



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-85-638

И.А.Маркова*, С.И.Сердюкова

ИСКУССТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ
ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

* Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

1985

В работе /1/ для внешней задачи Дирихле было получено искусственное граничное условие третьего порядка точности. В предлагаемой работе выводится искусственное граничное условие пятого порядка точности, которое позволит сократить объем вычислительной работы приблизительно в 16 раз по сравнению со случаем искусственных граничных условий третьего порядка точности. Исследована устойчивость возникающей краевой задачи, которая затем аппроксимируется системой разностных уравнений. Для решения этой системы хорошо подходит вариант метода прогонки Лобарова - Андреева /2/.

Решение задачи Дирихле вне единичного круга имеет вид /3/

$$u(r, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 - 2r \cos(\theta_0 - \theta) + 1} f(\theta_0) d\theta.$$

При $r \rightarrow \infty$ решение стремится к пределу

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

Без ограничения общности можно считать, что $u_0 = 0$. В дальнейшем предполагается, что при $r \rightarrow \infty$ решение стремится к нулю. Положим

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta_0) \cos \varphi d\theta_0}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2}, \quad \varphi = \theta_0 - \theta, \quad \varepsilon = \frac{2r}{r^2 + 1}.$$

Справедливы соотношения

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \tilde{u}(\varepsilon, \varphi),$$

$$\tilde{u}(\varepsilon, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0) (\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^3 \cos^3 \varphi + \varepsilon^4 \cos^4 \varphi + o(\varepsilon^5)) d\theta_0,$$

$$\tilde{u} - \varepsilon I = -\varepsilon^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \varphi + 2\varepsilon \cos^3 \varphi + 3\varepsilon^2 \cos^4 \varphi) f(\theta_0) d\theta_0 + o(\varepsilon^5),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4r}{r^2-1} u - \frac{1}{2\pi} \frac{r^2-1}{r^2+1} \frac{r^2-1}{2r^2} \varepsilon^2 I. \quad (1)$$

Чтобы получить искусственное граничное условие пятого порядка точности, выпишем асимптотические разложения производных до членов порядка $O(\varepsilon^5)$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2+1}{2r^2} (-\varepsilon^2 I) - \frac{1}{2\pi} \frac{r^2-1}{r^2+1} \frac{r^2-1}{2r^2} \left\{ -7\varepsilon^2 I + \right. \\ \left. + 6\varepsilon(1+3\varepsilon^2) \tilde{u} - 12\varepsilon^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0) \cos^3 \varphi d\theta_0 \right\}.$$

Здесь есть нужное нам $\varepsilon^2 I$. Интеграл в правой части находим из соотношения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 2\varepsilon(1+3\varepsilon^2) \tilde{u} - 3\varepsilon^2 I - 2\varepsilon^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0) \cos^3 \varphi d\theta_0 + O(\varepsilon^5).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{r^2+1}{2r^2} \varepsilon^2 I - \frac{1}{2\pi} \frac{r^2-1}{r^2+1} \frac{r^2-1}{2r^2} \left\{ 11\varepsilon^2 I - \right. \\ \left. - 6\varepsilon(1+3\varepsilon^2) \tilde{u} + 6\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} \right\} + O(\varepsilon^5). \quad (2)$$

Находим $\varepsilon^2 I$, подставляем его в (1). После ряда элементарных преобразований имеем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{11r} \left(6 + \frac{152}{11r^2} \right) u + \frac{6}{11r} \left(1 - \frac{26}{11r^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \\ + \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{(11r)^2} - \frac{72}{(11)^3 r^2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} + O(\varepsilon^5).$$

Из (2) следует, что $\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} = O(\varepsilon^2)$. В результате получается, что для точного решения внешней задачи Дирихле

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{(11r_0)^2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} + \left(\frac{6}{11r_0} - \frac{156}{121r_0^3} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \\ - \left(\frac{6}{11r_0} + \frac{152}{121r_0^3} \right) u + O(r_0^{-5}).$$

