сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-733

В.В.Курышкин,* Л.А.Севастьянов*,
В.М.Филиппов*, Э.Э.Энтральго

К МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

* Университет дружбы народов им.П.Лумумбы,
Москва

1985

Рассмотрим следующую краевую задачу для нелинейного уравнения параболического типа:

$$N(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] = g, \tag{I}$$

$$u(x,0) = 0, \quad a \le x \le b, \tag{2а}$$

$$u(b,t)=0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2б}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2в}$$

где $g(x,t) \in L_2(\Omega)$, а область определения $D(N)$ оператора N образуют функции $u(x,t) \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющие граничным условиям (2).

Здесь и далее $\Omega = \{(x,t) / a < x < b, 0 < t < T\}$, $\overline{\Omega}$ - замыкание области Ω.

По поводу функции f в уравнении (I) будем предполагать, что $f(0) = 0$, а ее производная

$$f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\left[f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \ge \alpha^2 > 0, \quad \forall u \in D(N) \tag{3}$$

и принадлежит множеству непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$ (эти ограничения на f можно рассматривать как аналогию между производной (3) и коэффициентом диффузии в линейном параболическом уравнении).

Решение задачи (I)-(3) в принципе можно искать с помощью обратной задачи вариационного исчисления, выбирая в качестве варьируемого функционала функционал метода наименьших квадратов (МНК)

$$F(u) = (N(u) - g, N(u) - g) \ge 0, \tag{4а}$$

определенный в гильбертовом пространстве H функций $u(x,t)$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$:

$$(u,v) = \int_\Omega d\Omega \; u(x,t) \cdot v(x,t). \tag{4б}$$

Однако функционал (4) содержит, как и исходное уравнение (I), производные второго порядка, что может приводить к неустойчивости алгоритмов поиска его экстремальных точек в пространстве H. Поэтому использование вариационного метода решения задачи (I)-(3) на основе функционала МНК (4) требует специального обоснования.

Подобное обоснование может быть проведено на основе результатов работы /1/, где для операторного уравнения

$$\tilde{N}(u) \equiv N(u) - g = 0 \qquad (5)$$

с нелинейным непотенциальным оператором N, $D(N) \subseteq H$, при условии, что область значений $R(N)$ плотна в H, доказано следующее

<u>Утверждение</u>. Пусть имеется некоторое гильбертово пространство H_β со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\beta$ и системой координатных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, для которых выполняется:

а/ $D(N) \subseteq H_\beta \subseteq H$;

б/ область определения $D(N)$ плотна в H_β;

в/ система $\{\varphi_k\}$ образует базис в H_β;

г/ существует такой линейный оператор B, что $D(B) \supseteq D(N)$,

$$(N(u_1)-N(u_2),\, B(u_1-u_2)) \geq c_1\,(u_1-u_2,\, u_1-u_2)_\beta, \qquad (6а)$$

$$(B u_1,\, B u_1) \leq c_2\,(u_1, u_1)_\beta, \qquad (6б)$$

для $\forall u_i \in D(N)$, где константы c_1 и c_2 не зависят от u_i, $c_1 > 0$.

Тогда любая последовательность приближенных решений уравнения (5)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \quad n \to \infty, \qquad (7)$$

где a_k находятся из условия минимума функционала МНК

$$F(u_n) = (\tilde{N}(u_n), \tilde{N}(u_n)) \longrightarrow \min_{a_1,\dots,a_n} \qquad (8)$$

сходится в H_β к единственному элементу u_0, который обращает в нуль функционал МНК F, определенный соотношением (8), и, следовательно, является решением задачи (5).

Таким образом, для обоснования МНК с функционалом (4) в случае задачи (I)-(3) достаточно показать существование такого оператора B и построить такое пространство H_β, что будут выполняться все условия сформулированного выше утверждения.

Для задачи (I)-(3) выберем следующий оператор B:

$$(Bu)(x,t) = u(x,t) - \int_b^x d\xi \int_a^\xi dy\, \frac{\partial u}{\partial t}(y,t). \qquad (9)$$

Такой оператор B имеет смысл для $\forall u \in D(N)$ оператора N из уравнения (I), т.е. $D(B) \supseteq D(N)$.

Введем теперь пространство H_β, являющееся пополнением $D(N)$ по норме, определенной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\beta$:

$$(u,v)_\beta = \int_\Omega d\Omega \Big\{ \frac{1+\beta^2}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v + \frac{1+\beta^2}{2} \cdot u \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \beta^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \int_a^x d\xi\, \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t) \int_a^x d\xi\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) \Big\}, \qquad (I0а)$$

где $0 < \beta^2 \leq \alpha^2$ (величина α^2 определена свойствами (3) функции f из уравнения (I)).

