $w(z)$ в нуле**), конечной точке и бесконечности, мы видим, что если $\gamma\delta \neq 0$, уравнение P_3 может иметь только рациональные решения. При $\gamma\delta = 0$ уравнение допускает и алгебраические решения, причем $w(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \sqrt[3]{-\frac{\delta z}{\alpha}}$. Сделаем в P_3 ($\gamma = 0$) замену $w(z) = y v(y)$, $z = y^3$, тогда для функции $v(y)$ получим уравнение

$$\left(y\frac{v'(y)}{v(y)}\right)' \frac{1}{9y^2} = y\left(\alpha v(y) + \frac{\delta}{v^2(y)}\right) + \frac{\beta}{y v(y)}.$$

---

*) Можно утверждать, что любое алгебраическое решение P_3 имеет вид $w(z) = \tau^{-1} y R(\tau y^2)$, где $y = \sqrt[3]{z}$ (корень арифметический), $\tau = \exp(2\pi i k/3)$, $k = 0, 1, 2$. Обе эти записи совершенно эквивалентны.

**) В нуле это разложение будет лорановским для $W(t^n)$, где n - целое число.

Будем искать алгебраические решения этого уравнения. Изучение лорановских разложений $v(y)$ в конечной точке, нуле и бесконечности дает, что, если $v(y)$ алгебраическая функция, то она с необходимостью рациональная функция y. Все нули $v(y)$ первого порядка, полюса второго порядка; если только нуль или полюс не лежит в точке $y=0$, $v(y)$ зависит только от y^2 и имеет разложение в бесконечности

$$v(y) \underset{y\to\infty}{=} v_0 + \frac{v_2}{y^2} + \frac{v_4}{y^4} + \dots, \quad v_0^3 = -\frac{\delta}{\alpha}, \quad v_2 = -\frac{\beta}{3\alpha v_0}, \dots \quad (22)$$

где все коэффициенты v_{2k} однозначно определяются по v_0 и параметрам χ уравнения P_3. Суммируя вышесказанное, мы получаем, что

$$v(y) = v_0 \frac{y^p \prod_{i=1}^{2n-p/2}(y^2+a_i)}{\prod_{i=1}^{n}(y^2+b_i)^2}, \quad p=0,-2.$$

Вычислим теперь интеграл $\oint \frac{y\,dy}{v(y)}$ по достаточно большому контуру, охватывающему все полюса функции $v^{-1}(y)$. Тогда получим, что параметры уравнения P_3 должны удовлетворять условию (19). Проводя аналогичные рассмотрения при $\delta=0$, мы приходим к условию (20).

Таким образом, уравнение P_3 может иметь алгебраические решения (не являющиеся рациональными) только при выполнении одного из условий (19) или (20), и они имеют вид $yR(y^2)$, кроме того для фиксированного набора параметров их не более трех, так как уравнение $v_0^3 = -\delta/\alpha$ имеет три решения. Пусть параметры P_3 удовлетворяют условиям (19). Все алгебраические решения, удовлетворяющие условиям (19), мы получим из простейшего решения $w_0(z)$, (21). Для этого воспользуемся $\mathcal{J}Q$ (14,15). Если до применения $\mathcal{J}Q$ параметры решения $w_i(z|\chi_i)$ удовлетворяли условиям (19) с $n_i=n$, то после применения $\mathcal{J}Q$ параметры нового решения $w_f(z|\chi_f)$ будут удовлетворять условиям (19) с $n=\pm(n_i+1)$. Исходное решение $w_0(z)$ удовлетворяет этим условиям с $n=0$, поэтому, применяя к нему многократно $\mathcal{J}Q$, мы можем получить алгебраическое решение для P_3 с параметрами, удовлетворяющими (19) с любым n.

Покажем теперь, что $\mathcal{J}Q$ (14,15) сохраняет вид решения. Пусть мы имеем решение вида $w_i(z) = yR(y^2)$, где $y=\sqrt[3]{z}$, R – рациональная функция своего аргумента. После применения $\mathcal{J}Q$ мы получаем решение вида

$$w_f(z) = 2y\frac{\left(y^2 \frac{dR(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=y^2} - (1+3n_i)R(y^2) + \frac{3}{2}\sqrt{-\delta}\,y^2\right)}{3y^2R^2(y^2)} = y\tilde{R}(y^2),$$

т.е. вид сохраняется. Поскольку начальное решение $w_0(z)$ имеет такой вид $w_0(z) = yR(y^2)$, где $R(y^2) - const$, то после многократного применения $\mathcal{J}Q$ мы получим решение того же вида. Так мы для любого набора параметров, удовлетворяющих условиям (19), можем построить решение вида $yR(y^2)$. Используя теперь преобразования P и Q, (3,4), с $p=q=exp(i\pi k)$, $k=0,1$, мы из одного алгебраического решения получаем три решения, вида $\tau^2 yR(\tau y^2)$, где $\tau = exp(2\pi ik/3)$, $k=0,1,2$.