Рассмотрим задачу в кольце с искусственным граничным условием на внешней окружности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 \leq r \leq r_0, \\ \tilde{u} \Big|_{r=1} = f(\theta), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121r_0^2} \right) \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial r \partial \theta^2} + \left(\frac{6}{11r_0} - \frac{156}{121r_0^3} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} - \\ - \left(\frac{6}{11r_0} + \frac{152}{121r_0^3} \right) \tilde{u} = a_1(r_0) \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial r \partial \theta^2} + a_2(r_0) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} - a_3(r_0) \tilde{u}. \quad (3)$$

Оценим отклонение решения задачи с искусственным граничным условием \tilde{u} от точного решения внешней задачи Дирихле. Одновременно будет доказана устойчивость (3) в C . Решение краевой задачи (3) имеет в виде ряда

$$\tilde{u}(r, \theta) = \gamma \ln r + A_0 + \sum_{l=1}^{\infty} (A_l r^l + A_{-l} r^{-l}) \cos l\theta + \\ + (B_l r^l - B_{-l} r^{-l}) \sin l\theta.$$

Из первого граничного условия получаем систему

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = c_0 = 0, \\ A_l + A_{-l} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos l\theta d\theta = c_l, \\ B_l - B_{-l} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin l\theta d\theta = d_l, \quad l = 1, 2, \dots$$

Из условия на внешней границе

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{r_0} \left[(A_l r_0^l - A_{-l} r_0^{-l}) \cos l\theta + (B_l r_0^l + B_{-l} r_0^{-l}) \sin l\theta \right] = \\ = -a_1(r_0) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^3}{r_0} \left[(A_l r_0^l - A_{-l} r_0^{-l}) \cos l\theta + (B_l r_0^l + B_{-l} r_0^{-l}) \sin l\theta \right] -$$

$$- a_2(\tau_0) \sum_{l=1}^{\infty} \left[(A_l \tau_0^l + A_{-l} \tau_0^{-l}) \cos l\theta + (B_l \tau_0^l - B_{-l} \tau_0^{-l}) \sin l\theta \right] \cdot l^2 -$$

$$- a_3(\tau_0) \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left[(A_l \tau_0^l + A_{-l} \tau_0^{-l}) \cos l\theta + (B_l \tau_0^l - B_{-l} \tau_0^{-l}) \sin l\theta \right] + \gamma \ln \tau_0 \right\}$$

получаем дополнительную систему

$$\gamma = 0, \quad A_l \cdot \left(\frac{l}{\tau_0} + a_1(\tau_0) \frac{l^3}{\tau_0} + a_2(\tau_0) l^2 + a_3(\tau_0) \right) \tau_0^l +$$

$$+ A_{-l} \cdot \left(-\frac{l}{\tau_0} - a_1(\tau_0) \frac{l^3}{\tau_0} + a_2(\tau_0) l^2 + a_3(\tau_0) \right) \tau_0^{-l} = 0,$$

$$B_l \left(\frac{l}{\tau_0} + a_1(\tau_0) \frac{l^3}{\tau_0} + a_2(\tau_0) l^2 + a_3(\tau_0) \right) \cdot \tau_0^l -$$

$$- B_{-l} \left(-\frac{l}{\tau_0} - a_1(\tau_0) \frac{l^3}{\tau_0} + a_2(\tau_0) l^2 + a_3(\tau_0) \right) \tau_0^{-l} = 0,$$

$$l = 1, 2, \dots$$

В результате находим

$$\tilde{u} = C_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \tau_0^{-l} \left(C_l \cos l\theta + D_l \sin l\theta \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{l}{\tau_0} + a_1(\tau_0) \frac{l^3}{\tau_0} - a_2(\tau_0) l^2 - a_3(\tau_0) \right) (\tau_0^l - \tau_0^{-l}) (C_l \cos l\theta + D_l \sin l\theta)}{\left(\frac{l}{\tau_0} + a_1(\tau_0) \frac{l^3}{\tau_0} + a_2(\tau_0) l^2 + a_3(\tau_0) \right) \tau_0^{2l} + \left(-\frac{l}{\tau_0} - a_1(\tau_0) \frac{l^3}{\tau_0} - a_2(\tau_0) l^2 - a_3(\tau_0) \right)}$$

Решение задачи Дирихле имеет вид

$$u = C_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \tau_0^{-l} (C_l \cos l\theta + D_l \sin l\theta).$$

