сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-638

И.А.Маркова*, С.И.Сердюкова

ИСКУССТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

* Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

1985

В работе /I/ для внешней задачи Дирихле было получено искусственное граничное условие третьего порядка точности. В предлагаемой работе выводится искусственное граничное условие пятого порядка точности, которое позволяет сократить объем вычислительной работы приблизительно в I6 раз по сравнению со случаем искусственных граничных условий третьего порядка точности. Исследована устойчивость возникающей краевой задачи, которая затем аппроксимируется системой разностных уравнений. Для решения этой системы хорошо подходит вариант метода прогонки Абрамова – Андреева /2/.

Решение задачи Дирихле вне единичного круга имеет вид /3/

$$u(r,\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2-1}{r^2-2r\cos(\theta_0-\theta)+1} f(\theta_0)\,d\theta_0 .$$

При $r\to\infty$ решение стремится к пределу

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta .$$

Без ограничения общности можно считать, что $u_0 = 0$. В дальнейшем предполагается, что при $r\to\infty$ решение стремится к нулю. Положим

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta_0)\cos\varphi\, d\theta_0}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}, \quad \varphi = \theta_0-\theta, \quad \varepsilon = \frac{2r}{r^2+1} .$$

Справедливы соотношения

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{r^2-1}{r^2+1}\,\tilde{u}(\varepsilon,\varphi),$$

$$\tilde{u}(\varepsilon,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0)\left(\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi+\varepsilon^3\cos^3\varphi+\varepsilon^4\cos^4\varphi+O(\varepsilon^5)\right)d\theta_0,$$

$$\tilde{u}-\varepsilon I = -\varepsilon^2\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos^2\varphi+2\varepsilon\cos^3\varphi+3\varepsilon^2\cos^4\varphi\right)f(\theta_0)\,d\theta_0+O(\varepsilon^5),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4r}{r^2-1}\, u - \frac{1}{2\pi}\, \frac{r^2-1}{r^2+1}\, \frac{r^2-1}{2r^2}\, \varepsilon^2 I. \qquad (I)$$

Чтобы получить искусственное граничное условие пятого порядка точности, выписываем асимптотические разложения производных до членов порядка $O(\varepsilon^5)$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} = \frac{1}{2\pi}\, \frac{r^2+1}{2r^2}\left(-\varepsilon^2 I\right) - \frac{1}{2\pi}\, \frac{r^2-1}{r^2+1}\, \frac{r^2-1}{2r^2} \Big\{ -7\varepsilon^2 I +$$

$$+ 6\varepsilon\left(1+3\varepsilon^2\right)\tilde{u} - 12\varepsilon^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0) \cos^3\varphi \, d\theta_0 \Big\}.$$

Здесь есть нужное нам $\varepsilon^2 I$. Интеграл в правой части находим из соотношения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 2\varepsilon\left(1+3\varepsilon^2\right)\tilde{u} - 3\varepsilon^2 I - 2\varepsilon^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta_0) \cos^3\varphi \, d\theta_0 + O(\varepsilon^5).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} = -\frac{1}{2\pi}\, \frac{r^2+1}{2r^2}\, \varepsilon^2 I - \frac{1}{2\pi}\, \frac{r^2-1}{r^2+1}\, \frac{r^2-1}{2r^2} \Big\{ 11\varepsilon^2 I -$$

$$- 6\varepsilon\left(1+3\varepsilon^2\right)\tilde{u} + 6\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} \Big\} + O(\varepsilon^5). \qquad (2)$$

Находим $\varepsilon^2 I$, подставляем его в (I). После ряда элементарных преобразований имеем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{11 r}\left(6 + \frac{152}{11 r^2}\right) u + \frac{6}{11 r}\left(1 - \frac{26}{11 r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{(11 r)^2} - \frac{72}{(11)^3 r^4}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} + O(\varepsilon^5).$$

Из (2) следует, что $\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} = O(\varepsilon^2)$. В результате получается, что для точного решения внешней задачи Дирихле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{(11 r_0)^2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} + \left(\frac{6}{11 r_0} - \frac{156}{121 r_0^3}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} -$$

$$- \left(\frac{6}{11 r_0} + \frac{152}{121 r_0^3}\right) u + O(r_0^{-5}).$$

Рассмотрим задачу в кольце с искусственным граничным условием на внешней окружности:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 \le r \le r_0,$$

$$\left.\tilde{u}\right|_{r=1} = f(\theta), \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121 r_0^2}\right)\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial r \partial \theta^2} + \left(\frac{6}{11 r_0} - \frac{156}{121 r_0^3}\right)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} - \qquad (3)$$

$$- \left(\frac{6}{11 r_0} + \frac{152}{121 r_0^3}\right)\tilde{u} = a_1(r_0)\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial r \partial \theta^2} + a_2(r_0)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} - a_3(r_0)\,\tilde{u}.$$