Это действительно различные решения, так как имеют разную асимптотику

$$w(z) = \tau^2 yR(\tau y^2) \xrightarrow[z\to\infty]{} \tau^2\sqrt[3]{-\frac{\delta z}{\alpha}},$$

что непосредственно следует из (22). Пусть теперь параметры χ уравнения P_3 удовлетворяют условиям (20). Возьмем $\alpha_1=\beta$, $\beta_1=\alpha$, $\gamma_1=0$, $\delta_1=-\gamma$, для параметров χ_1 будет выполнено теперь условие (19) с $n=m$. Построим алгебраическое решение $w_1(z)$ для этих параметров, применив к нему подстановки $\mathcal{J}$ и Q с $q=-1$, мы получим алгебраическое решение $w(z|\chi) = -(w_1(z|\chi_1))^{-1}$ для уравнения P_3 с исходными параметрами χ. Таким образом, достаточно построить серию алгебраических решений для P_3 с параметрами, удовлетворяющими условиям (19), с помощью подстановки $\mathcal{J}Q$ мы без труда получим все алгебраические решения P_3. При $\gamma=\delta=0$ алгебраических решений нет; действительно, используя подстановку S^{-1}, мы приходим к P_3 с $\alpha_f=\beta_f=0$, γ_f, $\delta_f \neq 0$. Его рациональными решениями будут только (17).

Авторы благодарят А.Р.Итса за то, что он обратил их внимание на эту тему, В.Б.Матвеева за постоянное внимание и интерес к работе и В.Г.Маханькова за поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Приведем подстановки, переводящие решения P_3 друг в друга, которые получаются композицией основных подстановок (3-6). Обратные к основным действуют следующим образом. Подстановка $\mathcal{J}^{-1}$ действует так же, как и $\mathcal{J}$; P^{-1}, Q^{-1} действуют аналогично P, Q с заменой p, q на p^{-1}, q^{-1}. Формальное обращение подстановки S приводит нас к

$$S_{\pm}^{-1}: \; w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \pm\sqrt{w_i(z^2|\chi_i)},$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i=0 \\ \delta_i=0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f=0 \\ \beta_f=0 \\ \gamma_f=2\alpha_i \\ \delta_f=2\beta_i \end{Bmatrix}.$$

Фактически здесь выписано две подстановки, так как можно выбирать любую ветвь корня, параметры при этом останутся неизменными. Выпишем правила коммутации этих подстановок.

$$PQ = QP, \qquad JP = PJ, \qquad S_\pm^{-1}J = JS_\pm^{-1},$$
$$JQ = Q^{-1}P, \qquad SP = P^2S, \qquad PS_\pm^{-1} = S_\pm^{-1}P^2,$$
$$SQ = Q^2S, \qquad SJ = JS, \qquad QS_\pm^{-1} = S_\pm^{-1}Q^2.$$

Используя их, легко составить полную таблицу всех возможных алгебраических подстановок P_3. Приведем наиболее интересные из них.

1. $$PQ:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = q\, w_i(pz|\chi_i),$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = \alpha_i p/q \\ \beta_f = \beta_i pq \\ \gamma_f = \gamma_i p^2/q^2 \\ \delta_f = \delta_i p^2q^2 \end{Bmatrix}.$$

Если $\gamma\delta \neq 0$, то мы можем взять $p = \exp(i\pi k/2)(-\delta_i\gamma_i)^{-\frac{1}{4}}$, $q = \sqrt[4]{-\frac{\gamma_i}{\delta_i}}\exp(i\pi k/2)$, $k = 0, 1, 2, 3$ (корни здесь арифметические) и перейти с помощью этой подстановки к уравнению P_3 с приведенными параметрами $\tilde\alpha = \alpha_i/\sqrt{\gamma_i}$, $\tilde\beta = \frac{\beta_i \exp(i\pi k)}{\sqrt{-\delta_i}}$, $k = 0, 1$, $\tilde\gamma = 1$, $\tilde\delta = -1$, которое часто используется в литературе.