Скалярное произведение (I0а) определяет норму $\|u\|_\beta = \sqrt{(u,u)_\beta}$ в пространстве H_β. На самом деле:

$$(u,u)_\beta = \int_\Omega d\Omega \Big\{ \beta^2 \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\int_a^x d\xi\, \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t) \Big)^2 \Big\} + \int_a^b dx\, \frac{1+\beta^2}{2}\, u^2(x,T) \geq 0 \qquad (I0б)$$

и, очевидно, $\|cu\|_\beta = |c| \cdot \|u\|_\beta$; из неравенств Коши-Буняковского для каждого из трех членов в (I0б) вытекает справедливость правила треугольника, $\|u_1 + u_2\|_\beta \leq \|u_1\|_\beta + \|u_2\|_\beta$; наконец, с помощью известного соотношения

$$\int_\Omega d\Omega\, u^2 \leq c_3 \int_\Omega d\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2, \quad c_3 = c_3(\Omega) > 0 \qquad (II)$$

из (I0б) следует соответствие: $\|u\|_\beta = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению условий сформулированного выше утверждения. Условие а/ выполняется в силу построения пространства H_β и вытекающего из (I0б) и (II) соотношения: $\|u\|_\beta^2 \geq \|u\|^2 \cdot \beta^2 / c_3$. Условия б/ и в/ выполнены по построению H_β. Для доказательства справедливости оценки (6а) условия г/ введем в рассмотрение производную $N'(u)$ оператора N из (I)

$$N'(u)v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \big[N(u + \varepsilon v) - N(u) \big] =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \Big[f'\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \Big], \qquad (I2)$$

и вычислим (в пространстве H) скалярное произведение $(N'(u)v, Bv)$. Подставляя сюда (9) и (I2) после интегрирования по частям, имеем

$$(N'(u)v, Bv) = \int_\Omega d\Omega \Big\{ \frac{\partial v}{\partial t} \cdot v + f'\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \cdot \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 +$$

$$+\left(\int_a^x d\xi\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t)\right)^2 - f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot \frac{\partial v}{\partial x}\cdot \int_a^x d\xi\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t)\Big\} \geqslant \tag{13а}$$

$$\geqslant \int_\Omega d\Omega \left\{\frac{\partial v}{\partial t}\cdot v + \alpha^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\int_a^x d\xi\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t)\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial x}\cdot \int_a^x d\xi\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t)\right\} \geqslant \tag{13б}$$

$$\geqslant \int_\Omega d\Omega \left\{(1+\beta^2)\frac{\partial v}{\partial t}\cdot v + \beta^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\int_a^x d\xi\, \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t)\right)^2\right\}. \tag{13в}$$

Здесь переход от (13а) к (13б) осуществлен на основе ограничения (3) на функцию f (последний интеграл в (13б) отрицателен, что проверяется интегрированием по частям), а переход от (13б) к (13в) - с помощью интегрирования по частям и условия $\beta^2 \leq \alpha^2$ в (10а). Сравнивая соотношения (13) с нормой (10б), приходим к оценке

$$(N'(u)v, Bv) \geqslant (v,v)_\beta . \tag{13г}$$

Отсюда, как показано в следствии 2 работы /1/, следует оценка (6а). Справедливость оценки (6б) условия г/ утверждения легко проверяется с помощью непосредственных вычислений:

$$(Bu, Bu) = \int_\Omega d\Omega \left\{u - \int_b^x d\xi \int_a^\xi dy\, \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\right\}^2 = \tag{14а}$$

$$= \int_\Omega d\Omega \left\{u^2 + \left(\int_b^x d\xi \int_a^\xi dy\, \frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\right)^2\right\} +$$

$$+ \int_a^b dx \left\{\int_a^x d\xi\, u(\xi,T)\right\}^2 \leq \tag{14б}$$

$$\leq C_3 \int_\Omega d\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\int_a^x d\xi\, \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)\right)^2\right\} + C_3' \int_a^b dx\, (u(x,T))^2, \tag{14в}$$

где C_3 определена соотношением (11), $C_3' = C_3'([a,b]) > 0$ - аналогичная (11) оценка для интервала. Переход от (14а) к (14б) проведен с помощью интегрирования по частям. Сравнение (14в) с нормой (10б) приводит к оценке (6б), где $C_2 = C_2(C_3, C_3', \beta^2) > 0$.

Таким образом, при выбранном нами вспомогательном операторе B (9) и пространстве H_β, построенном как пополнение области определения оператора N из уравнения (1) по норме (10б), все условия приведенного выше утверждения оказываются выполненными. Следовательно, в пространстве H_β существует единственная точка u_*, обращающая в нуль положительный функционал (4), т.е. являющаяся решением исходной задачи (1)-(3).

Поэтому вариационный метод с функционалом МНК (4) для задачи (1)-(3) с нелинейным уравнением параболического типа является обоснованным, если поиск решения задачи проводится не в пространстве H, а в пространстве H_β. При этом если координатные функции $\{\varphi_k\}$ образуют полную ортонормированную систему функций в H_β, то коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ в разложении (7), минимизирующие функционал (4), могут быть найдены из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\int_\Omega d\Omega\, (N(u_n) - g)\cdot N'(u_n)\varphi_k = 0, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{15}$$

которая разрешима при любом n (подробнее см. /1/).

Следует отметить, что из результатов работы /1/ при $B = I$ следовали результаты работы /2/, которые, однако, не позволяют обосновать вариационный метод с функционалом МНК даже для линейных параболических уравнений (условие монотонности (6а) при $B = I$ не выполняется). Отметим еще, что возможное обоснование вариационного метода для линейных параболических уравнений приведено в работе /3/.

Литература

1. Курышкин В.В., Севастьянов Л.А., Филиппов В.М., Энтральго Э.Э. О вариационных принципах для нелинейных непотенциальных операторов. ОИЯИ, Р2-85-577, Дубна, 1985.
2. Лангенбах А.И. О применении метода наименьших квадратов к нелинейным уравнениям. ДАН СССР, 1962, 143, № 1, с. 31-34.
3. Филиппов В.М., Скороходов А.Н. Принцип минимума квадратичного функционала для краевой задачи теплопроводности. Дифференциальные уравнения, 1977, XIII, № 8, с.1434-1445.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 октября 1985 года.