Оценим уклонение решения задачи с искусственным граничным условием $\tilde{u}$ от точного решения внешней задачи Дирихле. Одновременно будет доказана устойчивость (3) в C. Решение краевой задачи (3) ищем в виде ряда

$$\tilde{u}(r,\theta) = \gamma \ln r + A_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + A_{-\ell} r^{-\ell}\right)\cos \ell\theta +$$

$$+ \left(B_\ell r^\ell - B_{-\ell} r^{-\ell}\right)\sin \ell\theta.$$

Из первого граничного условия получаем систему

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = c_0 = 0,$$

$$A_\ell + A_{-\ell} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos \ell\theta \, d\theta = c_\ell,$$

$$B_\ell - B_{-\ell} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin \ell\theta \, d\theta = s_\ell; \quad \ell = 1, 2, \ldots .$$

Из условия на внешней границе

$$\frac{\gamma}{r_0} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\ell}{r_0}\left[\left(A_\ell r_0^\ell - A_{-\ell} r_0^{-\ell}\right)\cos \ell\theta + \left(B_\ell r_0^\ell + B_{-\ell} r_0^{-\ell}\right)\sin \ell\theta\right] =$$

$$= -a_1(r_0)\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\ell^3}{r_0}\left[\left(A_\ell r_0^\ell - A_{-\ell} r_0^{-\ell}\right)\cos \ell\theta + \left(B_\ell r_0^\ell + B_{-\ell} r_0^{-\ell}\right)\sin \ell\theta\right] -$$

$$- a_2(r_0) \sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(A_l r_0^{l} + A_{-l} r_0^{-l}\right) \cos l\theta + \left(B_l r_0^{l} - B_{-l} r_0^{-l}\right) \sin l\theta \right] \cdot l^2 -$$

$$- a_3(r_0) \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(A_l r_0^{l} + A_{-l} r_0^{-l}\right) \cos l\theta + \left(B_l r_0^{l} - B_{-l} r_0^{-l}\right) \sin l\theta \right] + \gamma \ln r_0 \right\}$$

получаем дополнительную систему

$$\gamma = 0, \quad A_l \cdot \left(\frac{l}{r_0} + a_1(r_0) \frac{l^3}{r_0} + a_2(r_0) l^2 + a_1(r_0) \right) r_0^{l} +$$

$$+ A_{-l} \cdot \left(-\frac{l}{r_0} - a_1(r_0) \frac{l^3}{r_0} + a_2(r_0) l^2 + a_3(r_0) \right) r_0^{-l} = 0,$$

$$B_l \left(\frac{l}{r_0} + a_1(r_0) \frac{l^3}{r_0} + a_2(r_0) l^2 + a_3(r_0) \right) \cdot r_0^{l} -$$

$$- B_{-l} \left(-\frac{l}{r_0} - a_1(r_0) \frac{l^3}{r_0} + a_2(r_0) l^2 + a_3(r_0) \right) r_0^{-l} = 0,$$

$$l = 1, 2, \dots .$$

В результате находим

$$\tilde{u} = c_0 + \sum_{l=1}^{\infty} r^{-l} \left(c_l \cos l\theta + s_l \sin l\theta \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{l}{r_0} + a_1(r_0) \frac{l^3}{r_0} - a_2(r_0) l^2 - a_3(r_0) \right) \left(r^{l} - r^{-l} \right) \left(c_l \cos l\theta + s_l \sin l\theta \right)}{\left(\frac{l}{r_0} + a_1(r_0) \frac{l^3}{r_0} + a_2(r_0) l^2 + a_3(r_0) \right) r_0^{2l} + \left(\frac{l}{r_0} + a_1(r_0) \frac{l^3}{r_0} - a_2(r_0) l^2 - a_3(r_0) \right)} .$$

Решение задачи Дирихле имеет вид

$$u = c_0 + \sum_{l=1}^{\infty} r^{-l} \left(c_l \cos l\theta + s_l \sin l\theta \right).$$