2. $$JPQ:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = (q\, w_i(pz|\chi_i))^{-1},$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_f = -\beta_i pq \\ \beta_f = -\alpha_i p/q \\ \gamma_f = -\delta_i p^2q^2 \\ \delta_f = -\gamma_i p^2/q^2 \end{Bmatrix}.$$

$$JPQ = PJQ = PQ^{-1}J = JQP = Q^{-1}PJ = Q^{-1}JP.$$

3. $$PQSJ:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = q\, w_i^{-2}(\sqrt{pz}|\chi_i),$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = -\delta_i p/2q \\ \beta_f = -\gamma_i pq/2 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = 0 \end{Bmatrix}.$$

$$PQSJ = PQJS = QPJS = QPJS = QPSJ = PJQ^{-1}S.$$

4. $$SJPQ:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = (q^2 w_i^2(p\sqrt{z}|\chi_i))^{-1};$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = -\delta_i p^2q^2/2 \\ \beta_f = -\gamma_i p^2/2q^2 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = 0 \end{Bmatrix}.$$

$$SJPQ = SPJQ = SPQ^{-1}J = P^2SQ^{-1}J = P^2Q^{-2}SJ = P^2Q^{-2}JS =$$
$$SJQP = SQ^{-1}JP = SQ^{-1}PJ = Q^{-2}SPJ = Q^{-2}P^2SJ = Q^{-2}P^2JS.$$

5. $$PQS_\pm^{-1}:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \pm q\sqrt{w_i(p^2z^2|\chi_i)},$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i = 0 \\ \delta_i = 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 0 \\ \beta_f = 0 \\ \gamma_f = 2\alpha_i p^2/q^2 \\ \delta_f = 2\beta_i p^2q^2 \end{Bmatrix}.$$

$$PQS_\pm^{-1} = PS_\pm^{-1}Q^2 = S_\pm^{-1}P^2Q^2 = S_\pm^{-1}Q^2P^2 = QPS_\pm^{-1} = QS_\pm^{-1}P^2.$$

Все композиции подстановок, включающие подстановку S (или $S_\pm^{-1}$) применимы лишь к решениям, отвечающим нулевым параметрам α_i, β_i (соответственно, $\gamma_i = \delta_i = 0$). Подстановки P, Q, J и их композиции применимы без ограничений. Подчеркнем, что мы рассматривали только неинтегрируемые случаи уравнения P_3, для интегрируемых случаев класс подстановок шире.

2. Выпишем подстановки, переводящие решения P_5 друг в друга, которые получаются композицией четырех основных (7-10). Обратим основные подстановки. Обратная к J действует так же, как и J ($J^2 = I$), P^{-1} действует аналогично P с заменой p на p^{-1}. Формальное обращение подстановки D дает нам подстановку

$$D^{-1}:\ w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = -\left(\frac{1 - i\sqrt{w_i(z|\chi_i)}}{1 + i\sqrt{w_i(z|\chi_i)}}\right)^2,$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i = 0 \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 0 \\ \beta_f = 0 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = -\delta_i \end{Bmatrix}.$$

Фактически здесь выписано две подстановки, но так как другой выбор ветви корня просто возвращает нас к подстановке D, мы условимся, что в обеих подстановках D и D^{-1} ветвь корня $\sqrt{w_i(z|\chi_i)}$ неким произвольным образом фиксирована. Формальное обращение подстановки S также приводит нас к двум подстановкам

$$S_{\pm}^{-1}: w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \left(\sqrt{w_i(z^2|\chi_i)} \pm \sqrt{w_i(z^2|\chi_i)-1}\right)^2,$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i \\ \delta_i = 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = \alpha_i/4 \\ \beta_f = -\alpha_i/4 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = 4\gamma_i \end{Bmatrix}.$$

Поскольку подстановки $S,\ S_{\pm}^{-1},\ D,\ D^{-1}$ применимы не к любому решению, то число практически интересных композиций невелико. Например, мы можем применить подстановки D и D^{-1} только до подстановки S и только после подстановки S^{-1}, иначе мы должны потребовать обращения в нуль всех параметров уравнения и придем к интегрируемому случаю уравнения P_5.