Оцениваем погрешность

$$|u - \tilde{u}| \leq 2 \max_{\theta} |f(\theta)| \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^l \tau_0^{-l} \beta_l, \quad \text{где}$$

$$\beta_l = \frac{l + l^3 \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121 \tau_0^2} \right) - l^2 \left(\frac{6}{11} - \frac{156}{121 \tau_0^2} \right) - \left(\frac{6}{11} + \frac{152}{121 \tau_0^2} \right)}{\left(l + l^3 \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121 \tau_0^2} \right) \right) (1 + \tau_0^{-2l}) + \left(l^2 \left(\frac{6}{11} - \frac{156}{121 \tau_0^2} \right) + \frac{6}{11} + \frac{152}{121 \tau_0^2} \right) (1 - \tau_0^{-2l})}$$

При $\tau_0 \geq 2$, $l \geq 6$ все величины в скобках неотрицательны и

$$l > \frac{6}{11} + \frac{152}{121 \tau_0^2}, \quad l^3 \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121 \tau_0^2} \right) > l^2 \left(\frac{6}{11} - \frac{156}{121 \tau_0^2} \right), \quad 0 < \beta_l < 1.$$

Для $l < 6$, $\tau_0 \geq 2$ справедливы соотношения

$$0 \leq \beta_l < \frac{11(l-1)(l-2)(l-3) - 4\tau_0^{-2}(l^3 - 39l^2 + 38)}{11(l+1)(l+2)(l+3) - 4\tau_0^{-2}(l^3 + 39l^2 - 38)}$$

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 < 0,824 \cdot \tau_0^{-2}, \quad \beta_3 < 1,17 \cdot \tau_0^{-2}, \quad \beta_4 < 0,102, \quad \beta_5 < 0,409.$$

Из этих оценок следует, что

$$|u - \tilde{u}| < 2 \max_{\theta} |f(\theta)| \cdot \left(0,926 \cdot \tau_0^{-2} + 1,579 \tau_0^{-5} + \frac{\tau_0^{-6}}{1 - \tau_0^{-4}} \right) <$$

$$< 4,44 \cdot \tau_0^{-2} \max_{\theta} |f(\theta)| < 0,01 \max_{\theta} |f(\theta)| \quad (4)$$

при $\tau_0 > 4,6$.

Из (4) и оценки $|u| \leq \max_{\theta} |f(\theta)|$ следует устойчивость краевой задачи (3) с искусственным граничным условием в равномерной метрике. При вычислении значений на внешней границе на каждом шаге итерации возникает система

$$u_{j+1}^n - \left(2 + \frac{h^2}{a_1(\tau_0 - h)} \right) u_j^n + u_{j-1}^n = f_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, N; \quad u_0^n = u_N^n, \quad u_{N-1}^n = u_1^n,$$

$$f_j = -\frac{h^2}{a_1(\tau_0 - h)} u_j^{n-2} + u_{j+1}^{n-2} - 2u_j^{n-2} + u_{j-1}^{n-2} -$$

$$- \frac{2\tau a_2(\tau_0 - h)}{a_1(\tau_0 - h)} (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + 2\tau h^2 \frac{a_3(\tau_0 - h)}{a_1(\tau_0 - h)} u_j^{n-1}.$$

Для решения этой системы хорошо подходит вариант метода прогонки Абрамова - Андреева ^{/2/}. Доказательство устойчивости аналогично случаю искусственного граничного условия третьего порядка точности ^{/1/}. Разница состоит лишь в том, что здесь ω и φ_j являются величинами порядка точности $O(k^2)$. Алгоритм счета граничных точек остается старым ^{/1/}. Как правило, на практике приходится иметь дело с областями, границы которых конформно отображаются на единичную окружность. Полученные граничные условия могут быть использованы для решения внешней задачи Дирихле в таких областях.

Авторы приносят благодарность Н.С.Вахвалову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р5-84-718, Дубна, 1984.
2. Абрамов А.А., Андреев В.В. ДММ и МЯ, 1963, т. 3, № 2, с. 377-381.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1966, с. 240.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 августа 1985 года.

Внимание организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.