Оцениваем погрешность

$$|u - \tilde{u}| \le 2 \max_{\theta} |f(\theta)| \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{l} \cdot r_0^{-l} \cdot \beta_l ,$$ где

$$\beta_l = \frac{l + l^3 \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121 r_0^2} \right) - l^2 \left(\frac{6}{11} - \frac{156}{121 r_0^2} \right) - \left(\frac{6}{11} + \frac{152}{121 r_0^2} \right)}{\left(l + l^3 \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121 r_0^2} \right) \right) \left(1 + r_0^{-2l} \right) + \left(l^2 \left(\frac{6}{11} - \frac{156}{121 r_0^2} \right) + \frac{6}{11} + \frac{152}{121 r_0^2} \right) \left(1 - r_0^{-2l} \right)} .$$

При $r_0 \ge 2$, $l \ge 6$ все величины в скобках неотрицательные и

$$l > \frac{6}{11} + \frac{152}{121 r_0^2}, \quad l^3 \left(\frac{1}{11} - \frac{4}{121 r_0^2} \right) > l^2 \left(\frac{6}{11} - \frac{156}{121 r_0^2} \right), \quad 0 < \beta_l < 1 .$$

Для $l < 6$, $r_0 \ge 2$ справедливы соотношения

$$0 \le \beta_l < \frac{11 (l-1)(l-2)(l-3) - 4 r_0^{-2} \left(l^3 - 39 l^2 + 38 \right)}{11 (l+1)(l+2)(l+3) - 4 r_0^{-2} \left(l^3 + 39 l^2 - 38 \right)} ,$$

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 < 0{,}824 \cdot r_0^{-2}, \quad \beta_3 < 1{,}17 \cdot r_0^{-2}, \quad \beta_4 < 0{,}102, \quad \beta_5 < 0{,}409.$$

Из этих оценок следует, что

$$|u - \tilde{u}| < 2 \max_{\theta} |f(\theta)| \cdot \left(0{,}926 \cdot r_0^{-4} + 1{,}579\, r_0^{-5} + \frac{r_0^{-6}}{1 - r_0^{-1}} \right) <$$

$$< 4{,}44 \cdot r_0^{-4} \max_{\theta} |f(\theta)| < 0{,}01 \max_{\theta} |f(\theta)| \qquad (4)$$

при $r_0 > 4{,}6$.

Из (4) и оценки $|u| \le \max_{\theta} |f(\theta)|$ следует устойчивость краевой задачи (3) с искусственным граничным условием в равномерной метрике. При вычислении значений на внешней границе на каждом шаге итерации возникает система

$$u_{\nu+1}^{n} - \left(2 + \frac{h^2}{a_1(r_0 - h)} \right) u_{\nu}^{n} + u_{\nu-1}^{n} = F_{\nu} ,$$

$$\nu = 1, 2, \dots, N ; \quad u_0^{n} = u_N^{n} , \quad u_{N+1}^{n} = u_1^{n} ,$$

$$F_{\nu} = - \frac{h^2}{a_1(r_0 - h)} u_{\nu}^{n-2} + u_{\nu+1}^{n-2} - 2 u_{\nu}^{n-2} + u_{\nu-1}^{n-2} -$$

$$- \frac{2 \tau a_2(r_0 - h)}{a_1(r_0 - h)} \left(u_{\nu+1}^{n-1} - 2 u_{\nu}^{n-1} + u_{\nu-1}^{n-1} \right) + 2 \tau h^2 \frac{a_3(r_0 - h)}{a_1(r_0 - h)} u_{\nu}^{n-1} .$$

Для решения этой системы хорошо подходит вариант метода прогонки Абрамова – Андреева /2/. Доказательство устойчивости аналогично случаю искусственного граничного условия третьего порядка точности /1/. Разница состоит лишь в том, что здесь ω и $\mathcal{F}_j$ являются величинами порядка точности $O(h^2)$. Алгоритм счета граничных точек остается старым /1/. Как правило, на практике приходится иметь дело с областями, границы которых конформно отображаются на единичную окружность. Полученные граничные условия могут быть использованы для решения внешней задачи Дирихле в таких областях.

Авторы приносят благодарность Н.С.Бахвалову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р5-84-718, Дубна, 1984.
2. Абрамов А.А., Андреев В.Б. ЖВМ и МФ, 1963, т. 3, № 2, с. 377-381.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1966, с. 240.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 августа 1985 года.