Выпишем правила коммутации. На любом решении P_5 будет выполнено

$$PJ = JP.$$

Если исходное решение отвечает специальному выбору параметров $\gamma_i = 0$, $\alpha_i = -\beta_i$, то $SP = P^2S$ и $SJ = S$. Если же в уравнении $\beta_i = \gamma_i = 0$, то на его решениях выполнено

$$PS_{\pm}^{-1} = S_{\pm}^{-1}P^2,\quad JS_{+}^{-1} = S_{-}^{-1},\quad JS_{-}^{-1} = S_{+}^{-1}.$$

Если мы еще более сузим класс решений и потребуем, чтобы все параметры в P_5, за исключением δ_i, равнялись нулю, то на этих решениях будут, кроме того, выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$DJ = JD = D^{-1},\qquad D^2 = J,\qquad SD^{-1} = JS,$$
$$DP = PD,\qquad SD = JS,\qquad DS_{\pm}^{-1} = S_{\mp}^{-1}J.$$

Выпишем наиболее интересные примеры композиций наших подстановок.

1. $$JSP: w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \frac{4w_i(\rho\sqrt{z}|\chi_i)}{(w_i(\rho\sqrt{z}|\chi_i)+1)^2},$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = -\alpha_i \\ \gamma_i = 0 \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 0 \\ \beta_f = -4\alpha_i \\ \gamma_f = -\delta_i\rho/4 \\ \delta_f = 0 \end{Bmatrix}.$$

$$JSP = JP^2S = P^2JS.$$

2. $$PS_{\pm}^{-1}J: w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = \frac{\left(1 \pm \sqrt{1 - w_i(\rho^2z^2|\chi_i)}\right)^2}{w_i(\rho^2z^2|\chi_i)},$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i = 0 \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i = 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = -\beta_i/4 \\ \beta_f = \beta_i/4 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = 4\gamma_i\rho^2 \end{Bmatrix}.$$

$$PS_{\pm}^{-1}J = S_{\pm}^{-1}P^2J = S_{\pm}^{-1}JP^2,$$

при $\beta_i = 0$ $\qquad PS_{\pm}^{-1}J = PDS_{\mp}^{-1} = DPS_{\mp}^{-1} = DS_{\mp}^{-1}P^2.$

3. $$PJD: w_i(z|\chi_i) \longrightarrow w_f(z|\chi_f) = -\left(\frac{1 - i\sqrt{w_i(\rho z|\chi_i)}}{1 + i\sqrt{w_i(\rho z|\chi_i)}}\right)^2,$$

$$\chi_i = \begin{Bmatrix} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i = 0 \\ \delta_i \end{Bmatrix} \longrightarrow \chi_f = \begin{Bmatrix} \alpha_f = 0 \\ \beta_f = 0 \\ \gamma_f = 0 \\ \delta_f = -\delta_i\rho^2 \end{Bmatrix}.$$

$$PJD = JPD = JDP = D^{-1}P = PD^{-1}.$$

3. Используя основные подстановки (3-6) и (7-10) и описанные в предыдущих двух пунктах, можно выписать множества подстановок, которые получаются их композицией с подстановкой T, (II), переводящей решения P_5 в решения P_3.

Верхний индекс будет указывать здесь на уравнение.

Пусть у нас есть какое-то решение P_5, отвечающее параметрам ${}^5\alpha_i = {}^5\beta_i = 0$, ${}^5\gamma_i = c$, ${}^5\delta_i = d$. Используя подстановку ${}^5P\,{}^5J$, придем к

$${}^5P\,{}^5J: {}^5w_i(z|{}^5\chi_i) \longrightarrow {}^5w_f(z|{}^5\chi_f) = {}^5w_i^{-1}(\rho z|{}^5\chi_i),$$

$${}^5\rho = \rho,$$

$${}^5\chi_i = \begin{Bmatrix} {}^5\alpha_i = 0 \\ {}^5\beta_i = 0 \\ {}^5\gamma_i = c \\ {}^5\delta_i = d \end{Bmatrix} \longrightarrow {}^5\chi_f = \begin{Bmatrix} {}^5\alpha_f = 0 \\ {}^5\beta_f = 0 \\ {}^5\gamma_f = -c\rho \\ {}^5\delta_f = d\rho^2 \end{Bmatrix}.$$

С помощью T перейдем теперь к решениям уравнения P_3

$${}^3w(z|{}^3\chi) = -\frac{\sqrt{{}^5w_i(\rho z|{}^5\chi_i)} - 1}{\sqrt{{}^5w_i(\rho z|{}^5\chi_i)} + 1},\quad {}^3\chi = \begin{Bmatrix} {}^3\alpha = \frac{c\rho}{4} \\ {}^3\beta = -\frac{c\rho}{4} \\ {}^3\gamma = -\frac{d\rho^2}{8} \\ {}^3\delta = \frac{d\rho^2}{8} \end{Bmatrix},$$

воспользовавшись одной из подстановок, переводящих решения P_3 в решения P_3, например, ${}^{3}(JPQ)$; получим

$$ {}^{3}(JPQ)\,T\,{}^{5}(PJ):\ {}^{5}w_i(z|{}^{5}\chi_i) \longrightarrow {}^{3}w_f(z|{}^{3}\chi_f) = -\frac{\sqrt{{}^{5}w_i(\ell z|\chi_i)}+1}{q\left(\sqrt{{}^{5}w_i(\ell z|\chi_i)}-1\right)}, $$

$$ {}^{5}\chi_i = \begin{Bmatrix} {}^{5}\alpha_i = 0 \\ {}^{5}\beta_i = 0 \\ {}^{5}\gamma_i = c \\ {}^{5}\delta_i = d \end{Bmatrix} \longrightarrow {}^{3}\chi_f = \begin{Bmatrix} {}^{3}\alpha_f = c\ell q/4 \\ {}^{3}\beta_f = -c\ell/4q \\ {}^{3}\gamma_f = -d(\ell q)^2/8 \\ {}^{3}\delta_f = d\ell^2/8q^2 \end{Bmatrix}, $$

$$ {}^{3}p\,{}^{5}p = {}^{3}p\,p = \ell\,, \quad {}^{3}q = q\,; $$

если на этом этапе возьмем подстановку ${}^{3}(PQSJ)$, то придем к

$$ {}^{3}(PQSJ)\,T\,{}^{5}(PJ):\ {}^{5}w_i(z|\chi_i) \longrightarrow {}^{3}w_f(z|\chi_f) = q\left(\frac{\sqrt{{}^{5}w_i(\kappa\sqrt{z}|\chi_i)}+1}{\sqrt{{}^{5}w_i(\kappa\sqrt{z}|\chi_i)}-1}\right)^2, $$

$$ {}^{5}\chi_i = \begin{Bmatrix} {}^{5}\alpha_i = 0 \\ {}^{5}\beta_i = 0 \\ {}^{5}\gamma_i = 0 \\ {}^{5}\delta_i = d \end{Bmatrix} \longrightarrow {}^{3}\chi_f = \begin{Bmatrix} {}^{3}\alpha_f = -d\kappa^2/16q \\ {}^{3}\beta_f = d\kappa^2 q/16 \\ {}^{3}\gamma_f = 0 \\ {}^{3}\delta_f = 0 \end{Bmatrix}, $$

$$ \kappa = {}^{3}p\sqrt{{}^{5}p}\,, \quad {}^{3}q = q\,. $$

Совершенно аналогично можно построить преобразования, переводящие решения P_3 в решения P_5, используя подстановку T^{-1} и подстановки, действующие в пространствах решений уравнений P_3 и P_5.

Приведем еще наиболее интересные композиции подстановок T и T^{-1} с основными подстановками (3-10) и подстановками, описанными в предыдущих двух пунктах.

I.

$$ {}^{3}S\,T:\ {}^{5}w_i(z|{}^{5}\chi_i) \longrightarrow {}^{3}w_f(z|{}^{3}\chi_f) = \left(\frac{\sqrt{{}^{5}w_i(\sqrt{z}|{}^{5}\chi_i)}-1}{\sqrt{{}^{5}w_i(\sqrt{z}|{}^{5}\chi_i)}+1}\right)^2, $$

$$ {}^{5}\chi_i = \begin{Bmatrix} {}^{5}\alpha_i = 0 \\ {}^{5}\beta_i = 0 \\ {}^{5}\gamma_i = 0 \\ {}^{5}\delta_i = d \end{Bmatrix} \longrightarrow {}^{3}\chi_f = \begin{Bmatrix} {}^{3}\alpha_f = -d/16 \\ {}^{3}\beta_f = d/16 \\ {}^{3}\gamma_f = 0 \\ {}^{3}\delta_f = 0 \end{Bmatrix}. $$

$$ {}^{3}S\,T\,{}^{5}P = {}^{3}S\,{}^{3}P\,T = {}^{3}(P^2 S)T = ({}^{3}P^2)T({}^{5}S) = T\,{}^{5}(P^2 S) = T\,{}^{5}(SP), $$

при ${}^{5}p = {}^{3}p$.

2.

$$ {}^{3}(PQS_{\pm}^{-1})T:\ {}^{5}w_i(z|{}^{5}\chi_i) \longrightarrow {}^{3}w_f(z|{}^{3}\chi_f) = \pm q\sqrt{\frac{\sqrt{{}^{5}w_i(p^2z^2|{}^{5}\chi_i)}-1}{\sqrt{{}^{5}w_i(p^2z^2|{}^{5}\chi_i)}+1}}, $$

$$ {}^{5}\chi_i = \begin{Bmatrix} {}^{5}\alpha_i = 0 \\ {}^{5}\beta_i = 0 \\ {}^{5}\gamma_i = 0 \\ {}^{5}\delta_i = 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow {}^{3}\chi_f = \begin{Bmatrix} {}^{3}\alpha_f = 0 \\ {}^{3}\beta_f = 0 \\ {}^{3}\gamma_f = -\dfrac{cp^2}{2q^2} \\ {}^{3}\delta_f = \dfrac{cp^2q^2}{2} \end{Bmatrix}, \quad {}^{3}p = p. $$

$$ {}^{3}(PQS_{\pm}^{-1})T = {}^{3}(PS^{-1}Q^2T) = {}^{3}(S^{-1}P^2Q^2)T = {}^{3}(S^{-1}Q^2P^2)T = {}^{3}(QPS^{-1})T = $$

$$ {}^{3}(QS^{-1}P^2)T = {}^{3}(QS^{-1})T(({}^{5}P)^2) = {}^{3}Q\,T({}^{5}(S^{-1}P^2)), \quad \text{при} \quad {}^{5}p = {}^{3}p = p. $$

3.

$$ T^{-1}({}^{3}S_{\pm}^{-1}):\ {}^{3}w_i(z|{}^{3}\chi_i) \longrightarrow {}^{5}w_f(z|{}^{5}\chi_f) = \left(\frac{\sqrt{{}^{3}w_i(z^2|{}^{3}\chi_i)}+1}{\sqrt{{}^{3}w_i(z^2|{}^{3}\chi_i)}-1}\right)^2, $$

$$ {}^{3}\chi_i = \begin{Bmatrix} {}^{3}\alpha_i = a \\ {}^{3}\beta_i = -a \\ {}^{3}\gamma_i = 0 \\ {}^{3}\delta_i = 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow {}^{5}\chi_f = \begin{Bmatrix} {}^{5}\alpha_f = 0 \\ {}^{5}\beta_f = 0 \\ {}^{5}\gamma_f = 0 \\ {}^{5}\delta_f = 16a \end{Bmatrix}. $$

$$ {}^{5}S_{\pm}^{-1}T^{-1} = T^{-1}({}^{3}S_{\pm}^{-1});\ {}^{5}S\,T^{-1} = T^{-1}({}^{3}S);\ {}^{5}J\,T^{-1} = T^{-1}({}^{3}Q),\ q = -1\,; $$

$$ T^{-1}({}^{3}J) = T^{-1};\ {}^{5}D\,T^{-1}({}^{3}S_{\pm}^{-1}) = T^{-1}({}^{3}(QS_{\pm}^{-1})),\ q = -i\,; \ \text{при} \ {}^{3}\alpha = 0, $$

$$ q = -i,\ {}^{5}D\,T^{-1} = T^{-1}({}^{3}Q),\ {}^{5}(D^{-1})T^{-1} = J\,T^{-1}({}^{3}Q)\,. $$

ЛИТЕРАТУРА

I. JIMBO M., MIWA T., UENO K., Physica D, 1981, 2, p.306.
2. JIMBO M., MIWA T., Physica D, 1981, 2, p.407.
3. JIMBO M., MIWA T., Physica D, 1981,4, p.26.
4. Flaschka H., Newell A.C., Comm. Math. Phys., 1980, 76,p.65.
5. Итс А.Р., Изв. АН СССР, 1985, 49, № 3, с.3.
6. Новокшенов В.Ю. Функц.анализ, 1984,18, вып.?3, с.90.
7. Its A.R., Novokshenov W.Ju., Lect. Notes in Math., 364, p.3.
8. Громак В.И., Дифф.уравнения, 1984, 20, № 10, с.1674.
9. Громак В.И. Дифф.уравнения, 1975, II, № 2, с.373.
10. Fokas A.S., Ablowitz M.J., J. Math. Phys., 1982,23, No.11,p.2033
II. Громак В.И., ДАН БССР, 1979, 23, 6, с.499.
I2. Bordag L.A., JINR, E5-80-477, Dubna, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1985 года.